МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Белгород
2014

УДК 519.8(07)
ББК 22.1 я7
Л

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова *В. М. Никифоров*
Кандидат физико-математических наук, доцент Белгородской государственной сельскохозяйственной академии им. В. Я. Горина *С. Н. Толстопятов*

Л **Линейная** алгебра: учебное пособие / Г. Л. Окунева, С. В. Ряб-цева, Е. В. Селиванова, В. И. Дюкарева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2014. – 102 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и охватывает такие разделы как линейная алгебра и векторы. Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач, упражнения по темам, индивидуальные домашние задания, контрольные работы по каждой теме, вопросы к зачету (экзамену). Пособие может использоваться как при изучении лекционного курса, так и на практических занятиях.
Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех специальностей.
Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.08(07)
ББК 22.1 я7

© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В. Г. Шухова, 2014

1. Определители

1.1. Определитель второго порядка

Пусть задана таблица четырех чисел, расположенных в две строки и в два столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Элементы a_{11}, a_{12} – образуют первую строку, элементы a_{21}, a_{22} образуют вторую строку. Элементы a_{11}, a_{21} образуют первый столбец, элементы a_{12}, a_{22} образуют второй столбец. Элементы a_{11}, a_{22} стоят на главной диагонали, элементы a_{12}, a_{21} стоят на побочной диагонали. Определителем второго порядка для чисел (1) называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

Иначе это определение можно дать так: определителем второго порядка для чисел (1) называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали. При этом пишут

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

Определитель (от латинского слова determinant) обозначается Δ или $\det$.

Пример. Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 20 - 18 = 2.$

2) $\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -2 & 25 \end{vmatrix} = -10 \cdot 25 - 1 \cdot (-2) = -250 + 2 = -248.$

1.2. Определитель третьего порядка

Пусть задана таблица, состоящая из девяти чисел, расположенных в три строки и три столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Определителем третьего порядка для чисел (4) называется число, которое определяется по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \qquad (5)$$

при этом пишут

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно использовать правило, называемое правилом "треугольника":

- три первых слагаемых в формуле (5) берутся со знаком плюс и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными главной диагонали и с вершинами в элементах на побочной диагонали (рис.1);

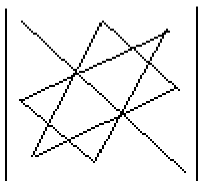

Рис. 1

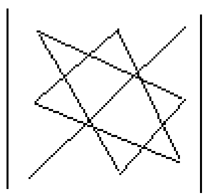

Рис. 2

- три следующих слагаемых берутся со знаком минус и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали и с вершинами в элементах, стоящих на главной диагонали (рис.2).

Пример. Вычислить определитель третьего порядка по правилу «треугольника» $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot(-5)\cdot(-1) + 0 - (1\cdot 2\cdot(-5) + 2\cdot 1\cdot(-1) + 0) =$$

$$= 8 + 20 - (-10 - 2) = 28 + 12 = 40.$$

Можно правило «треугольника» превратить в правило «параллелограмма». Оно заключается в следующем: 1) припишем под определителем две первых строки; 2) мысленное проведем три прямые параллельные главной диагонали, выходящие из элементов первого столбца, получим сумму произведений элементов рис. 1; 3) мысленно проведем три прямые параллельные побочной диагонали, выходящие из элементов третьего столбца, получим сумму произведений элементов рис. 2.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка по правилу «параллелограмма» $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 20 - (-10 - 2 + 0) = 40.$$

1.3. Минор определителя

Пусть задан определитель третьего порядка $\Delta_3 = |a_{ij}|$, где i – индекс строки, j – индекс столбца.

Минором любого элемента a_{ij} определителя Δ_3, называется определитель меньшего порядка, который получен из элементов определителя, оставшихся после вычеркивания элементов i – строки и j – столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Пример. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти миноры M_{11}, M_{32}.

Решение:

а) минор M_{11} получим, вычеркивая первую строку и первый столбец определителя:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3;$$

б) для получения минора M_{32} вычеркнем третью строку и второй столбец определителя:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6.$$

1.4. Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением любого элемента определителя a_{ij} называется минор этого элемента с определенным знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{6}$$

Пример. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти алгебраические дополнения A_{11}, A_{32}.

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = 6.$$

1.5. Разложение определителя по строке или столбцу

Теорема: определитель n-ого порядка равен сумме произведений элементов выбранной строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}. \qquad (7)$$

В выражении (7) записано разложение определителя по элементам i строки. Аналогичное разложение можно записать по любой строке или столбцу.

Пример. Записать разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ по второй строке и по третьему столбцу.

Решение:

1) Вычислим определитель разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3A_{13} + 6A_{23} + 9A_{33} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6. Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится, если строчки и столбцы определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Значение определителя изменится на противоположное по знаку, если две строки или два столбца определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов строки или столбца определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Определитель равен нулю, если он имеет строку или столбец, состоящий из нулей.

5. Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца.

6. Определитель равен нулю, если он имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца.

Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на какое-то число, не равное нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка, используя свойства определителей и разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение: прежде чем вычислить определитель, получим в первой строчке нули, во втором и четвертом столбцах. Для этого умножим первый столбец на (-2) и сложим со вторым, второй столбец изменится, и умножим первый столбец на (-3) и сложим с четвертым, изменится четвертый столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -16 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + 96 - 75) - (18 + 80 - 5) = -71\,.$$

Решим этот же пример, получив нули в третьем столбце. Для этого к третьей строке прибавим вторую, изменится третья строка, и к четвертой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-5), изменится четвертая строка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 13 & 25 & 0 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 13 & 25 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= -(50 - 26 + 300) - (78 - 25 + 200) = -71.$$

1.7. Упражнения

1. Вычислить определители второго и третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 24 & 7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 12 & 5 & 1 \\ 13 & 6 & 3 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -3 & -4 & -3 \\ 18 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} 15 & 3 & 5 \\ 3 & 65 & 3 \\ 30 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 1 & 13 & 4 \\ 3 & 5 & 13 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 10 & 32 & 15 \\ 34 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$; 17) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения и неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 12 & x+5 \\ 10 & 3-x \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x & 2-x \\ 1 & 3x \end{vmatrix} = 0;$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & x & 3x \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

4) $\begin{vmatrix} x & ax \\ b-x & a \end{vmatrix} < 0;$ 5) $\begin{vmatrix} 6 & 4-x \\ x+3 & 3-x \end{vmatrix} > 0;$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 3 & -x+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$

7) $\begin{vmatrix} x & x & 3x \\ 4 & x-2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ 8) $\begin{vmatrix} x & 6 & -x \\ 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & x \end{vmatrix} < 0;$ 9) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 3x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$

10) $\begin{vmatrix} 2x & 5-x \\ x-2 & 7 \end{vmatrix} = 0;$ 11) $\begin{vmatrix} -2 & x & 5 \\ 3x & -x+1 & 7 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} > 0;$ 12) $\begin{vmatrix} 5x & x^2 & -x \\ -3 & 6x & 2 \\ 11 & 12x & x \end{vmatrix} < 0.$

3. Разложить определитель по указанной строке или столбцу и вычислить его.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 1 & 2 \\ -7 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ по первой строке и четвертому столбцу;

2) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ по третьей строке и первому столбцу;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по второму столбцу.

4. Вычислить $M_{12} + M_{32} - M_{11}$, определив миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить $M_{11} + M_{22} + M_{33}$, определив миноры определителя

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

6. Найти алгебраические A_{11}; A_{32}; A_{31}; A_{21} дополнения определителя $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 11 & 2 & 1 & 5 \\ 13 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить определители, используя свойства определителей:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \\ 8 & 5 & -1 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -5 & 4 \\ -8 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

1.8. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -D & N \\ M & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} M & M+N & 4D \\ 3 & -N & 3 \\ D & M & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2+N & D & 1 & M \\ M & N & D & -N \\ N & 4 & -M & 1 \\ 3+D & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2D & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & M & 2 & 1 \\ D & N & 1 & 0 & M \\ 3 & 1 & N & 4 & 1 \\ 4 & M & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Найти все алгебраические дополнения к элементам определителя:

1) $\begin{vmatrix} D & 2N \\ -M & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} M & M+N & 4D \\ 0 & N & 3+N \\ D & -M & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} D & M-N & -D \\ N & 2N & 3+M \\ -D & M & M+N \end{vmatrix}$.

3. Привести определитель к диагональному виду и вычислить

$$\begin{vmatrix} M & 3 & 1 & N \\ 0 & -N & 0 & 3 \\ D & M & 1 & 0 \\ 1 & D & -1 & D \end{vmatrix}.$$

1.9. Контрольная работа № 1

Задан определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & N & 4 & N \\ -3 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Найти:

1) минор M_{13};
2) алгебраическое дополнение A_{23};
3) вычислить определитель, разложив по четвертому столбцу;
4) вычислить определитель, приведя к треугольному виду;
5) вычислить определитель, приведя его к диагональному виду.

2. Матрицы

2.1. Определение матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Размер матрицы – $m \times n$. Обозначаются матрицы большими латинскими буквами $A, B, A_{m \times n}$. Элементы матриц обозначаются маленькими буквами: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Пример. Задана матрица A:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.2. Виды матриц

1) Матрица размером $1 \times n$ называется матрицей-строкой.

2) Матрица размером $m \times 1$ называется матрицей-столбцом.

3) Матрица размером $m \times m$ называется квадратной порядка *m*. Для такой матрицы можно составить определитель, состоящий из элементов матрицы.

Если определитель такой матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

Пример. Для матрицы $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ найти определитель.

Решение: определитель матрицы равен: $\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7.$

4) Матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной.

5) Матрица, элементами которой являются нули, называется нуль-матрицей *O*.

6) Квадратная матрица, элементы которой задаются по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_{ij}, & i = j, \end{cases}$$, называется диагональной.

7) Диагональная матрица размером $m \times m$, элементы которой

задаются формулой $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$, называется единичной и обозначается *E*.

8) Матрицы одного размера $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называются равными, если их соответствующие элементы равны ($a_{ij} = b_{ij}$).

9) Противоположной для матрицы A называется матрица тех же размеров $(-A)$, определенная следующим образом: $(-a_{ij}) = -(a_{ij})$.

2.3. Операции над матрицами

1) Сложение матриц.

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{8}$$

Свойства:

1. $A+B=B+A;$
2. $(A+B)+C=A+(B+C);$
3. $A+O=O+A=A;$ O - нулевая матрица;
4. $A+(-A)=(-A)+A=O.$

2) Умножение матриц на число.

При умножении матрицы A на число α получается матрица $C = \alpha \cdot A$ того же размера, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}. \tag{9}$$

Свойства:

1. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A;$
2. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B;$
3. $-1\cdot A=-A;$
4. $1\cdot A=A;$
5. $O\cdot A=A\cdot O=O;$
6. $\alpha\cdot O=O.$

3) Умножение матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\cdot b_{hj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \tag{10}$$

т. е. определяется сумма произведений соответствующих элементов i – строки матрицы A на соответствующие элементы j – столбца матрицы B. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства:

1. $A\cdot B\neq B\cdot A;$
2. $(A\cdot B)C=A(B\cdot C);$
3. $E\cdot A=A\cdot E=A;$
4. $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m}.$

Если выполняется условие $A\cdot B=B\cdot A,$ то матрицы A и B называются перестановочными.

Пример. Выполнить действия с матрицами $2A+3B;$ $A\cdot B+E$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 8 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 12 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим матрицы на числа:

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 16 & -4\end{pmatrix},\quad 3B=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 36 & 15\end{pmatrix}.$$

Найдем сумму матриц

$$2A+3B=\begin{pmatrix}2-12 & 10+0\\ 16+36 & -4+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 10\\ 52 & 11\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $A\cdot B$:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 8 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 12 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+5\cdot 12 & 1\cdot 0+5\cdot 5\\ 8\cdot(-4)+(-2)\cdot 12 & 8\cdot 0+(-2)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56 & 25\\ -56 & -10\end{pmatrix}.$$

Найдем разность матриц

$$AB-E=\begin{pmatrix}56 & 25\\ -56 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55 & 25\\ -56 & -11\end{pmatrix}.$$

2.4. Транспонированная матрица

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если в матрице A строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1) $\left(A^T\right)^T=A$;

2) $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$;

3) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

4) $(AB)^T=B^T A^T$.

Пример. Построить транспонированную матрицу для матрицы

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: транспонированной является матрица: $A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для матрицы A, если справедливо следующее условие:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{11}$$

Необходимые условия существования обратной матрицы:

1) матрица A должна быть квадратной;

2) определитель матрицы A не равен нулю, т.е. матрица A должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. составить определитель матрицы A и вычислить его;
2. если $\det A = 0$, то обратная матрица не существует;
3. если $\det A \neq 0$, составить присоединенную матрицу $A_{пр}$, состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы A;
4. транспонировать присоединенную матрицу $A_{пр}$;
5. записать обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^T_{пр}$.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36.$$

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\,;\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 15\,;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9\,;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0\,;\quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3\,.$$

Составим присоединенную матрицу: $A_{np} = \begin{pmatrix} -6 & 24 & -18 \\ 4 & -12 & 15 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Транспонируем матрицу A_{np} : $A_{np}^{T} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 9 \\ 24 & -12 & 0 \\ -18 & 15 & -3 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 9 \\ 24 & -12 & 0 \\ -18 & 15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений следует выполнить умножение: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

2.6. Ранг матрицы

Минором матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель, полученный вычеркиванием κ-строк и κ-столбцов. Минором может быть определитель любого порядка $k \le \min(m;n)$: $M^{k} = \Delta_k$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка.

Решение. Всего можно найти три минора:

$$M_1^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7;,\quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5;,\quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.\cdot$$

Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок не равного нулю минора. Обозначается ранг $rangA$ или $r(A)$. В примере миноры второго порядка не равны нулю, то $rangA = 2$.

Свойства ранга матрицы:

1) $rangA \le \min(m;n)$;

2) $rangA = 0$, если все элементы матрицы A равны нулю;

3) если $\det(A)_{m\times m} \ne 0$, то $rangA = m$.

2.7. Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров.

Пусть задана матрица $A_{3\times 4}$:

а) выбирается любой элемент матрицы, неравный нулю, и около него строится определитель второго порядка;

б) если построенный определитель не равен нулю, то около него строится определитель третьего порядка;

в) если все определители третьего порядка равны нулю, и миноры большего порядка построить нельзя, то $rangA = 2$, если найдется хотя бы один определитель третьего порядка не равный нулю, то $rangA = 3$

2. Метод элементарных преобразований матриц.

