МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический
университет
им. В. Г. Шухова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Белгород
2016

УДК 519.8(07)
ББК 22.1 я7
А64

Рецензент:
Кандидат физико-математических наук, доцент Белгородской государственной сельскохозяйственной академии им. В. Я. Горина *С. Н. Толстопятов*
Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова *А. С. Горлов*

А64 **Аналитическая** геометрия: учебное пособие / Г. Л. Окунева, С. В. Рябцева, Е. В. Селиванова, В. И. Дюкарева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2016. – 70 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и охватывает такие разделы аналитической геометрии как прямая на плоскости и в пространстве, плоскость, кривые второго порядка. Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач, упражнения по темам, индивидуальные домашние задания, контрольные работы по каждой теме, вопросы к зачету (экзамену). Пособие может использоваться как при изучении лекционного курса, так и на практических занятиях.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех специальностей.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.08(07)
ББК 22.1 я7

1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1.1. Расстояние между двумя точками

Рассмотрим прямоугольную систему координат (декартовую, рис. 1).

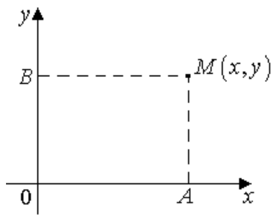

Рис. 1

Любой точке плоскости M соответствуют координаты $OA = x$ - абсцисса, $OB = y$ - ордината точки $M(x, y)$, то есть каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел и наоборот.

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними определяется формулой:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \,. \qquad (1)$$

1.2. Площадь треугольника

Теорема. Для любых точек $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой (рис.2), площадь треугольника ABC выражается формулой (2):

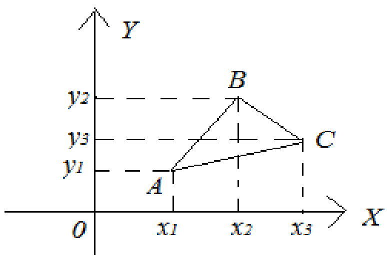

Рис. 2

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right]\right| .$$

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Пример. Известна площадь треугольника ABC, заданного вершинами $A(-2,1), B(2,2), C(4,y)$: $S_{\Delta ABC}=15$. Найти значение неизвестной координаты y .

Решение. Составим определитель, используя формулу вычисления площади треугольника (2):

$$S_{\Delta ABC}=15=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2+2 & 2-1 \\ 4+2 & y-1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & y-1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left(4(y-1)-6\right),$$

$$\pm 15=2y-5 ,\quad y_1=10 ,\quad y_2=-5 .$$

Ответ: $y_1=10$, $y_2=-5$.

1.3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок $M_1\left(x_1;y_1\right), M_2\left(x_2;y_2\right)$ и любая точка M принадлежащая отрезку M_1M_2 .

Пусть отношение $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$. В отношении λ точка M делит отрезок M_1M_2 (рис. 3).

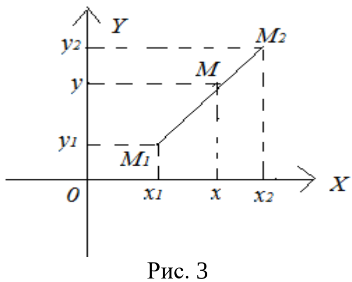

Рис. 3

Теорема. Если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \;\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad (3)$$

где $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Следствие: если M - середина M_1M_2, $\lambda = 1$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4)$$

Пример. Пусть точка $C(2,3)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Найти координаты точки B, если $A(1,2)$.

Решение. Подставим известные координаты точек $C(2,3)$, $A(1,2)$ в формулы (3):

$$x = \frac{1+0,5x_B}{1+0,5} = 2, \qquad y = \frac{2+0,5y_B}{1+0,5} = 3.$$

$$x_B = 2(2\cdot 1{,}5 - 1) = 4, \qquad y_B = 2(3\cdot 1{,}5 - 2) = 5.$$

Ответ: $B(4,5)$.

1.4. Полярные координаты

Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой полюсом, и исходящего из нее луча *OP*, называемой полярной осью (рис. 4). Задается масштаб для измерения длин отрезков.

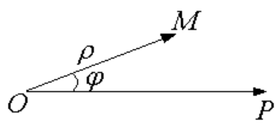

Рис. 4

Любая точка M в полярной системе характеризуется расстоянием $OM = \rho$ (ρ - полярный радиус, $\rho \ge 0$) и углом поворота φ луча OM от оси OP (φ - полярный угол, $0 \le \varphi \le 2\pi$).

Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

1.5. Связь декартовых и полярных координат

Пусть начало прямоугольной системы совпадает с полярным полюсом, ось X совпадает с полярной осью OP (рис.5).

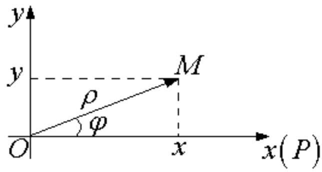

Рис. 5

Тогда для точки M справедливо равенство $M(x,y) = M(\rho,\varphi)$.

Из треугольника получим уравнения связи координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi, \end{cases} \tag{5}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{6}$$

1.6. Преобразования прямоугольных координат

На плоскости обычно рассматриваются следующие преобразования прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот осей координат.

При параллельном переносе осей координат изменяется положение начала координат, направление осей координат не меняется.