Теорема: ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарные преобразования матриц:

1) отбрасывание строки, состоящей из нулей;

2) умножение элементов строки на любое число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк;

4) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на любое число, не равное нулю;

5) транспонирование матрицы.

После элементарных преобразований матрицу приводят к матрице трапецеидального вида.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ найти ранг матрицы обоим методами.

Решение. Первый метод. Найдем миноры первого, второго и третьего порядков, выстраивая их около первого члена матрицы:

$$M_1^1 = 2; \quad M_1^2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad M_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -73.$$

Следовательно, $rangA = 3$.

Второй метод. Приведем матрицу к трапецеидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -11 & 22 & -8 \\ 0 & -7 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

Протокол действий:

1) переставили первый и четвертый столбцы местами;

2) от второй строки отняли четыре первых строки ($C_2 - 4C_1$);

3) от третьей строки отняли две первых (C_3 - $2C_1$);

4) из второго столбца вычли четвертый столбец.

Теперь легко найти неравный нулю минор максимального порядка и ранг матрицы: $rangA = 3$.

2.8. Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований

Элементарные преобразования матриц можно использовать для получения обратных матриц, присоединяя к данной матрице единичную матрицу: $(A|E) \approx (E|A)$.

Пример. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Используем метод элементарных преобразований, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1/9 & -2/9 & 1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/6 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right).$$

Протокол действий:

1) элементы второй строки умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой;

2) от второй строки отнимем две первых строки (C_2-2C_1);

3) поделим вторую строку на 9 и третью строку на 2;

4) от третьей строки отнимем вторую строку (C_3-C_2);

5) поделим третью строку на 4/3;

6) из второй строки вычтем третью, умноженную на 2/3 (C_2-2/3C_3);

7) к первой строке прибавим три вторых строки и одну третью (C_1+3C_2+C_3).

В результате получили обратную матрицу:

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{|ccc} 5/12 & -1/6 & -3/8 \\ 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -9 \\ 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.9. Упражнения

1. Выполнить действия:

1) $A+3B-2C$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2) $AB+CB$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) AB-E и BA-E, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

4) -5A+BC-E, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

5) ABC+2E, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6) $(A)^{T}$-BC, если $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 2 \\ 1 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7) AE-EA+AB, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 11 & 20 & 3 \\ 54 & 17 & -6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -5 & 1 & 30 \\ 4 & 4 & 61 \end{pmatrix}$.

8) $(A+3B)$-$3(E+AB)$, если $A=\begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

9) AB+CB-AC, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу A^{-1} и проверить выполнение условия

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Найти обратную матрицу для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; 3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$;

4) $D = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -5 \\ 11 & 30 & -3 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $F = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 0 \\ 10 & 5 & 30 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix}$; 6) $G = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$;

7) $N = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 17 \\ 3 & 13 & 14 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $L = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; 9) $K = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$;

10) $S = \begin{pmatrix} 45 & 14 \\ 31 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $R = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; 12) $H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$;

13 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 14) $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 15) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Проверить являются ли матрицы A и B перестановочными, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 3\\ 3 & -4 & 0 & 2\\ 2 & 7 & 5 & 3\\ 5 & 3 & 5 & 5\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}10 & 2 & 4 & 3\\ 8 & 0 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 0 & 5\\ 4 & -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 0 & 1\\ 6 & 11 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

4) $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 5) $Y=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 10\end{pmatrix}$; 6) $R=\begin{pmatrix}6 & 8 & 4\\ -1 & 10 & 3\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

7) $H=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 21 & 3\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$; 9) $S=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1\\ 6 & 5 & 9 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 6 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

6. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 11\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

5) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2 & -7\\ 8 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

2.10. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента, A, B, C - матрицы:

1) Вычислить *NA+MB-(M+N)C-E*, если заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-M & 1\\ 3 & 2N\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}D & N\\ -M & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2M & -(N+M)\\ 3D & -NM\end{pmatrix}.$$

2) Найти значение выражения *N(ABC)+M(BC)+DE*, если заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}M & 5\\ 3 & -N\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & D & 5N\\ N & M & 2D\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-M & D\\ N & 5N\\ 3M & -4\end{pmatrix}.$$

3) Найти обратную матрицу к матрицам:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}N & M & 1\\ D & 2 & -M\\ 1 & -N & 4\end{pmatrix};\ \text{б) } B=\begin{pmatrix}N & D\\ -M & 6\end{pmatrix}.$$

4) Методами преобразования матриц найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2M & N & 3-D\\ 3+N & 2+N & 0 & D\\ 2 & 5 & 1 & D+3\\ 5-M & 2+M & M & 1\end{pmatrix}.$$

5) Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix}2N & 3 & 1\\ 1+N & M & 3+N\\ 5-M & 1 & D\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}M & 1 & D\\ D & 2N & N\\ 2+N & 3M & 1\end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 1 & N & D\\ 2 & 1 & M\end{pmatrix}\cdot X\begin{pmatrix}M & N & D\\ 2 & 6 & 0\\ N & D & M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0 & 2D\\ -N & M & 0\\ M & -4 & N\end{pmatrix}.$$

6) Найти ранг матриц:

а) $A=\begin{pmatrix} -N & MN & 1+N \\ D+6 & 2-M & -M \\ M & -N & 4+D \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2D & M & N-1 \\ D-1 & 2 & -M-1 \\ D & -NM & M+D \end{pmatrix}$.

2. 11. Контрольная работа № 2

1. Задана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & N+M & 5 \\ 7 & N & -M \\ 1 & -D & 2 \end{pmatrix}$.

Найти обратную матрицу.

Вычислить матрицы: $B = A\cdot A^T; C = 2A + B - E.$

2. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & -N & M \\ N & 2 & 4 \\ M & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решение систем линейных уравнений

3.1. Общие сведения

Системой ***m*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (12)$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены, x_i – неизвестные.

Если система (12) имеет решение, то она называется совместной. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Если система (12) имеет единственной решение, то она называется определенной. Если система имеет множество решений, она называется неопределенной.

Если все свободные члены системы (12) равны нулю, система называется однородной. Такая система всегда совместна, имеет тривиальное решение – нулевое.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

1) коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{2m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

2) неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$, 3) свободных членов $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тогда система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A\cdot X=B. \tag{13}$$

Вопрос о совместности системы помогает решить теорема Кронекера-Капелли.

Теорема: Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $rang(A)=rang(A|B)$.

Матрица $(A|B)$ называется расширенной матрицей системы.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

При условии $rang(A)<m$ уравнения системы зависимые. При условии $rang(A)=m$ уравнения системы независимые.

Пусть $rang(A)<n.$ Переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ называются базисными, основными, если базисный минор (определитель из коэффициентов при этих переменных) не равен нулю. Их число равно $rang(A).$ Число базисных решений меньше числа сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \; (r < m).$$

Остальные $(n-r)$ неизвестных называются не основными (свободными). Свободным переменным в решении могут присваиваться следующие значения:
1) $C=0$ для базисных решений;
2) $C=C_i$ для общего решения;
3) C равно строкам единичной матрицы для фундаментального решения.

3.2. Методы решения систем линейных уравнений

1**)** Метод Крамера.

Теорема Крамера: Пусть Δ - главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных; Δ_j – определители, полученные из главного, заменой j –того столбца этого определителя столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое равенствами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

Формула (14) называется формулой Крамера.

Исследование наличия решения системы:
а) если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение;
б) если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей для неизвестных не равен нулю, то система не имеет решения;
в) если $\Delta = 0$ и все определители для неизвестных равны нулю, то система имеет множество решений.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение: найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26 \cdot$$

Составим определители для неизвестных и вычислим их:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 26;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 26.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$.

2) Метод обратных матриц.

Систему линейных уравнений (12) представим в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Найдем решение уравнения: $A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B; \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Решение системы можно записать так:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{15}$$

Пример. Найти решение системы уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение: введем матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Определитель матрицы A уже найден: $\det(A) = 26.$ Следовательно, обратная матрица существует. Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 10 & 4 \\ -5 & -11 & -7 \\ -13 & -13 & -13 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу X:

$$X = A \cdot B = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 10 & 4 \\ -5 & -11 & -7 \\ -13 & -13 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 56-10-20 \\ -20+11+35 \\ -52+13+65 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 1$.

3**)** Метод Гаусса.

Метод Гаусса иначе называется методом исключения переменных. Метод основан на преобразовании системы уравнений с использованием преобразований, называемых гауссовыми.

К преобразования Гаусса относятся следующие действия:

а) можно менять уравнения системы местами;

б) умножать уравнение на любое число, не равное нулю;

в) к любому уравнению, умноженному на число, не равное нулю, можно прибавлять другое уравнение, умноженное на любое число, не равное нулю.

Суть метода Гаусса:

1) в системе выбираем уравнение, в котором имеется неизвестное с ненулевым коэффициентом (лучше выбирать коэффициент 1). Это уравнение объявляем ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению, называем главным.

2) ведущее уравнение ставим на первое место и с помощью преобразований Гаусса исключаем главное неизвестное из остальных уравнений;

3) данную процедуру применяем к следующим уравнениям.

Пример. Найти решение системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде расширенной матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов; используя преобразования Гаусса, приведем матрицу к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{17}{7} \end{array}\right).$$

Теперь вычислим неизвестные:

$$x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}x_3 = 1, \quad x_1 = 3 - 3x_2 + x_3 = 1 \cdot$$

Ответ: $x_1 = 1;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 1.$

В результате исключения неизвестных последнее уравнение может иметь вид:

1) $a^* x_n = b^*$, то система имеет единственное решение;

2) $0 \cdot x_n = b^*$, то система не имеет решения;

3) $0 \cdot x_n = 0$, то система имеет множество решений.

Пример. Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ \qquad x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Система имеет три уравнения и четыре неизвестных. Выполним преобразования матрицы коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы коэффициентов $r(A) = r(A/B) = 2$. Следовательно, одну строку можно отбросить.

Получим систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ \qquad x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Найдем число базисных решений: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6.$

1) Пусть базисными будут x_1 и x_2: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2 \neq 0$, $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ \qquad x_2 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ x_2 = 2 \end{matrix} \quad .$$

Тогда первое базисное решение будет иметь вид $\left(-\dfrac{1}{2}; 2; 0; 0\right)$.

2) Пусть базисными будут x_2 и x_3: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $x_1 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_2 = \dfrac{3}{2}, \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{matrix} \quad .$$

Тогда второе базисное решение будет иметь вид $\left(0; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 0\right)$.

3) Пусть базисными будут x_3 и x_4: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1; \\ -x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = 1, \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Тогда третье базисное решение будет иметь вид $(0; 0; 0; 1)$.

4) Пусть базисными будут x_1 и x_3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $x_2 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1; \\ \qquad -x_3 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = -2, \\ x_1 = \dfrac{3}{2} \end{matrix}$$

Тогда четвертое базисное решение будет иметь вид $\left(\dfrac{3}{2}; 0; -2; 0\right)$.

5) Пусть базисными будут x_1 и x_4: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 1; \\ \qquad 2x_4 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

Пятое базисное решение будет иметь вид $(0; 0; 0; 1)$.

6) Пусть базисными будут x_2 и x_4: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $x_1 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 1; \\ x + 2x_4 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Шестое базисное решение будет иметь вид $(0;0;0;1)$.

Ответ: получили шесть базисных решений:

$$\left(-\frac{1}{2};2;0;0\right),\ \left(0;-\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right),\ (0;0;0;1),\ \left(\frac{3}{2};0;-2;0\right),\ (0;0;0;1),\ (0;0;0;1).$$

3.3. Решение систем однородных линейных уравнений

Система из m линейных уравнений с n неизвестными при нулевых свободных членах называется однородной

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Система (16) всегда совместна, она имеет тривиальное решение $(0,0,...0)$.

Система (16) имеет нетривиальное решение, если

1) $m < n;$
2) $m = n,\ \Delta A = 0.$

Эти условия аналогичны выполнению условия $rangA < n.$

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – решение системы уравнений (16). Запишем это решение в виде строки $e = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Свойства решений:

1) если строка $e = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ – решение системы (16), то выражение $\lambda e = \left(\lambda x_1^0; \lambda x_2^0; ...; \lambda x_n^0\right)$ является решением этой системы, λ – некоторое число, неравное нулю;

2) если $e = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ и $e_1 = \left(x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*\right)$ решения системы (16), то при любых C_1 и C_2 их комбинация тоже является решением системы:

$$C_1 e + C_2 e_1 = \left(C_1 x_1^0 + C_2 x_1^*; C_1 x_2^0 + C_2 x_2^*; ...; C_1 x_n^0 + C_2 x_n^*\right).$$

Выражение $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ называется линейной комбинацией решений системы.

Если $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ одновременно не равные нулю, то строки (решения) $e_1, e_2, ..., e_n$ называются линейно зависимыми.

Если $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0$ только при $\lambda_i = 0$, то решение $e_1, e_2, ..., e_m$ называются линейно независимыми.

Система линейно независимых решений $e_1, e_2, ..., e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (16) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, ..., e_k$.

Если $rangA < r,$ то фундаментальная система решений (16) состоит из $(n-r)$ решений.

Общее решение системы (16) имеет вид:

$$C_1 e_1 + C_2 e_2 + ... + C_k e_k, \ e_1, e_2, ..., e_k. \tag{17}$$

Такое решение называется фундаментальной системой решений, где $C_1, C_2, ..., C_к$ - производные числа $(k = n - r)$.

Пример. Решить систему уравнений и найти фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & -9 & -14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $rangA = 2$. Следовательно, за базисный минор можно взять любой минор второго порядка.

1) Пусть базисный минор состоит из коэффициентов переменных

$$x_3; x_4 : \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2.$$

$x_3;x_4$ - основные переменные; $x_1;x_2$ – неосновные переменные. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ \qquad\qquad 4x_3+6x_4=0. \end{cases} \qquad k=4-2=2.$$

Для получения фундаментального решения e_1,e_2 поочередно заменяем неосновные переменные $x_1;x_2$ элементами строк единичной матрицы $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1) $x_1=1; x_2=0$ $\begin{cases}1-x_3-2x_4=0,\\ \quad 4x_3+6x_4=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=2\\ x_3=-3\end{cases}$ $e_1=(1,0,-3,2)$

2) $x_1=0; x_2=1$ $\begin{cases}1-x_3-2x_4=0,\\ \quad 4x_3+6x_4=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=2\\ x_3=-3.\end{cases}$ $e_2=(0,1,-3,2)$

Ответ: фундаментальная система решений $\begin{cases}e_1=(0;1;-3;2),\\ e_2=(1;0;=3;2).\end{cases}$

3.4. Упражнения

1. Решить системы уравнений методами Крамера и обратной матрицы:

1) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=2;\\ -x_1+4x_2+x_3=4;\\ 2x_1+5x_2-3x_3=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x_1-x_2+5x_3=8;\\ -x_1+3x_2-2x_3=0;\\ x_1+8x_2+2x_3=11.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x_1-7x_2+x_3=4;\\ 6x_1+x_2-5x_3=8;\\ 3x_1+2x_2+x_3=9.\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3=7;\\ -3x_1+x_2-7x_3=-11;\\ 7x_1+2x_2-3x_3=15.\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=12;\\ -x_1+x_2-x_3=-2;\\ 2x_1+8x_2-9x_3=2.\end{cases}$ 6) $\begin{cases}6x_1-x_2+2x_3=10;\\ 4x_1+x_2-14x_3=20;\\ x_1+5x_2-x_3=-7.\end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -5; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 27; \\ -3x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 27; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 =; 6; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 11; \\ 8x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 31. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 15; \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20; \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 17. \end{cases}$

3. Найти фундаментальную систему решений:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 7x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

4. Найти все базисные решения системы уравнений

1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2; \\ x_1 + 13x_2 - 6x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 = 7; \\ 4x_1 - 2x_3 + x_4 = 5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 12; \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 9. \end{cases}$

5. При каком параметре λ прямые пересекаются в одной точке:

1) $2x - 3y = 6,\ 3x + \lambda y = 9,\ \lambda x + 4y = 3;$

2) $2x - \lambda y = 6,\ x + \lambda y = 4,\ x - 5y = 5.$

В обоих случаях построить эти прямые.

3. 5. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента:

1) Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $$\begin{cases} Nx_1 - Mx_2 + Dx_3 = N + M; \\ -Mx_1 + 4x_2 - Nx_3 = 4D; \\ (2+M)x_1 + 5x_2 - (3-N)x_3 = 3M. \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} Dx_1 - 2Nx_2 = M; \\ Mx_1 + 3Nx_2 = D. \end{cases}$$

2) Решить систему методом обратной матрицы:

а) $$\begin{cases} (M-4)x_1 + 2x_2 + Nx_3 = 2D; \\ (M+2)x_1 + Nx_2 + Mx_3 = -D; \\ Mx_1 + Nx_2 - 3Dx_3 = -NM. \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} (N+2M)x_1 + Dx_2 = 5N; \\ MDx_1 - 2Nx_2 = DN. \end{cases}$$

3) Решить систему методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} Nx_1 + Mx_2 + Dx_3 - x_4 = 6M; \\ x_1 - 2Nx_2 - Dx_3 - Mx_4 = -6; \\ Mx_1 + Nx_2 + x_3 + Dx_4 = 10; \\ Dx_1 + x_2 - Mx_3 + Nx_4 = D. \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} Dx_1 + (M+N)x_2 + 3x_3 - x_5 = 0; \\ Mx_1 + Nx_2 + Dx_4 - (M+D)x_5 = 0; \\ -Mx_1 + x_3 + Nx_4 + Dx_5 = 0; \\ x_1 + Mx_2 - Dx_3 + (2+N)x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3.6. Контрольная работа № 3

1. Решить систему уравнений тремя способами: методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом.

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + (3+2M)x_3 = 2M + 1; \\ (2-N)x_1 + Dx_2 + 2x_3 = -N + D; \\ x_1 + x_2 - 3Dx_3 = -3D - 2. \end{cases}$$

2. Решить систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + Nx_2 + x_3 - Dx_4 = 0; \\ Nx_1 - 2Mx_2 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ Mx_1 + Nx_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ Dx_1 + x_2 - Mx_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Определить сколько решений имеет система уравнений при определенных значениях параметра λ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - Nx_4 = M; \\ Nx_1 + 3x_2 + Dx_3 - 3x_4 = \lambda; \\ x_1 + Nx_2 + Mx_3 + x_4 = 3; \\ Mx_1 + Dx_2 - x_3 + 2x_4 = D. \end{cases}$$

4. Использование матриц, определителей и систем уравнений в экономике

4.1. Использование матриц в экономике

Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 и использует для этого три вида сырья S_1, S_2, S_3. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны план выпуска каждой продукции и стоимость единицы каждого типа сырья (в руб., табл.1).

Пусть матрица A – матрица нормы расхода сырья на производство продукции $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Матрица $C = (C_1\ C_2\ C_3)$ - матрица плана выпуска продукции.

Матрица $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ - матрица стоимости единицы каждого вида сырья.

Таблица 1

Сырье / Продукция	S_1	S_2	S_3	План выпуска
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3
Стоимость ед. сырья	b_1	b_2	b_3	

Используя матричное исчисление, можно найти:

1) матрицу затрат сырья $S_{13} = C_{13} \cdot A_{33}$,

2) общую стоимость сырья $Q_{11} = S_{13} \cdot B_{13}^T$,

3) матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции $R_{31} = A_{33} \cdot B_{31}$.

Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья (табл. 2).

Таблица 2

Продукция	Производительность		Затраты сырья			План выпуска продукции
	I предпр.	II предпр.	S_1	S_2	S_3	
P_1	P_{11}	P_{12}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
P_2	P_{21}	P_{22}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
P_3	P_{31}	P_{32}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3
	Кол-во рабочих дней		Цена вида сырья			
	t_1	t_2	b_1	b_2	b_3	
			Стоимость доставки сырья			
			d_1	d_2	d_3	

Можно найти:

1) годовую производительность предприятий по каждому виду изделий:

2) дневной расход по типам сырья на предприятиях;

3) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

4) годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья.

Составим матрицу производительности каждого предприятия по используемым видам сырья:

$$П = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}$$

Тогда годовую производительность предприятий по каждому виду изделий найдем в виде матрицы:

$$
\Pi_{год} = \begin{pmatrix} t_1 p_{11} & t_2 p_{12} \\ t_1 p_{21} & t_2 p_{22} \\ t_1 p_{31} & t_2 p_{32} \end{pmatrix};
$$

Введем матрицу затрат на единицу продукции: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Дневной расход по типам сырья на предприятиях найдем как произведение матрицы затрат на матрицу производительности:

$$
S = A \cdot \Pi .
$$

Годовая потребность сырья каждым предприятием найдется как

$$
S_{год} = A \cdot \Pi_{год} .
$$

Суммы кредитования предприятий для закупки сырья можно определить как компоненты матрицы стоимости общего годового запаса сырья для каждого предприятия $P = C \cdot S_{год}$.

4.2. Использование систем линейных уравнений

Задачи о прогнозе выпуска продукции по запасам сырья. Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 и использует для этого три вида сырья S_1, S_2, S_3. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны запасы каждого типа сырья (табл.3) .

Таблица 3

Сырье / Продукция	S_1	S_2	S_3
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
Общий запас сырья	b_1	b_2	b_3

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица норм расхода сырья S_j

каждым предприятием на производство i – продукции P_i, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ – матрица запасов сырья S_j.

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Пусть x_1, x_2, x_3 - объемы выпуска продукции. Тогда при условии полного расходования запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения (уравнения):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2; \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

4.3. Многоотраслевая экономика. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

Многоотраслевое хозяйство требует баланса между отдельными отраслями экономики. Каждая отрасль является и потребителем, и производителем. Возникает непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.

Впервые эта проблема была выдвинута в 1936 году в трудах американского экономиста, выходца из России, лауреата Нобелевской премии, Василия Васильевича Леонтьева (1906-1999). Данная задача известна как математическая модель Леонтьева.

Модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа. Метод «выпуск-затраты» широко применяется в практике прогнозирования и программирования экономики.

Пусть имеется n отраслей экономики, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутренние нужды отраслей и потребление продукции другими отраслями, часть продукции предназначена для личного и общественного потребления (вне сферы материального производства).

Пусть x_i - общий (валовой) объем продукции i-ой отрасли $(i = 1, 2, ..., n)$, x_{ij} - объем продукции i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью в процессе производства $(i, j = 1, 2, ..., n)$, y_i - объем конечного продукта i-ой отрасли для непроизводственного потребления. Тогда валовой объем продукции i-отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad \left(i = 1, 2, ..., n\right) \tag{18}$$

Уравнение (18) называется соотношениями баланса.

Если все величины уравнения (18) имеют стоимостное выражение, то уравнения (18) называют стоимостный межотраслевой баланс.

Назовем коэффициентами прямых затрат продукции i-отрасли на производство единицы продукции j-отрасли выражение:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ \left(i, j = 1, 2, ..., n\right) \tag{19}$$

Если предположить, что в течение некоторого времени (месяц, квартал, год) коэффициенты a_{ij} будут постоянны и зависеть только от сложившейся технологии производства, то зависимость материальных затрат, от валового выпуска будет линейной, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j\,. \tag{20}$$

Поэтому модель межотраслевого баланса называется линейной и пишут:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \ \left(i = 1, 2, ..., n\right) \tag{21}$$

Введем векторы:

1) вектор валового выпуска - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$,

2) вектор конечного продукта - $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$.

Введем матрицу прямых затрат $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение баланса в матричной форме может быть записано так:

$$X = AX + Y. \qquad (22)$$

Основная цель межотраслевого баланса: отыскать такое решение *X*, которое при известной матрице прямых затрат *A* обеспечит заданный вектор конечного продукта *Y*.

Найдем решение матричного уравнения:

$X - AX = Y; \qquad (E - A)X = Y.$

Если матрица $(E-A)$ не вырожденная, т.е. $\Delta(E-A) \neq 0$, то

$$X = (E-A)^{-1} Y. \qquad (23)$$

Матрица $S = (E-A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

Каждый элемент S_{ij} матрицы S - это величина валового выпуска продукции *i*-ой отрасли для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-ой отрасли. Значения $a_{ij}, x_i, y_i \geq 0$.

Решение уравнения (22) существует при условии, что матрица A продуктивна. Матрица A называется продуктивной, если для любого $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$. Модель Леонтьева в этом случае называется продуктивной.

Существуют разные критерии продуктивности матрицы A. Для решения задач будем использовать один из них: матрица A - продуктивна, если максимальная сумма элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы один из столбцов имеет сумму элементов строго меньше единицы, т.е. для $a \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (24)$$

и сумма элементов в столбце j меньше единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1. \qquad (25)$$

Пример. Заданы две отрасли. Нормы потребления и объемы выпуска продукции этими отраслями заданы в табл. 4.

Таблица 4

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	Y	X
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, второй отрасли на 20%.

Решение. Введем матрицы: потребления $X_{ij} = \begin{pmatrix} 100 & 160 \\ 275 & 40 \end{pmatrix}$,

валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}$ и конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 240 \\ 85 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат, оценим коэффициенты матрицы A:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{100}{500} = 0.2, \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{160}{400} = 0.4,$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{275}{500} = 0.55, \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{40}{400} = 0.1.$$

Матрица прямых затрат имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}$. Матрица

продуктивна (сумма по столбцам: 0,75 и 0,5).

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,55 & 0,9 \end{pmatrix}; \quad \Delta(E - A) = 0,72 - 0,22 = 0,5;$$

$$S = (E - A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Найдем новый вектор конечного продукта: $Y_н = \begin{pmatrix} 240 \cdot 2 \\ 85 + 85 \cdot 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix}$..

Вычислим необходимый объем валового продукта для матрицы $Y_н$:

$$X = SY = 2\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.55 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 945.6 \\ 691.2 \end{pmatrix}.$$

4.4. Упражнения

1. Пусть швейное предприятие выпускает три вида продукции юбки, блузки и платья, при этом использует три вида тканей: хлопок, лен, шелк. Нормы расхода каждого вида тканей на изготовление единицы продукции заданы в таблице. В ней же указаны план выпуска каждой продукции, стоимость единицы каждого вида тканей, стоимость доставки тканей на предприятие (табл. 5).

Таблица 5

Ткань / Изделие	Хлопок (м)	Лен (м)	Шелк (м)	План выпуска(шт.)
Юбка	2	1,5	1	100
Блузка	0,5	1	1,5	120
Платье	1	1	3	110
Стоимость ткани (руб./м)	70	110	250	
Стоимость доставки ткани (руб./м)	0,5	0,6	0,8	

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу затрат на перевозку тканей, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции.

2. Известно, что на предприятие завезли ткани в следующем объеме: хлопка – 530 м, льна – 345 м, шелка – 590 м. Найти план производства юбок, блузок и платьев, используя нормы расхода предыдущей задачи. Оценить общий доход предприятия, если известно, что предприятие реализует изготовленную продукцию по ценам: юбка – 700 руб., блузка – 800 руб., платье – 2000 руб.

3. Для производства печатных каталогов, буклетов и листовок предприятию требуется три вида сырья: бумага, краски, скрепки. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, стоимость сырья и готовой продукции заданы в табл. 6.

Таблица 6

Сырье / Изделие	Бумага	Краски	Скрепки	План выпуска(шт)
Каталог	6	5	3	100
Буклет	3	3	4	210
Листовка	2	4	2	300
Стоимость сырья (руб./усл.ед.)	10	20	0,1	
Запасы сырья (усл.ед.)	1420	1700	1160	

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции.

4. Используя запасы сырья и нормы расхода сырья на изготовление печатной продукции предыдущей задачи, найти план производства предприятия и его прибыль, если готовую продукцию предприятие собирается реализовывать по ценам: каталог – 50 руб., буклет – 2 руб., листовка – 1 руб.

5. Известны потребности и объемы выпуска продукции по трем отраслям, значения векторов конечного и валового продукта (табл. 7).

Таблица 7

Отрасли	Потребности отраслей			Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	3		
1	100	120	80	400	800
2	250	150	100	300	750
3	300	200	100	300	600

Найти необходимый объем выпуска продукции каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли не меняется, второй увеличивается на 20%, а третьей увеличивается на 30%.

6. Найти вектор конечного продукта трех отраслей, если потребности и вектор валового продукта заданы в табл. 8.

Таблица 8

Отрасль	Потребности отраслей			Конечный продукт
	1	2	3	
1	80	100	200	600
2	250	100	120	800
3	100	150	200	700

4.5. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры

N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья (табл. 9). Составить все матрицы задачи:

a) норм расхода сырья,

b) стоимости сырья, стоимости доставки сырья,

c) плана выпуска продукции предприятиями,

d) производительности труда на каждом предприятии.

Таблица 9

Продукция	Производительность		Затраты сырья			План выпуска продукции	Цена изделия
	Предприятие 1	Ппредприятие 2	S_1	S_2	S_3		
P_1	$D+5$	$2M$	2	5	3	$10N+10D$	120
P_2	$N+2$	$3D$	3	3	2	$20(M+N)$	310
P_3	$2M$	D	1	2	6	$NM-D$	180
	Кол-во раб. дней		Цена вида сырья				
	15	20	$2N$	$3M$	$2D$		
			Стоимость доставки сырья				
			2N	N+M	3M		

Найти:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) дневной расход по типам сырья на предприятиях;

4) годовую потребность сырья для каждого предприятия;

5**)** годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья;

6) матрицу затрат сырья;

7) общую стоимость сырья;

8) матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции;

9) объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья $S_1 \le 400$; $S_2 \le 500$; $S_3 \le 380$;

10) общий доход от выпускаемой продукции;
11) прибыль от производства и продажи изделий.

5. Векторы

5.1. Определение и начальные сведения о векторах

Любые две точки A,B определяют направленный отрезок, если точка A определяет начало, точка B – конец отрезка, направление задается от A к B.

Направленный отрезок называется вектором. Обозначается $\overrightarrow{AB}, \bar{a}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется длиной или модулем вектора, обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или принадлежат параллельным прямым, при этом векторы называются противоположно направленными ($\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$), если направление векторов противоположное, при совпадении направления векторов их называют сонаправленными ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$).

Векторы называются равными $\left(\bar{a} = \bar{в}\right)$, если они коллинеарные, одинаково направлены и их длины равны:

$$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}, \ |\bar{a}| = |\bar{b}|.$$

Векторы $\bar{a}, -\bar{a}$ называются противоположными, если они коллинеарные, противоположно направлены и их длины равны:

$$\bar{a} \uparrow\downarrow (-\bar{a}), \ |\bar{a}| = |-\bar{a}|.$$

Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

5.2. Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны два ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}$.

Суммой двух векторов $\overline{a}+\overline{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, который идет из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 3).

2. Вычитание векторов. Разностью векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{c} \Rightarrow \overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$ (рис. 4).

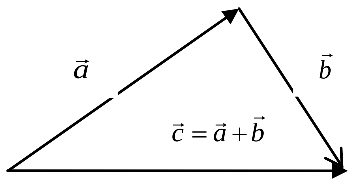

Рис. 3

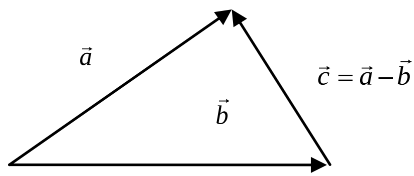

Рис. 4

При вычислении по правилу параллелограмма суммой векторов является диагональ, выходящая из общего начала этих векторов, а разностью векторов является диагональ, не имеющая общего начала с векторами $\overline{a}, \overline{b}$.

3. Умножение вектора на число. Произведением вектора $\overline{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\overline{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину равную $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ и тоже направление, что и вектор $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$ (рис. 5).

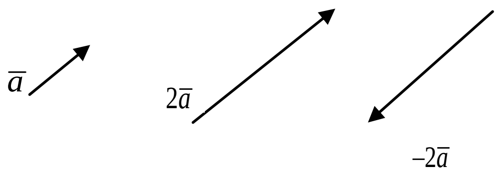

Рис. 5

Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым или нуль вектором: $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

Единичным вектором $\vec{a}$, или ортом, называется вектор, сонаправленный вектору $\vec{a}$, координаты которого получены делением координат вектора $\vec{a}$ на его длину: $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Любой вектор можно представить в стандартной форме: $\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\overline{e}.$

5.3. Основные свойства линейных операций над векторами

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ - переместительный закон;
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ - сочетательный закон сложения;
3. $\lambda(\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$ - сочетательный закон умножения;
4. $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$ - распределительный закон относительно суммы чисел;
5. $\lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ - распределительный закон относительно суммы векторов;
6. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;
7. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.
8. Теорема о коллинеарных векторах. Два ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$\overline{b} = k\overline{a}. \tag{26}$$

9. Теорема о компланарных векторах. Три ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной плоскости или один из них является линейной комбинацией двух других:

$$\overline{c} = k\overline{a} + l\overline{b}, \quad k, l \text{ - числа.} \tag{27}$$

Пример. Пусть заданы вектора $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$. Покажем, что они компланарны:

$$\overline{a} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) + \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b}) = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b} = \overline{a},$$

т. е. вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией двух других векторов.

5.4. Упражнения

1. По данным векторам $\vec{a}, \vec{b}$ построить векторы: 1) $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$; 3) $4\vec{a}+\vec{b}$; 4) $2(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}$.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$, $\overline{AA_1}=\vec{c}$. Постройте каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 5) $-\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

3. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$, точка M – точка пересечений диагоналей параллелограмма. Выразить через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ вектора $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$.

4. В треугольнике ABC: $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$, точка M – середина стороны BC. Выразить через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ вектор $\overline{AM}$.

5. В треугольнике ABC: $\overline{AM}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$, точка M – точка пересечения медиан треугольника. Выразить через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ вектора $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

6. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AK}=\vec{a}$, $\overline{AM}=\vec{b}$, точки K и M – середины сторон BC и CD параллелограмма. Выразить через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ вектора $\overline{BD}, \overline{AD}$.

7. В треугольнике ABC точка M – точка пересечения медиан треугольника, O - произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$.

8. В треугольнике ABC $\overline{AK}=\vec{a}$, $\overline{BM}=\vec{b}$ – медианы треугольника. Выразить векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ через вектора $\vec{a}, \vec{b}$.

9. Векторы $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ – медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\vec{0}$.

10. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

11. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами:

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{q} = \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{s} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

12. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$?

13. Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если: $\vec{c} = \vec{a} - 2\sqrt{3}\vec{b}$; $\vec{d} = -\sqrt{3}\vec{a} + 6\vec{b}$?

5.5. Проекция вектора на ось

Пусть задан вектор $\vec{a} = \overline{AB}$ и некоторая ось l. Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, точки пересечения с осью обозначим A', B' (рис. 6).

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длина $A'B'$ направленного отрезка $A'B'$ со своим знаком: $A'B' = \pm\left|\overline{A'B'}\right|$, где знак

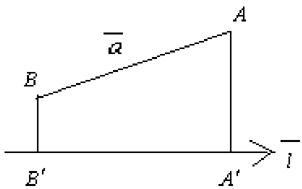

Рис. 6

«$\pm$» зависит от совпадения направления вектора $\overline{AB}$ и оси l или несовпадения.

Теорема. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна длине вектора $\bar{a}$ умноженной на косинус угла между вектором $\bar{a}$ и осью l:

$$np_l \bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cos\varphi \qquad (28)$$

Следствие 1: проекция вектора на ось: 1) положительная, если угол φ - острый; 2) отрицательная, если угол φ - тупой; 3) равна нулю, если угол прямой.

Следствие 2: проекции равных векторов на одну и ту же ось, равны:

$$\bar{a}=\bar{b} \Rightarrow np_l \bar{a}=np_l \bar{b}.$$

Теорема. Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$np_l(\bar{a}+\bar{b})=np_l \bar{a}+np_l \bar{b}$$

Теорема. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ, его проекция умножается на это же число, т.е.

$$np_l \lambda \bar{a}=\lambda np_l \bar{a}$$

5.6. Проекции вектора в прямоугольной системе координат

Пусть в пространстве задана система координат $XYZO$ и произвольный вектор $\overline{AB}$. Проекции *X*, *Y*, *Z* вектора $\overline{AB}$ на оси координат называются его координатами, при этом пишут: $\overline{AB}=\{X,Y,Z\}$

Теорема 6. Каковы бы ни были точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формулам:

$$X=X_2-X_1; \quad Y=Y_2-Y_1; \quad Z=Z_2-Z_1 \qquad (29)$$

Следствие 1: если $\overline{AB}$ выходит из начала координат, т. е. $x_1=y_1=z_1=0$, то координаты $\overline{AB}$ равны координатам его конца;

Следствие 2: $$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (30)$$

Следствие 3: Если $\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то

$$\bar{a}+\bar{b}=\{x_2+x_1;y_2+y_1;z_2+z_1\} \qquad (31)$$

Следствие 4: Если $\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, то $\lambda\bar{a}=\{\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1\}$ (32)

Следствие 5: Если $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, то $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}=\lambda$, (33)

т. е. векторы параллельны.

5.7. Направляющиеся косинусы вектора

Пусть дан произвольный вектор $\overline{a} = \{x; y; z\}$, выходящий из начала координат, не совпадающий с осями координат образующий с ними углы α, β, γ. Найдем длину вектора: $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В силу определения проекции вектора на ось получим:

$$X = np_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha ,$$
$$Y = np_y\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta , \qquad (34)$$
$$Z = np_z\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma .$$

Выразим косинусы углов, которые называются направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$
$$\cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} , \qquad (35)$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Основное свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

5.8. Разложение вектора по базису

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называется базисо**м** и любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:

$$\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 , \qquad (36)$$

где x_1, x_2, x_3 - координаты вектора $\vec{a}$ в базисе векторов ($\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$). В прямоугольной системе координат за базис выбирают единичные векторы осей координат: $\overline{i} \uparrow\uparrow OX$, $\overline{j} \uparrow\uparrow OY$, $\overline{k} \uparrow\uparrow OZ$, $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$. Тогда справедливая следующая теорема.

Теорема**.** Любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\overline{a} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j} + \gamma\overline{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ - числа.} \qquad (37)$$

Такое представление называется разложением по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, а вектор $\vec{a}$ имеет координаты (α, β, γ).

Пример. Записать разложение вектора $\overline{a} = \{1, 5, -3\}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Вектор будет иметь вид: $\overline{a} = \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

5.9. Упражнения

1. Дан тетраэдр *OABC*. Точки D и E середины ребер *OA* и *BC*, точка *F* - это точка пересечения медиан треугольника *ABC*.
В базисе из ребер *OA, OB, OC* найти координаты векторов $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{OF}$.

2. Дан правильный пятиугольник *ABCDF*. В базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ найти координаты следующих векторов: $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$.

3. Заданы три вектора

$$\vec{a} = (-1;\ 2;\ 1); \quad \vec{b} = (3;\ 1;\ 1); \quad \vec{c} = (-6;\ 3;\ -3); \quad \vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Вычислить: 1) длину вектора $\vec{a}$ и координаты его орта $\vec{a}^{\,0}$; 2) косинус угла между векторами $\vec{a}$; $\vec{j}$; 3) координаты вектора $\vec{d}$; 4) $\text{пр}_j\vec{d}$; $\text{пр}_k\vec{d}$; 5) $\text{пр}_j(\vec{a} + \vec{b})$.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;\ -2;\ 3)$; $B(3;\ 2;\ 1)$; $C(6;\ 4;\ 4)$. Найти координаты его четвертой вершины D.

5. Определить координаты точки N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = (3;\ -1;\ 4)$, если его начало совпадает с точкой $M(1;\ 2;\ -3)$.

6. Определить координаты точки M, с которой совпадает начало вектора $\vec{a} = (2;\ -3;\ -1)$, если его конец совпадает с точкой $N(1;\ -1;\ 2)$.

7. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 120°$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

8. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}(2;\ -1;\ 3)$ и $\vec{b}(-6;\ 3;\ -9)$.

Установить какой из векторов длиннее и во сколько раз.

9. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$ и его модуль равен 5.

10. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{d} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ и его модуль равен 27.

11. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ будут коллинеарными?

12. Даны векторы $\vec{a} = (2;\ 3)$; $\vec{b} = (1;\ -3)$; $\vec{c} = (-1;\ 3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$ будут коллинеарными?

13. Коллинеарные ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$, $\vec{b} = (3;\ 0;\ -1)$, если: 1) $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$;
2) $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -3\vec{a} + 2\vec{b}$?

14. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 15$.

15. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 7{,}5\vec{k}$, образует острый угол с осью OZ. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

16. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\overline{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overline{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\overline{OC} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Показать, что треугольник ABC равносторонний.

17. На оси OY найти точку N равноудаленную от точек $A(1;\ -4;\ 7)$ и $B(5;\ 6;\ -5)$.

18. На оси OX найти точку M, расстояние от которой до точки $A(3;\ -3)$ равно 5.

19. Векторы $\overline{AB} = (2;\ 6;\ -4)$ и $\overline{AC} = (4;\ 2;\ -2)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

20. Два вектора $\vec{a}=(2;-3;6)$ и $\vec{b}=(-1;2;-2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между этими векторами, если $|\vec{c}|=3\sqrt{42}.$

21. Найти вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}=7\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, если $|\vec{x}|=5\sqrt{6}.$

22. Могут ли векторы быть сторонами треугольника?

$$\vec{a}=(-2;1;-2),\ \vec{b}=(-2;-4;4),\ \vec{c}=(4;3;-2).$$

23. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-2;6)$, $B(2;8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2;2)$. Найти две другие вершины.

24. Даны вершины треугольника $ABC: A(1;-3),\ B(3;-5),\ C(-5;7).$ Определить середины его сторон.

25. Определить координаты вершин треугольника ABC, если известны середины его сторон: $K(-2;-4),\ M(6;1),\ N(-2;3).$

26. Определить координаты концов отрезка AB, который точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ разделен на три равные части.

27. Задан отрезок AB: $A(3;-2),\ B(6;4),$ который точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

28. Даны две точки $A(3;-1)$ и $B(2;-1)$. Определить координаты точки: 1) M, симметричной точке A относительно точки B, 2) N, симметричной точке B относительно точки A.

29. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;4),\ B(3;-9),\ C(-5;2).$ Найти длину медианы, проведенной из вершины B.

30. Даны вершины треугольника ABC: $A(3;-1;5),$ $B(4;2;-5),$ $C(-4;0;3).$ Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

31. Даны вершины треугольник ABC: $A(3;-2;1),$ $B(3;1;5),$ $C(4;0;3).$ Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

32. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;5),$ $B(1;-2),$ $C(4;7).$ Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

33. Даны вершины треугольника ABC: $A(3;-5),$ $B(-3;3),$ $C(-1;-2).$ Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

34. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-4; 1)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.

35. Даны вершины треугольника ABC: $A(3; -5)$, $B(1; -3)$, $C(2; -2)$. Найти длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B.

36. Даны вершины треугольника ABC: $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$, $C(-5; 2; -6)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

37. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что его длина $|\vec{a}| = 3$, а углы между вектором и координатными осями равны $\alpha = \beta = \gamma$.

38. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями OX, OY углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 120°$. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = 2$.

39. Радиус-вектор точки M составляет с осью OY угол $60°$, а с осью OZ угол $45°$, его длина $|\vec{r}| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

40. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.

41. Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями соответственно углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, найти его координаты.

42. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

43. Некоторый ненулевой вектор составляет с координатными осями OX, OZ углы: 1) $\alpha = 60°$, $\gamma = 60°$; 2) $\alpha = 120°$, $\gamma = 45°$. Какой угол он составит с осью OY?

44. Может ли ненулевой вектор $\vec{a}$ составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$;
2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60°$.

45. Даны векторы $\vec{e} = (-1; 1; -0{,}5)$ и $\vec{a} = (2; 2; -1)$.. Убедиться, что они коллинеарные и найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}$.

46. На плоскости заданы три вектора $\vec{e}_1 = (-1; 2)$, $\vec{e}_2 = (2; 1)$ и $\vec{a} = (0; -2)$. Убедиться, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Постройте заданные векторы.

47. На плоскости заданы четыре вектора $\vec{e}_1 = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (1;\ 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 1;\ 1)$ и $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$. Убедиться, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

48. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (2;\ -3)$, $\vec{q} = (1;\ 2)$. Найти разложение вектора $\vec{a} = (9;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{q}$.

49. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (3;\ 2)$, $\vec{q} = (2;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{a} = (4;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{q}$.

50. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = (3;\ -2)$, $\vec{b} = (-2;\ 1)$, $\vec{c} = (7;\ -4)$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базис два других.

51. Даны три вектора: $\vec{p} = (3;\ -2;\ 1)$, $\vec{q} = (-1;\ 1;\ -2)$, $\vec{r} = (2;\ 1;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11;\ -6;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$.

52. Определить разложение каждого из четырех векторов, принимая в качестве базис три других, если вектора имеют вид: $\vec{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c} = (2;\ 2;\ -1)$ и $\vec{d} = (3;\ 7;\ -7)$.

5.10. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}, \bar{b}$ называется число (скаляр) равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi , \tag{38}$$

или

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \tag{39}$$

Типичным примером скалярного произведения в физике является формула работы $A = F \cdot S\cos\varphi$, где F - сила, точка приложения которой перемещается на расстояние S.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;

2. $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$;

3. $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$;

4. $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$;

5. $\overline{a}\overline{b} = 0$, если $\overline{a}\perp\overline{b}$, и, обратно, $\overline{a}\perp\overline{b}$, если $\overline{a}\,\overline{b} = 0$.

Скалярное произведение можно находить в координатах. Справедлива теорема: если векторы $\overline{a},\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение определяется формулой:

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \ . \qquad (40)$$

Следствие 1: $\overline{a}\perp\overline{b}$, если $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. (41)

Следствие 2: $$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \ . \qquad (42)$$

Следствие 3: $$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (43)$$

Следствие 4: $$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}. \qquad (44)$$

5.11. Упражнения

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^{\,2}$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 4) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\vec{c}$ образует с каждым вектором угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы по $60°$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, найти модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

4. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$, вычислить $\vec{S} = \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

5. Определить при каком значении α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

6. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p};\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

7. Зная, что $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p};\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$, найти модуль вектора $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$.

8. Зная, что $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p};\vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$, найти модуль вектора $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$.

9. Зная, что $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$, вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$.

10. Зная, что $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$, вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.

11. Зная, что $|\vec{p}| = \sqrt{3}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p};\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$, вычислить угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$.

12. Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$ и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$.

13. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$.

14. Какой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

15. Векторы $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$ образуют треугольник ABC, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника ABC.

16. Вычислить $\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и угол между векторами равен 120°.

17. Даны векторы $\vec{a} = (3; -8; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; -5)$, $\vec{c} = (3; -4; 12)$. Найти: 1) $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$; 2) $\text{пр}_{(\vec{c}+\vec{b})}\vec{a}$..

18. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (\sqrt{2}; -3; -5)$ на ось, составляющую с осями координат OX и OZ углы $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а с осью OY - острый угол β.

19. Даны точки $A(3; 4; -2)$ и $B(2; 5; -2)$. Найти проекцию вектора AB на ось, составляющую с осями координат OX и OY углы $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, а с осью OZ - тупой угол γ.

20. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (4; -3; 2)$ на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.

21. Даны вершины треугольника $ABC: A(2; 3; -1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(1; 0; 2)$. Найти: 1) внутренний угол при вершине C; 2) $\text{пр}_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$.

22. Даны вершины треугольника $ABC: A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найти: 1) длины сторон; 2) внутренние углы; 3) острый угол между медианой BD и стороной AC.

23. Даны вершины треугольника $ABC: A(2; 3; -1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

24. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$, $D(2; 5; -4)$ есть квадрат.

25. При каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ будут взаимно перпендикулярны?

26. Найти угол между векторами $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

27. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 28$.

28. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

29. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен оси OZ и удовлетворяет условиям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$, $\vec{a} = (3; -1; 5)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$.

30. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$, $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; -2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$.

31. Найти косинус угла между диагоналями AC и CD четырехугольника, если заданы три его вершины $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$, $C(-3; 3; -3)$.

32. Какую работу производит сила $\vec{F} = (2; -1; -4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1; -2; 3)$ в точку $B(5; -6; 1)$.

33. Какую работу производит сила $\vec{F} = (3; -2; -5)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(2; -3; 5)$ в точку $B(3; -2; -1)$.

34. Найти работу равнодействующей сил $\vec{F}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{F}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ при перемещении ее точки приложения из начала координат в точку $M(2; -.1; -1)$.

35. Найти работу равнодействующей сил $\vec{F}_1 = (3; -2; 4)$, $\vec{F}_2 = (2; 3; -5)$, $\vec{F}_3 = (3; -4; 2)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(5; -3; -7)$ в точку $B(4; -.1; -4)$.

5.12. Векторное произведение векторов

Тройка векторов называется упорядоченной, если указано, какой из них читается первым, какой второй и т.д.

Упорядоченная тройка векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой (рис.7).

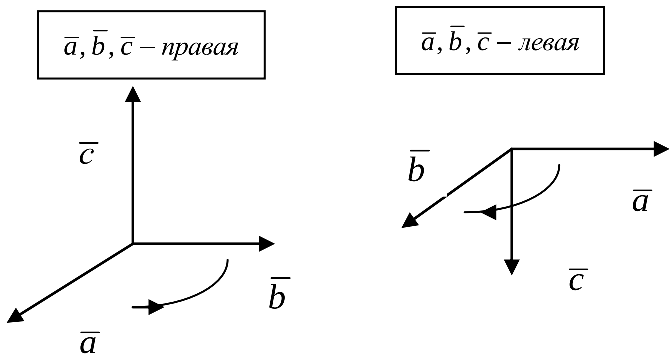

Рис. 7

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}, \overline{b}$ называется вектор $\overline{a} \times \overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. длина $\overline{a} \times \overline{b}$ равна произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\varphi \; ; \tag{43}$$

2. вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\overline{a}, \overline{b}$;

3. векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{a} \times \overline{b}$ образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

Основные свойства векторного произведения:

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (произведение векторов некоммутативно);
2. $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$ (из определения);
3. $\left(\lambda\overline{a}\right) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda\overline{b}\right) = \lambda\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$, т.е. скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения;
4. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{c}\right) + \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)$;
5. $\overline{a} \times \overline{b} = 0$, если $\overline{a}, \overline{b}$ - коллинеарные.

Векторное произведение можно найти в координатах, если векторы заданы в координатной форме. Справедлива теорема: если векторы $\overline{a}, \overline{b}$ заданы своими декартовыми координатами:

$\overline{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\overline{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ определяется формулой:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}. \qquad (44)$$

5.13. Упражнения

1. Упростить выражения:

1) $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(2\vec{b}+3\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b});$

2) $2\vec{i}\,(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}(\vec{i}\times\vec{j});$

3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a};$

4) $(8\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k});$

5) $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k});$

6) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b}).$

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ и $|\vec{a}|=1,$ $|\vec{b}|=2.$ Вычислить: 1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$; 3) $(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b}).$

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ и $|\vec{a}|=2,$ $|\vec{b}|=6.$ Вычислить: 1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; 2) $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b}).$

4. Зная, что $|\vec{a}|=10,$ $|\vec{b}|=2,$ $\vec{a}\vec{b}=12.$ Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$;

5. Зная, что $|\vec{a}|=10,$ $|\vec{b}|=2,$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=72.$ Вычислить $\vec{a}\vec{b}.$

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, зная, что $|\vec{a}|=2,$ $|\vec{b}|=4,$ вычислить: 1 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$; 2) $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b}).$

7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q},$ $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q},$ если $|\vec{p}|=4,$ $|\vec{q}|=3,$ угол между векторами $\vec{p}$

и $\vec{q}$ равен $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}.$

8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q},$ если $|\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = \sqrt{3},$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{6}.$

9. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q},$ если $|\vec{p}| = 5,\ |\vec{q}| = 5,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{4}.$

10. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2);\ \vec{b} = (1; 2; -1).$ Найти координаты следующих векторных произведений:

1) $\vec{a} \times \vec{b};$ 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b};$ 3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}).$

11. Даны векторы $\vec{a} = (2; 1; -3);\ \vec{b} = (1; -1; 1).$ Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}).$

12. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$ Вычислить: 1) $(\vec{a} \times \vec{b});$ 2) $(\vec{b} \times \vec{a});$ 3) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}).$

13. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$ Найти вектор $\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b})$ и его длину.

14. Найти площадь треугольника, заданного координатами своих вершин: 1 $A(1; 1; 1),$ $B(2; 3; 4),$ $C(4; 3; 2);$ 2) $A(1; 2; 0),$ $B(3; 2; 1),$ $C(-2; 1; 2);$ 3) $A(1; -2; 3),$ $B(0; -1; 2),$ $C(3; 4; 5).$

15. Найти площадь треугольника, построенного на векторах:
1) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k};$ 2) $\vec{a} = (-3; -1; 2);$ $\vec{b} = (2; 0; 1).$

16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:
1) $\vec{a} = -\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$ 2) $\vec{a} = (8; 4; 1);$ $\vec{b} = (2; -2; 1).$

17. Даны векторы $\vec{a} = (-4; -8; 8);$ $\vec{b} = (4; 3; 2).$ Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

18. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=(2;-2;1)$; $\vec{b}=(2;3;6)$.

19. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B.

20. При каких значениях α и β векторы $\vec{q}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$ будут коллинеарными, если $\vec{a}=(3;-1;1)$; $\vec{b}=(1;2;0)$?

21. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\beta\vec{j}+2\vec{k}$ будут коллинеарными?

22. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$ были коллинеарными?

23. Даны векторы $\vec{a}=(2;0;3)$; $\vec{b}=(-3;5;4)$; $\vec{c}=(3;4;-1)$. Найти проекцию вектора $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{q}=(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$.

24. Даны векторы $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;2;1)$; $\vec{c}=(2;-1;3)$; $\vec{d}=(3;-1;2)$. Найти проекцию вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}$ $\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{q}=(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{d}$.

25. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=(4;3;-1)$; $\vec{b}=(0;1;3)$ и образует с осью OY тупой угол и $|\vec{x}|=26$.

26. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=(2;-3;1)$; $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

27. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$; $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

28. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси OZ и к вектору $\vec{a}=(8;-15;3)$, образует острый угол с осью OX и $|\vec{x}|=51$.

29. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол и $|\vec{x}|=14$.

30. Найти единичный вектор $\vec{x}$,, перпендикулярный каждому из двух данных векторов: $\vec{a}=(3;-1;2)$; $\vec{b}=(-1;3;-1)$.

5.14. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b} \times \overline{c}$:

$$\overline{a}(\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} . \tag{45}$$

Свойства смешанного произведения:

1. $(\overline{a} \times \overline{b})\overline{c} = \overline{a}(\overline{b} \times \overline{c})$;

2.если векторы компланарны, то $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$; (46)

3. $\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = V,$ где V - объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

4. $\frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = V_{\Delta},$ где V_{Δ} - объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

Смешанное произведение в координатной форме можно вычислить, используя теорему: если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ заданы своими координатами $\overline{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\overline{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, то

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} . \tag{47}$$

5.15. Упражнения

1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку и $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\varphi = \left(\vec{a}\vec{b}\right) = 30^\circ$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 30^\circ$. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4. Вычислить произведение $\vec{b}(\vec{b} + 2\vec{c})(\vec{c} + \vec{a})$, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 5$.

5. Вычислить: 1) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{c} + \vec{a} - \vec{b})$;

2) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})$; 3) $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c})(2\vec{c} + \vec{b} + \vec{a})$;

4) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})(3\vec{c} + 4\vec{a} + \vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a})$.

6. Какую тройку образуют данные векторы:

1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$; 2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$;

3) $\vec{a} = (1; -4; 0)$; $\vec{b} = (6; 3; -2)$; $\vec{c} = (1; -2; 2)$;

4) $\vec{a} = (1; -1; 3)$; $\vec{b} = (-2; 2; 1)$; $\vec{c} = (3; -2; 5)$.

7. Проверить компланарны ли данные векторы:

1) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;

3) $\vec{a} = (1; 2; -2)$; $\vec{b} = (1; -2; 1)$; $\vec{c} = (5; -2; 4)$.

8. При каком λ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут компланарны:

1) $\vec{a} = (\lambda; 3; 1)$; $\vec{b} = (5; -1; 2)$; $\vec{c} = (-1; 5; 4)$;

2) $\vec{a} = (1; 1; \lambda)$; $\vec{b} = (0; 1; 0)$; $\vec{c} = (3; 0; 1)$;

3) $\vec{a} = (1; 2\lambda; 1)$; $\vec{b} = (1; \lambda; 0)$; $\vec{c} = (0; \lambda; 1)$.

9. Доказать, что четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости:

1) $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$;

2) $A(5; 7;\ -2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9; 4;\ 4)$, $D(1;\ 5;\ 0)$;

3) $A(3;\ 5;\ 1)$, $B(2;\ 4;\ 7)$, $C(1;\ 5;\ 3)$, $D(4;\ 4;\ 5)$.

10. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{a} = (1; -2; 1)$; $\vec{b} = (3; 2; 1)$; $\vec{c} = (1; 0; -1)$;

2) $\vec{a} = (2; 4; -3)$; $\vec{b} = (1; 4; 4)$; $\vec{c} = (3; 1; 2)$.

11. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, опущенную на грань, обра-

зованную векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

12. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=-3\vec{j}+\vec{k}$; $\overrightarrow{OC}=i2\vec{j}+5\vec{k}$.

13. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}=(1;2;3)$; $\vec{b}=(2;4;1)$; $\vec{c}=(2;-1;0)$.

14. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин: 1) $A(2;\ -3;\ 5)$, $B(0;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 2;\ 4)$;
2) $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

15. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D, если заданы координаты ее вершин: $A(5;\ 1;\ -4)$, $B(1;\ 2\ -1)$, $C(3;\ 3;\ -4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$.

16. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A, если заданы координаты ее вершин: $A(-5;\ -4;\ 8)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 1;\ -2)$, $D(6;\ 3;\ 7)$.

17. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=(4;3;0)$; $\overrightarrow{AD}=(2;1;2)$; $\overrightarrow{AA_1}=(-3;-2;5)$. Найти: 1) объем параллелепипеда; 2) площадь грани $ABCD$, 3) длину высоты, проведенной из вершины A_1; 4) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

18. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежат на оси ординат, а объем тетраэдра равен V:
1) $A(-1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 5;\ 2)$, $C(6;\ 32;\ 2)$, $V=29$;
2) $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 3;\ -3)$, $C(2;\ -1;\ 1)$, $V=2$;
3) $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$, $V=5$.

19. Даны вершины пирамиды $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(7;\ 6;\ 3)$, $D(4;\ -3;\ -1)$. Найти: 1) длины ребер AB, AC, AD; 2) площадь грани ABC; 3) угол между ребрами AC и AD; 4) объем пирамиды;
5) длину высоты, опущенной на грань ABC.

20. Заданы векторы $\vec{a}=(1;2;-2)$, $\vec{b}=(-2;3;1)$, $\vec{c}=(2;-2;2)$, $\vec{d}=(-1;3;5)$, $\vec{e}=(1;0;-2)$, $\vec{f}=(3;-2;2)$. $\vec{c}=(2;-1;0)$.
Найти $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})-(\vec{d}\times\vec{e})\times\vec{f}$.

5.16. Домашнее задание

Выполнить домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

Даны векторы $\vec{a} = N\vec{i} + M\vec{j} + (N+M)\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + (N+D)\vec{k}$; $\vec{c} = D\vec{i} - N\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти:

1) длины векторов;

2) углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

3) скалярные произведения для каждой пары векторов;

4) векторные произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

5) смешанное произведение векторов;

6) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

7) определить, какую тройку векторов образуют векторы $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$;

8) объем параллелепипеда, построенного на векторах $2\vec{c}, 3\vec{b}, N\vec{a}$; ,

9) высоту треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{m} = N\vec{a} + 2M\vec{b}$, $\vec{n} = D\vec{c} - M\vec{a}$, $\vec{p} = -3\vec{b} + M\vec{c}$;

10) разложить вектор $\vec{q} = (2N; -6; 10)$ по векторам $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$.

5.17. Контрольная работа № 4

1. Заданы четыре точки $A(M;\ N;\ D)$, $B(7;\ -3;\ N)$, $C(2;\ \mathrm{M};\ -3)$, $D(5;\ 8;\ N)$. Определить вид треугольника ABC, найти его площадь, косинусы внутренних углов, длину медиан AM, CK, объем пирамиды $ABCD$, ее высоту, опущенную из вершины D. Какими должны быть параметры β и γ, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{s} = (\beta;\ 4;\ \gamma)$ были коллинеарными? Найти единичный вектор для $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$. .

2. В ромбе $ABCD$ диагонали $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

3. Зная одну из вершин треугольника $A(1;\ -6;\ 3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overrightarrow{AB} = N\vec{i} + M\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + D\vec{j} - N\vec{k}$; найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.

4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 35$, где $\vec{a} = (3;\ N;\ -M)$, $\vec{b} = (5;1;\ D)$, $\vec{c} = (-3;\ 0;\ N)$.

5. Зная две стороны $\overrightarrow{AB} = (-3;\ -2;\ M)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;\ M;\ 4)$ треугольника ABC вычислить длину высоты, проведенную из вершины A.

6. *N*–мерный вектор и векторное пространство

6.1. Определение *N*–мерного вектора

N-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде: $\overline{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$, где x_i – i-тая компонента вектора. Например, в экономике используются векторы $\overline{x}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ - потребительская корзина, $\overline{y}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ - соответствующие цены товаров.

Два вектора называются равными $\overline{x} = \overline{y}$, если равны соответствующие компоненты $x_i = y_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

6.2. Операции над векторами

1. Сложение векторов.

Суммой векторов $\vec{x} + \vec{y}$ одной размерности называется вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, если его компоненты вычисляются по формуле: $z_i = x_i + y_i$

2. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\overline{x}$ на число λ называется вектор $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, компоненты которого вычисляются по формуле: $y_i = \lambda x_i$, при этом $\lambda > 0$ $\vec{y} \uparrow\uparrow \vec{x}$, $\lambda < 0$ $\vec{y} \uparrow\downarrow \vec{x}$.

Свойства операций:

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;

2) $\left(\overline{x} + \overline{y}\right) + \overline{z} = \overline{x} + \left(\overline{y} + \overline{z}\right)$;

3) $\alpha\left(\beta\overline{x}\right) = \left(\alpha\beta\right)\overline{x}$;

4) $\alpha\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y};$

5) $\left(\alpha+\beta\right)\overline{x}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x};$

6) $\overline{0}=\left(0,0,...,0\right)\Rightarrow\overline{x}+\overline{0}=\overline{x};$

7) $-\overline{x}$ - противоположный вектор, следовательно $\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{0};$

8) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}.$

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше свойствам, называется векторным пространством R.

Если под векторами $\overline{x}$, $\overline{y}$ рассматривать элементы любой природы, то такое множество образует линейное пространство.

6.3. Линейная зависимость векторов

Вектор $\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}$ векторного пространства R, если выполняется равенство

$$\vec{a}_n=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_{n-1}\vec{a}_{n-1}, \tag{48}$$

λ_i -любые числа.

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа λ_i, одновременно не равные равны, что справедливо равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n=0. \tag{49}$$

Если равенство (49) выполняется только при $\lambda_i=0$, то векторы называются линейно независимыми.

Теорема*:* если векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ - линейно зависимые, то хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов.

На плоскости два линейно независимых вектора – это не коллинеарные векторы. Тогда любой третий вектор можно представить в виде: $\vec{a}_3=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2$.

В пространстве три некомпланарных вектора можно считать линейно независимыми и любой четвертый представить в виде:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3+\lambda_4\vec{a}_4=0.$$

Свойства векторов линейного пространства:

1) если среди векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ имеется нулевой вектор $\bar{0}$, то эти векторы линейно зависимы;

2) если часть векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ линейно зависимы, то и все векторы линейно зависимы.

Пример. Проверим, являются ли векторы линейно зависимыми

$$\overline{a_1}=(1;-1;1;-1),\ \overline{a_2}=(1;0;1;0),\ \overline{a_3}=(1;-3;1;-3)?$$

Решение. Составим равенство: $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0$,

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0;\\-\lambda_1-3\lambda_3=0;\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0;\\-\lambda_1-3\lambda_3=0;\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-3\\1&1&1\\-1&0&-3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Пусть $\lambda_1=C$ $\quad\begin{cases}C+\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$,

$$C+3\lambda_3=0,\quad\lambda_3=-\frac{C}{3},\quad\lambda_2=-\frac{2C}{3}.$$

Система имеет множество решений $\left(C;-\dfrac{2}{3}C;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Следовательно, заданные векторы линейно зависимые.

6.4. Размеренность и базис векторного пространства

Векторное (линейное) пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ векторов – линейно зависимые.

n – называется размерностью пространства R и обозначается

$\dim(R)$. Например, R – плоскость, $\dim(R_2)=2$, R – трехмерное пространство, $\dim(R_3)=3$.

Множество n независимых векторов n-мерного пространства R называется базисом.

Пусть имеется n-мерное пространство R_n, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – базис R_n. Любой вектор $\vec{x}$ - линейно зависимый, следовательно,

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+...+\lambda_n\vec{e}_n+\lambda\vec{x}=0,$$

$$\overline{x}=\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{e}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{e}_2+...+\frac{\lambda_n}{\lambda}\vec{e}_n\ ,\ \lambda\neq 0 \tag{50}$$

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+...+x_n\overline{e_n}\ , \tag{51}$$

где $x_i=\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ - координаты вектора $\vec{x}$.

Выражения (50), (51) являются разложениями вектора $\overline{x}$ по базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$, $\vec{x}_i$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе. Такое разложение единственное.

Теорема: если $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов пространства R_n и любой вектор $\overline{a}$ линейно выражается через них, то пространство R является n-мерным и векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ являются его базисом.

Пример. Покажем, что следующие векторы образуют базис

$$\overline{a_1}=(1;1;1);\ \overline{a_2}=(1;2;3);\ \overline{a_3}=(1;3;3).$$

Решение: если $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ образуют базис, то они линейно независимы, следовательно $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=0$:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0;\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0;\\ \lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3=0;\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ - линейно-независимые векторы и составляют базис.

6.5. Переход к новому базису

Пусть пространство R имеет два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – старый; $l_1^*, l_2^*, ..., l_n^*$ - новый:

$$\begin{cases} \vec{l}_1^{\,*} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + ... + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{l}_2^{\,*} = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{2n}\vec{e}_n \\ ... \\ \vec{l}_n^{\,*} = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \tag{52}$$

Матрица коэффициентов этой системы называется матрицей перехода от старого $(\vec{e}_i)$ к новому $(\vec{l}_i^{\,*})$ базису:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Обратный переход от $(\vec{l}_i^{\,*})$ к $(\vec{e}_i)$ осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Пусть задан вектор $\overline{x}$. Запишем его в разных базисах:

1) в базисе $(\vec{e}_i)$ $\overline{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$ (в старом),
2) в базисе $(\vec{l}_i^{\,*})$ $\overline{x} = x_1^*\vec{l}_1^{\,*} + x_2^*\vec{l}_2^{\,*} + ... + x_n^*\vec{l}_n^{\,*}$ (в новом).

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ ... \\ x_n^* \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ ... \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \tag{54}$$

Пример. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ заданы векторы $\overline{a_1} = (1;1;0)$, $\overline{a_2} = (1;-1;1)$, $\overline{a_3} = (-3;5;-6)$ и $\overline{b} = (4;-4;5)$.

Выразить вектор $\overline{b}$ в базисе векторов $\overline{a_1}; \overline{a_2}; \overline{a_3}$.

Решение: а) Покажем, что $\overline{a_1}; \overline{a_2}; \overline{a_3}$ образуют базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

следовательно векторы образуют базис.

б) Выразим связь между базисами:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{a}_3 = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{матрица перехода } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

г) По формуле (47) найдем координаты $\bar{b}$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \frac{1}{2}\overline{a_1} + 2\overline{a_2} - \frac{1}{2}\overline{a_3}.$$

6.6. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство

Пусть заданы два вектора в пространстве R_n: $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Скалярным произведением двух векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ называется число, вычисляемое по формуле:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n. \qquad (55)$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,

2. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$,

3. $\lambda\vec{x} \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$, где λ - действительное число,

4. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, если $\vec{x} \neq 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, если $\vec{x} = 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = x^2$

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющих свойствам 1-4, называется евклидовым пространством.

Длиной (нормой, модулем**)** вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \,. \tag{56}$$

Свойства длины вектора:

1) $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$, λ - действительное число;

3) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ - неравенство Коши-Буняковского;

4) $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ - неравенство треугольника.

Угол между векторами определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \ 0 < \varphi < \pi \,. \tag{57}$$

Два вектора называются ортогональными**,** если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \quad \vec{x} \perp \vec{y} \,. \tag{58}$$

Вектор $\vec{e}$ называется единичным**,** если $|\vec{e}| = 1$.

Если единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ n-мерного евклидового пространства попарно ортогональны и норма каждого вектора равна 1, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис.

Теорема: Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Например, в трехмерном пространстве таким базисом является система векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

6.7. Упражнения

1. Определить, являются ли векторы $\vec{a}_1 = \{1; 3; 1; 3\}$, $\vec{a}_2 = \{-3; 1; -1; -1\}$, $a_3 = \{1; 2; 2; 1\}$ линейно зависимыми.

2. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{-1;-1;0\}$, $\vec{a}_2 = \{-1;1;-1\}$ $\vec{a}_3 = \{3;-5;6\}$. Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразить вектор $\vec{b} = \{4;5\}$.

3. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{3;5\}$, $\vec{a}_2 = \{1;2\}$. Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразите вектор $\vec{b} = \{4;5\}$.

4. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{1;2;4\}$ $\vec{a}_2 = \{1;-3;-1\}$ $\vec{a}_3 = \{1;1;5\}$. Найти вектор $\vec{b} = \{1;4;-1\}$ в этом базисе.

5. Найти длину вектора $\vec{x} = \{-10;2;-1;-3;5\}$.

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{y} = \{0;4;12;6;-5\}$ и $\vec{x} = \{-10;2;-1;-3;5\}$.

7. При каком значении параметра n векторы $\vec{a} = \{-4;3;6;n;-5\}$ и $\vec{x} = \{n;-2;10;-31;2\}$ ортогональны.

8. В пространстве V^5 в некотором базисе заданы векторы: $\vec{x}_1 = (1;0;2;5;1)$; $\vec{x}_2 = (3;\ 1;\ -1;\ 2;\ 3)$, $\vec{x}_3 = (2;\ 0;\ 4;\ 2;\ 2)$, $\vec{x}_4 = (1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 2)$. Определить координаты следующих векторов: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + 5\vec{x}_2 - \vec{x}_4$, $\vec{y}_2 = 2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 3\vec{x}_4$, $\vec{y}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 0{,}5\vec{x}_3 + 2\vec{x}_4$, $\vec{y}_4 = \frac{1}{3}\vec{x}_1 - \frac{1}{3}\vec{x}_2 - \frac{1}{2}\vec{x}_3 - \vec{x}_4$.

9. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_i)$:

1) V^3: $\vec{e}_1 = (3;1;4)$, $\vec{e}_2 = (5;2;1)$, $\vec{e}_3 = (1;1;6)$, $\vec{x} = (2;1;1)$;

2) V^3: $\vec{e}_1 = (1;2;1)$, $\vec{e}_2 = (2;3;3)$, $\vec{e}_3 = (3;7;1)$, $\vec{x} = (1;1;3)$;

3) V^4: $\vec{e}_1 = (1;1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;2;1;1)$, $\vec{e}_3 = (1;1;2;1)$, $\vec{e}_4 = (1;3;2;3)$, $\vec{x} = (3;2;3;1)$.

10. Найти связь между координатами вектора $\vec{x}$ в базисах $(\vec{e}_i)$ и $(\vec{f}_i)$ пространства V^n: 1) V^3: $\vec{e}_1 = (1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;1;2)$, $\vec{e}_3 = (1;2;3)$, $\vec{f}_1 = (2;1;-3)$, $\vec{f}_2 = (3;2;-5)$, $\vec{f}_3 = (1;-1;-1)$;

2) $V^4 : \vec{e}_1 = (0;1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;0;1;1)$, $\vec{e}_3 = (1;1;0;1)$, $\vec{e}_4 = (1;1;1;0)$, $\vec{f}_1 = (1;1;1;1)$, $\vec{f}_2 = (1;2;1;1)$, $\vec{f}_3 = (1;1;2;1)$, $\vec{f}_4 = (1;3;2;3)$.

11. Исследовать на линейную зависимость (независимость) системы векторов: 1) $\vec{x}_1 = (1;1;1;1)$, $\vec{x}_2 = (1;-1;-1;1)$, $\vec{x}_3 = (1;-1;1;-1)$, $\vec{x}_4 = (1;1;-1;-1)$; 2) $\vec{x}_1 = (4;-5;2;6)$, $\vec{x}_2 = (2;-2;1;3)$, $\vec{x}_3 = (6;-3;3;9)$, $\vec{x}_4 = (4;-1;5;6)$; 3) $\vec{x}_1 = (1;-1;0;0)$, $\vec{x}_2 = (0;1;-1;0)$, $\vec{x}_3 = (1;0;-1;1)$, $\vec{x}_4 = (0;0;0;1)$, $\vec{x}_5 = (3;-5;2;-3)$.

12. Найти ранг данной системы векторов и какой-нибудь базис: 1) $\vec{a}_1 = (2;-1;3;5)$, $\vec{a}_2 = (4;-3;1;3)$, $\vec{a}_3 = (3;-2;3;4)$, $\vec{a}_4 = (4;-1;15;17)$, $\vec{a}_5 = (7;-6;-7;0)$; 2) $\vec{a}_1 = (1;2;3;-4)$, $\vec{a}_2 = (2;3;-4;1)$, $\vec{a}_3 = (2;-5;8;-3)$, $\vec{a}_4 = (5;26;-9;-12)$, $\vec{a}_5 = (3;-4;1;2)$; 3) $\vec{a}_1 = (1;-1;0;0)$, $\vec{a}_2 = (0;1;-1;0)$, $\vec{a}_3 = (1;0;-1;1)$, $\vec{a}_4 = (0;0;0;1)$, $\vec{a}_5 = (3;-5;2;-3)$.

13. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{x}$ линейно выражается через векторы $(\vec{a}_i)$:

1) $\vec{a}_1 = (2;3;4)$, $\vec{a}_2 = (3;7;8)$, $\vec{a}_3 = (1;-6;1)$, $\vec{x} = (7;-2;\lambda)$;

2) $\vec{a}_1 = (3;2;5)$, $\vec{a}_2 = (2;4;7)$, $\vec{a}_3 = (5;6;\lambda)$, $\vec{x} = (1;3;5)$;

3) $\vec{a}_1 = (3;2;6)$, $\vec{a}_2 = (7;3;9)$, $\vec{a}_3 = (5;1;3)$, $\vec{x} = (\lambda;2;5)$.

14. В пространстве R^4 заданы векторы $(\vec{e}_i)$. Показать, что эти векторы образуют базис. Найти матрицу перехода от канонического базиса к данному и координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе:

1) $\vec{e}_1 = (1;1;0)$, $\vec{e}_2 = (0;1;1)$, $\vec{e}_3 = (1;0;1)$, $\vec{x} = (-1;2;1)$;

2) $\vec{e}_1 = (1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;1;2)$, $\vec{e}_3 = (1;2;3)$, $\vec{x} = (6;9;14)$;

3) $\vec{e}_1 = (2;1;-3)$, $\vec{e}_2 = (3;2;-5)$, $\vec{e}_3 = (1;-1;1)$, $\vec{x} = (6;2;-7)$.

15. Составить матрицу перехода от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}_i^{\,*})$:

1) $\vec{e}_1 = (1;2;1)$, $\vec{e}_2 = (2;3;3)$, $\vec{e}_3 = (3;7;1)$, $\vec{e}_1^{\,*} = (3;1;1)$, $\vec{e}_2^{\,*} = (5;2;1)$, $\vec{e}_3^{\,*} = (1;1;-6)$; 2) $\vec{e}_1 = (1;1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;2;1;1)$, $\vec{e}3_1 = (1;1;2;1)$, $\vec{e}_4 = (1;3;2;3)$, $\vec{e}_1^{\,*} = (1;0;3;3)$, $\vec{e}_2^{\,*} = (-2;-3;-5;-4)$, $\vec{e}_3^{\,*} = (2;2;5;4)$, $\vec{e}_4^{\,*} = (-2;-3;-4;-4)$.

16. Нормировать вектор $\vec{x} = \{3;\ 1;\ 2;\ 1\}$.

17. Найти нормированный вектор, ортогональный к векторам $\vec{x} = \{1;\ 1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{y} = \{1;\ -1;\ -1;\ 1\}$, $\vec{z} = \{2;\ 1;\ 1;\ 3\}$.

6.8. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Найти косинус угла между векторами:

$$\vec{x} = \vec{e}_1\sqrt{N} + \vec{e}_2\sqrt{N-2} + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \quad \vec{y} = \vec{e}_1\sqrt{N} + \vec{e}_2\sqrt{N-2} + \mathrm{M}\vec{e}_3 + D\vec{e}_4.$$

2. При каком значении параметров α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны, если $\vec{a} = (N;N;\beta)$, $\vec{b} = (\alpha;2;N)$.

3. Найти длину вектора $\vec{a} = (10;N;M;-D;2)$..

4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (7;2M;N;-3D;1)$ и $\vec{b} = (0;3;N+M;N-D;-1)$.

5. В пространстве R^4 заданы векторы $(\vec{e}_i)$. Показать, что эти векторы образуют базис. Найти матрицу перехода от канонического базиса к данному и координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе: $\vec{e}_1 = (1;2;-1;-2)$, $\vec{e}_2 = (2;3;0;-1)$, $\vec{e}_3 = (1;2;1;4)$, $\vec{e}_4 = (1;3;-1;3)$, $\vec{x} = (7;14;-1;2)$.

6.Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_i^{\,*})$, если он задан в базисе $(\vec{e}_i)$:

1) $\vec{x} = (1;2;4)$;
$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2^{\,*} = \dfrac{3}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2; \\ \vec{e}_3^{\,*} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{cases}$$

2) $\vec{x} = (10;5;1)$;
$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{5}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2^{\,*} = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2; \\ \vec{e}_3^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{cases}$$

3) $\vec{x} = (1;4;-8)$;
$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2^{\,*} = \dfrac{3}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2; \\ \vec{e}_3^{\,*} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{cases}$$

7. Нормировать вектор $\vec{x} = \{N;\ 1-M;\ 2D;\ 1+N\}$.

6.9. Контрольная работа № 5

1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_i)$ пространства V^3:

$$\vec{e}_1 = (3N;1;4),\quad \vec{e}_2 = (5N;M;1),\quad \vec{e}_3 = (1;N;D),\quad \vec{x} = (2N;1;1);$$

2. Исследовать на линейную зависимость (независимость) системы векторов: $\vec{x}_1 = (N;-N;0;0)$, $\vec{x}_2 = (0;N;-M;0)$, $\vec{x}_3 = (N;0;-1;D)$, $\vec{x}_4 = (0;0;0;1)$, $\vec{x}_5 = (3N;-5M;2;-3)$.

3. Найти ранг данной системы векторов и какой-нибудь базис:

$$\vec{x}_1 = (1;2;3N;-4),\quad \vec{x}_2 = (2;3;-4N;1),\quad \vec{x}_3 = (2;-5;8N;-3),$$

$$\vec{x}_4 = (5;26;-9N;-12),\quad \vec{x}_5 = (3;-4;N;2).$$

4. Установить, что векторы $\vec{a}_1 = (2;-1;-1;0)$ и $\vec{a}_2 = (1;1;1;N)$ ортогональны

5. Составить матрицу перехода от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}_i^{\,*})$:

$$\vec{e}_1 = (1;2;N),\quad \vec{e}_2 = (2;3;3N),\quad \vec{e}_3 = (3;7;N),$$

$$\vec{e}_1^{\,*} = (3;1;1),\quad \vec{e}_2^{\,*} = (5;2;1),\quad \vec{e}_3^{\,*} = (1;1;-6).$$

6. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_i^{\,*})$, если он задан в базисе $(\vec{e}_i)$: $\vec{x} = (10;5\mathrm{N};1)$;

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{5}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2^{\,*} = 6N\vec{e}_1 - N\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{cases}$$

7. Линейные операторы и квадратичные формы

7.1. Определение линейного оператора

Пусть заданы два линейных пространства: R_n, R_m.. Если задан закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in R_n$, ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} = R_m$,, то говорят, что задан оператор (преобразование, отображение) $\tilde{A}(\vec{x})$, действующий из R_n в R_m, и пишут

$$\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x}). \qquad (59)$$

Вектор $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ называется образом вектора $\vec{x}$, вектор $\vec{x}$ называется прообразом вектора $\vec{y}$. Если пространства совпадают, то оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ отображает пространство R_n в себя.

Оператор $\tilde{O}(\vec{x})$ называется нулевым, если переводит все векторы $\vec{x} \in R_n$ в нулевые векторы: $\tilde{O}(\vec{x}) = \vec{O}$.

Оператор $\tilde{E}(\vec{x})$ называется тождественным, если переводит любой вектор $\vec{x} \in R_n$ в себя: $\tilde{E}(\vec{x}) = \vec{x}$.

Оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ называется линейным, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ и любого действительного числа λ выполняются равенства:

1) $\tilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$ (свойство аддитивности);

2) $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\tilde{A}(\vec{x})$ (свойство однородности).

Пусть в пространстве R_n задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Любой вектор $\vec{x} \in R_n$ можно разложить по этому базису: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$. Тогда $\tilde{A}(\vec{x}) = x_1\tilde{A}(\vec{e}_1) + x_2\tilde{A}(\vec{e}_2) + ... + x_n\tilde{A}(\vec{e}_n)$. Каждый из векторов $\tilde{A}(\vec{e}_i)$ можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

$$\tilde{A}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n$$

$$\tilde{A}(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{A}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n$$

Распишем $\tilde{A}(\vec{x})$:

$$\tilde{A}(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots$$

$$+ x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n) =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \ldots$$

$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)\vec{e}_n.$$

С другой стороны $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+...+y_n\vec{e}_n$. Так как разложение по базису единственное, то справедливы равенства:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n$$

$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n$$

....

$$y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n\ .$$

Матрица коэффициентов данной системы называется матрицей оператора $\tilde{A}(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$, ранг матрицы называется рангом оператора.

Вывод**:** каждому линейному оператору $\tilde{A}(\vec{x})$ соответствует матрица в данном базисе и наоборот: каждой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Введем для векторов $\vec{x},\vec{y}\in R_n$ матрицы-столбцы: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\...\\y_n\end{pmatrix}$.

Тогда систему равенств можно записать в виде матричного уравнения:

$$Y=AX\ . \qquad (60)$$

Пример. Найти образ $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})$ вектора $\vec{x}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-2\vec{e}_3$, если оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу $Y=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-14\\5\end{pmatrix}$.

Следовательно, образ вектора $\vec{y}$ имеет вид: $\vec{y}=7\vec{e}_1-14\vec{e}_2+5\vec{e}_3$.

7.2. Действия над операторами

1. Суммой операторов $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется оператор $\tilde{A}+\tilde{B}$, такой, что $(\tilde{A}+\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\vec{x})+\tilde{B}(\vec{x})$.

2. Произведением оператора $\tilde{A}(\vec{x})$ на число λ называется такой оператор, что $(\lambda\tilde{A})(\vec{x})=\lambda(\tilde{A}(\vec{x}))$.

3. Произведением операторов $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется такой оператор, что $(\tilde{A}\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\tilde{B}(\vec{x}))$.

Сами операторы $\tilde{A}+\tilde{B}$, $\lambda\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$ являются линейными.

7.3. Матрица оператора в новом базисе

Пусть задано два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ и $\vec{e}_1^{\,*},\vec{e}_2^{\,*},...,\vec{e}_n^{\,*}$ в пространстве R_n. В каждом из них имеются матрицы A, A^* оператора $\tilde{A}(\vec{x})$. Найдем связь между этими матрицами. Известно, что $X=BX^*$ и $Y=BY^*$, где B - матрица перехода из базиса векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ в базис векторов $\vec{e}_1^{\,*},\vec{e}_2^{\,*},...,\vec{e}_n^{\,*}$.

Из условия $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})$ следует, что $Y=AX$. Тогда:

$$AX=ABX^*,\ Y=ABX^*,\ BY^*=ABX^*,$$

$$B^{-1}BY^*=B^{-1}ABX^*,\ Y^*=B^{-1}ABX^*,$$

Следовательно,

$$A^*=B^{-1}AB. \tag{61}$$

Пример. Найти матрицу A^* линейного оператора в базисе $\vec{e}_1^{\,*},\vec{e}_2^{\,*},...,\vec{e}_n^{\,*}$, заданного матрицей A в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1^{\,*}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{e}_2^{\,*}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2$.

Решение. Составим матрицу перехода из базиса $(\vec{e}_i)$ в базис $(\vec{e}_i^{\,*})$:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу для матрицы B: $B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда матрица оператора в новом базисе имеет вид:

$$A^{*}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{18}{5} & \frac{17}{5}\end{pmatrix}.$$

7.4. Собственные векторы и собственные значения

Вектор $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется собственным вектором линейного оператора $\tilde{A}$, если найдется такое число λ, что

$$\tilde{A}(\overline{x})=\lambda\overline{x} \qquad (62)$$

Число λ называется собственным значением оператора $\tilde{A}$, соответствующим вектору $\overline{x}$:

$$\tilde{A}(\overline{x})=AX=\lambda X \qquad (63)$$

Вектор $\overline{x}$ переводится в ему коллинеарный вектор:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\lambda x_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\lambda x_2;\\ \ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\lambda x_n.\end{cases} \qquad (64)$$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0;\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0;\\ \ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0;\end{cases} \qquad (65)$$

или

$$(A-\lambda E)X=0. \qquad (66)$$

Система (65) имеет нулевое решение. Для того, чтобы она имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A-\lambda E)=0. \qquad (67)$$

Определитель матрицы $(A-\lambda E)$ называется характеристическим многочленом оператора $\tilde{A}$ или матрицы A, а само уравнение (67) называется характеристическим уравнением $\tilde{A}$ или A.

Пусть оператор $\tilde{A}$ (матрица A) имеет n линейно независимых собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Векторы $\vec{e}_i$ примем за базисные. Тогда

$$\tilde{A}(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n,$$

($a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $a_{ii} = \lambda_i$, если $i = j$).

Следовательно, матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (68)$$

Верно и обратное: если A линейного оператора $\tilde{A}$ имеет диагональный вид в некотором базисе, то все векторы этого базиса являются собственными векторами $\tilde{A}$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ и нормировать их, если задана матрица оператора $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 6(3-\lambda) = 0, \; (3-\lambda)\left(2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6\right) = 0,$$

$$\lambda = 3,\ \lambda = 4,\ \lambda = -1.$$

Находим собственные векторы:

1) при $\lambda = 3$ $\quad (A - 3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$;

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = 0; \\ x_2 = C_1; \\ x_3 = 0; \end{matrix} \quad (0;\, C_1;\, 0);$$

2) при $\lambda = 4$ $\quad (A - 4E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$;

$$A - 4E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 - 1 \cdot x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = -3C_2; \\ x_2 = -5C_2; \\ x_3 = C_2; \end{matrix} \quad (-3C_2;\, -5C_2;\, C_2);$$

3) при $\lambda = -1$ $\quad (A+E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$;

$$A+E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = 2C_3; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = C_3; \end{matrix} \quad (2C_3\ 0;\ C_3).$$

Векторы $\overrightarrow{a_1} = (0; C_1; 0)$; $\overrightarrow{a_2} = (-3C_2; -5C_2; C_2)$; $\overrightarrow{a_3} = (2C_3; 0; C_3)$ при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$ являются собственными векторами, числа $\lambda = 3,\ \lambda = 4,\ \lambda = -1$ являются собственные значения оператора A.

Нормируем полученные собственные векторы. Для этого подберем C_i так, чтобы длина каждого собственного вектора равнялась единице:

1) $\vec{a}_1 = (0; C_1; 0),\ C_1 = 1,\ \vec{e}_1 = (0;1;0)$;

2) $\vec{a}_2 = (-3C_2; -5C_2; C_2),\quad (9+25+1)C_2^2 = 1,\ C_2 = \sqrt{\dfrac{1}{35}}$,

$$\vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}; -\frac{5}{\sqrt{35}}; \frac{1}{\sqrt{35}}\right);$$

3) $\vec{a}_1 = (2C_3; 0; C_3),\quad (4+1)C_3^2 = 1,\quad C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \vec{e}_3 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 0; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Ответ: $\quad \overline{e_1} = (0;1;0)$; $\overline{e_2} = \left(-\dfrac{3}{\sqrt{35}}; -\dfrac{5}{\sqrt{35}}; \dfrac{1}{\sqrt{35}}\right)$; $\vec{e}_3 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 0; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

7.5. Линейная модель обмена (модель международной торговли)

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, ...S_n$. Национальный доход каждой страны $x_1, x_2, ...x_n$.

Пусть a_{ij} - доля национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров страны S_i. Предположим, что национальный доход тратится либо на закупку товаров или внутри страны, на импорт из других стран, следовательно, выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, ..., n) \tag{69}$$

Составим матрицу $A = (a_{ij})$, которая называется структурной матрицей торговли. Сумма элементов в столбцах матрицы равна единице.

Выручка от торговли для любой страны S равна:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = y_i \, . \tag{70}$$

Для баланса торговли необходимо, чтобы выручка от торговли для каждой страны была не меньше, чем ее национальный доход. Такое условие называется условием бездифицитности:

$$y_i \geq x_i \tag{71}$$

Рассмотрим матричное уравнение $AX = X$. Его можно записать так:

$$AX = \lambda X, \; \lambda = 1. \tag{72}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$.

Пример. Требуется найти соотношение цен трех товаров, если набор этих товаров $x_1 = (6; 2; 4)$; $x_2 = (1; 8; 9)$; $x_3 = (3; 5; 9)$ имеют одинаковую стоимость.

Пусть имеется три вида товаров T_1, T_2, T_3 и их цены $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 1y_1 + 8y_2 + 9y_3; \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 3y_1 + 5y_2 + 9y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y_1 - 6y_2 - 5y_3 = 0; \\ 3y_1 - 3y_2 - 5y_3 = 0; \end{cases}$$

$$2y_1 - 3y_2 = 0 \quad y_1 = \frac{3}{2}y \text{, следовательно } y_2 = C,\ y_1 = \frac{3}{2}C$$

$$5y_3 = 3y_1 - 3y_2,\ y_3 = \frac{3}{5}\left(y_1 - y_2\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}C - C\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{C}{2} = \frac{3C}{10},$$

$$\bar{y} = \left(\frac{3}{2}C; C; \frac{3C}{10}\right).$$

Например, при $C = 10$, $\bar{y} = \left(15;10;3\right)$.

Ответ: 15:10:3 – соотношение цен трех товаров.

7.5. Квадратичные формы

Квадратичной формой $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных называется сумма

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{73}$$

где a_{ij} - действительные числа, причем

$$a_{ij} = a_{ji}\ . \tag{74}$$

Матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, называется матрицей квадратичной формы. Матрица A является симметрической, так как элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

Пример. Для квадратичной формы трех переменных составить матрицу $L\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_1x_3$.

Решение. Составим матрицу, используя свойство (74):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A называется рангом квадратичной формы.

Пусть задана матрица переменных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Выражение (73) в матричной форме запишется так:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX \tag{75}$$

Пусть заданы две матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, которые связаны соотношением: $X = BY$, где матрица $B = (b_{ij})$, $i, j = 1,...,n$, является невырожденной матрицей перехода от матрицы Y к матрице X. Тогда

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX = (BY)^T A(BY) =$$

$$= (Y^T B^T) A(BY) = Y^T (B^T AB)Y = Y^T A^* Y$$

Вывод: при невырожденном линейном преобразовании $X = BY$ матрица квадратичной формы (73) принимает вид:

$$A^* = B^T AB \tag{76}$$

Квадратичная форма (73) называется канонической, если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а матрица A является диагональной:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \tag{77}$$

Ранг квадратичной формы равен числу не равных нулю коэффициентов канонической формы.

Теорема: Любая квадратичная форма (73) с помощью невырожденных линейных преобразованиях переменных может быть переведена в канонический вид (77).

Такое преобразование не единственное, одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду по-разному. Но при этом различные канонические формы обладают рядом общих свойств: ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях.

Среди приемов перевода квадратичной формы в каноническую форму можно выделить две:

1) выделение полных квадратов для переменных (метод Лагранжа);
2) использование ортогональных преобразований.

Пусть задана квадратичная форма $L = L(x_1, x_2)$, известна ее матрица $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Пусть имеется матрица перехода B от одного ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в другой $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^{\,*} = b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 \end{cases}, \qquad (78)$$

$\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$ - нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2. Имеем формулы перехода:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1^* + b_{12}x_2^* \\ x_2 = b_{21}x_1^* + b_{22}x_2^* \end{cases}. \qquad (79)$$

Квадратичная форма переходит в каноническую форму:

$$L = L(x_1^*, x_2^*) = \lambda_1 (x_1^*)^2 + \lambda_2 (x_2^*)^2, \; A^* = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}. \qquad (80)$$

Квадратичная форма (73) называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется условие: $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, (L(x_i) < 0).$ Существуют разные методы определения знака квадратичной формы.

Теорема 1: для того, чтобы форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительные (отрицательные).

Теорема 2 (критерий Сильвестра): для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительны: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$; для отрицательно определенной квадратичной формы знаки главных миноров должны чередоваться, начиная с отрицательного значения: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, ...$

$$\Delta_1 = a_{11}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Если знак квадратичной формы не поддается определению, то форму называют знаконеопределенно**й**.

Пример. Определить знак квадратичной формы:

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы и запишем её определитель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Запишем главные миноры определителя:

1) $\Delta_1 = 1$;

2) $\Delta_2 = 1{\cdot}2 - 1{\cdot}2 = 1$;

3) $\Delta_3 = 1{\cdot}2{\cdot}5 + 0{\cdot}1{\cdot}2 + 0{\cdot}1{\cdot}2 - 0{\cdot}2{\cdot}0 - 2{\cdot}1{\cdot}2 - 1{\cdot}1{\cdot}5 = 1$.

Все главные миноры матрицы A положительны, следовательно, квадратичная форма знакоположительна.

7.7. Упражнения

1. В пространстве R^2 линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образ $y = \tilde{A}(X)$ вектора $\vec{X} = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.

2. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\left(\vec{e}_i^{\,*}\right)$: $\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \ \vec{e}_2^{\,*} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \ \vec{e}_3^{\,*} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ если она задана в базисе $(\vec{e}_i)$:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти линейное преобразование, переводящее векторы $\vec{a}_1 = (2;0;3)$, $\vec{a}_2 = (4;1;5)$, $\vec{a}_3 = (3;1;2)$ соответственно в векторы $\vec{b}_1 = (1;2;-1)$, $\vec{b}_2 = (4;5;-2)$, $\vec{b}_3 = (1;-1;1)$.

4. Линейное преобразование A в базисе $\vec{a}_1 = (1;\,2)$, $\vec{a}_2 = (-1;1)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе

$\vec{b}_1=(1;-2),\ \ \vec{b}_2=(3;-1).$

5. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. В базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ оператор $\tilde{A}$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\vec{e}_1^{\,*}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$; $\vec{e}_2^{\,*}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$.

7. Привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q следующие симметрические матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Написать матрицу квадратичной формы и определить знак квадратичной формы:

1) $F=2x_1^2-5x_2^2+8x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$;

2) $F=-x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$;

3) $F=2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$.

9. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1) $2x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

2) $\lambda x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

3) $2\lambda x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$;

4) $2x_1^2+\lambda x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$.

10. Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:

1) $-x_1^2+\lambda x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $-2x_1^2-2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

3) $2\lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

4) $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

11. Привести к каноническому виду квадратичную форму методом Лагранжа: 1) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2) $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

3) $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

4) $F = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

5) $F = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$.

12. Привести к каноническому виду квадратичную форму с помощью ортогонального преобразования:

1) $F = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_3^2$;

2) $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;

3) $F = x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_1x_2$;

4) $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

5) $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

6) $F = 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

7) $F = 6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;

8) $F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

13 Найти соотношение цен трех товаров, если наборы этих товаров: $x_1 = (2;3;4)$; $x_2 = (6;3;1)$; $x_3 = (8;2;4)$.

14. Отрасль состоит из трех предприятий. Вектор выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

15. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,4\\ 0,3 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

7.8. Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix};\ \text{б) } A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix};\ \text{в) } A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

а) $L\left(x_1,x_2\right)=2x_1^2-2x_1x_2+x_1^2$;

б) $L\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

3. Исследовать на знакоопределенность квадратичные формы:

а) $L\left(x_1,x_2\right)=2x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2$;

б) $L\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

4. По матрице квадратичной формы восстановить сому квадратичную форму:

$$1)\ \begin{pmatrix}2 & N\\ N & 1\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix}3 & M & -D\\ M & N & 0\\ -D & 0 & -M\end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix}2 & 0 & M & -1\\ 0 & M & 0 & 1\\ M & 0 & 5 & N\\ -1 & 1 & N & D\end{pmatrix}.$$

5. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и третьей стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет второй страны равен 3500 усл. ед.

7.9. Контрольная работа № 6

1. Найти матрицу линейного оператора A в базисе $\left(\vec{e}_i^{\,*}\right)$, где: $\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2^{\,*} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_3^{\,*} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, ; если она задана в базисе $\left(\vec{e}_i\right)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ N & 0 & N \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ N & 2 & -1 \\ N & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа: $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + N^2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2Nx_1x_3 + 6Nx_2x_3$.

4. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования:

$$F(x_1;x_2) = 9Nx_1^2 + 16Nx_2^2 + 24Nx_1x_2.$$

5. Составить матрицу квадратичной формы и определить её знак:

$$L(x_1,\, x_1,\, x_1,\, x_1) = Mx_1^2 + Nx_2^2 + Dx_3^2 - N\cdot Mx_4^2 + (N+M)x_1x_2 + (M-D)x_1x_3 +$$
$$+10x_2x_3 + (N-M)x_1x_4 + 4x_2x_4 - 6x_3x_4$$

8. Вопросы по курсу «Линейная алгебра»

1. Определитель и его свойства.
2. Минор. Алгебраическое дополнение.
3. Вычисление определителей любого порядка.
4. Матрицы. Действия с ними.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы. Теорема о ранге, его вычисление.
7. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Решение систем методами Крамера, обратной матрицы и Гаусса. Однородные и неоднородные системы.
9. Фундаментальные системы решений однородных систем линейных уравнений.
10. Векторы. Операции над векторами.
11. Проекция вектора на ось. Координаты вектора.
12. Разложение вектора по базису i, j, k.
13. Направляющие косинусы векторов.
14. Скалярное произведение векторов и его свойства.
15. Векторное произведение векторов и его свойства.
16. Смешанное произведения векторов и его свойства.
17. Линейное векторное пространство.
18. Линейная зависимость и независимость векторов.
19. Размерность, базис векторного пространства. Переход к новому базису.
20. Евклидово пространство. Норма пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональные и ортонормированные базисы.
21. Линейные операторы и действия над ними. Матрица линейного оператора.
22. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
23. Квадратичные формы в n-мерном пространстве, их виды.
24. Приведение квадратичной формы в канонический вид.
25. Знакоопределенность квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
26. Многоотраслевая экономика. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ).
27. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

Библиографический список

1. *Атурин В. В.*Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / *В. В. Атурин, В. В. Годин*. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 304 с.

2. *Выгодский М. Я*. Справочник по высшей математике. – 12–е изд., стереотип. – М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., 1977. – 872 с.

3 Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [*Кремер Н. Ш*. и др.]; под ред. проф. *Н. Ш. Кремера*. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

4. *Гусак А. А*. Пособие к решению задач по высшей математике. Изд. 2–е, стереотип. – Минск, «Вышэйш. школа», 1968. – 530 с.

5. *Данко П. Е., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 Изд. 2–е Учеб. Пособие для втузов. – М.: «Высш. школа», 1974. – 416 с.

6. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Под ред. проф. *Н. В. Ефимова*. – С.–Пб.: Профессия, 2003. – 224 с.

7. *Красс М. С., Чупрынов Б. П*. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3–е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.

8. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – 14-е изд., испр. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 336 с.

9. *Окунева Г. Л.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / *Г. Л. Окунева*. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2013. – 122 с.

10. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. *В. И. Ермакова*. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

11. *Ситников Б. Д.* Квадратичные формы: учебное пособие / *Б. Д. Ситников, А. Н. Окунев.* – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2014. – 70 с.

12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С*. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 288 с.

Оглавление

Учебное издание

Окунева Галина Леонидовна
Рябцева Светлана Васильевна
Селиванова Елена Вячеславовна
Дюкарева Валерия Игоревна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Учебное пособие

Подписано в печать 05.12.14. Формат 60х84/16. Усл. печ. л.5,8. Уч.-изд. л.6,3.
Тираж 150 экз. Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46