Рассмотрим переход системы координат XOY (старая) в систему $X_1O_1Y_1$ (новая) (рис. 6).

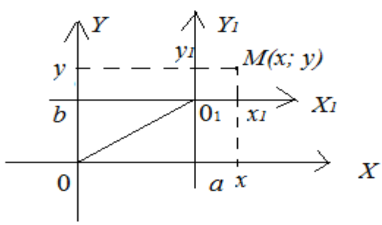

Рис. 6

Пусть точки O_1 и точка M в старой системе имеет координаты $O_1(a,b)$, $M(x,y)$. В новой системе $X_1O_1Y_1$ точка M имеет координаты: $M(x_1,y_1)$. Тогда формулы перехода имеют вид:

1) от «старых» координат в «новые» :

$$x_1 = x - a, \quad y_1 = y - b; \tag{7}$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b. \tag{8}$$

При повороте осей координат начало системы координат не меняется, а оси поворачиваются на один и тот же угол. Пусть система координат повернута относительно начала координат на угол α. Рассмотрим переход системы координат XOY в систему координат X_2OY_2. Точка $M(x,y)$ в системе XOY перейдет в точку $M(x_2,y_2)$ в системе X_2OY_2 (рис. 7).

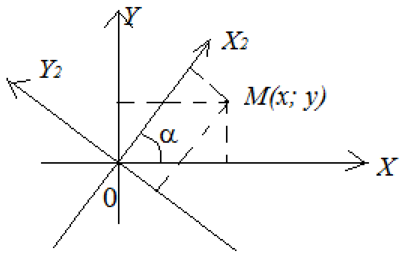

Рис. 7

Тогда формулы перехода имеют вид:

1) от «старых» координат в «новые»:

$$x_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y_2 = y\cos\alpha - x\sin\alpha; \tag{9}$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha, \quad y = y_2\cos\alpha + x_2\sin\alpha. \tag{10}$$

Пример. Определить координаты точки $M(3,5)$ в новой системе координат $O_1X_1Y_1$, если начало O_1 находится в точке $N(-2,1)$, а оси новой системы координат параллельны осям старой системы координат.

Решение. Воспользуемся формулы (7):

$$x' = 3 + 2 = 5, \quad y' = 5 - 1 = 4.$$

Ответ: точка $M(5,4)$ в новой системе координат.

Пример. Отрезок OM, где точка $M(x,y)$, повернут на угол 60^0. Найти координаты точки $M(x_2,y_2)$ в новой системе координат.

Решение. Используем формулы (9):

$$x_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha = x\cos 60^0 + y\sin 60^0 = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$y_2 = y\cos\alpha - x\sin\alpha = y\cos 60^0 - x\sin 60^0 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Ответ: $M\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ в новой системе координат.

1.7. Упражнения

1. Построить на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
1) $x > 2$; 2) $x - 3 \le 0$; 3) $2x - 3 \le 0$; 4) $1 < x \le 3$;
5) $x^2 - 9 < 0$; 6) $x^2 - 5x + 6 < 0$; 7) $12 - x < 0$; 8) $3x - 5 > 0$;
9) $-2 \le x \le 3$; 10) $x^2 - 8x + 15 \le 0$; 11) $x^2 - 8x + 15 > 0$; 12) $x^2 - 25 > 0$;
13) $16 - x^2 \le 0$. К каждому случаю сделать рисунок.

2. Построить на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
1) $|x| < 1$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x| \le 2$; 4) $|x - 2| < 3$;
5) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$; 6) $|x - 1| \ge 2$.

3. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x,\ y)$, если 1) $x \cdot y > 0$; 2) $x \cdot y < 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $x + y = 0$; 5) $x + y > 0$; 6) $x + y < 0$; 7) $x - y < 0$; 8) $x - y > 0$.

4. Даны точки $A(0;\ 0)$, $B(3;\ -4)$, $C(-3;\ 4)$, $D(-2;\ 2)$, $E(10,\ -3)$. Определить расстояние d между точками: 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

5. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2; -3)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 5)$; 2) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$, $M_3(1; 3)$, 3) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$, $P(4; 5)$.

6. Точка M является серединой отрезка OA, соединяющего начало координат O с точкой $A(-5;\ 2)$. Найти координаты точки M.

7. Построить точки $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $D(0;\ 0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Какова его площадь? Найти координаты середины сторон квадрата.

8. Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины есть точки $A(5;\ 1)$ и $B(-2;\ -2)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.

9. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2;\ -1)$, $B(4;\ 3)$ и $C(-2;\ 1)$.

10. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3;\ 1)$, $B(4;\ 6)$, $C(6;\ 3)$, $D(5;\ -2)$.

11. Точки $A(-2;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ и $C(4;\ -1)$ − середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

12. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2;\ 4)$, $B(0;\ 1)$ и $C(4;\ 2)$.

13. Площадь треугольника равна 3 кв. ед., две его вершины есть точки $A(3;\ 1)$ и $B(1;\ -3)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

14. Вершины треугольника − точки $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ и $C(2;\ -1)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

15. Три вершины параллелограмма – точки $A(3;\ 7)$, $B(2;\ -3)$ и $C(-1;\ -4)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

16. Отрезок ограниченный точками $A(1;\ -3)$ и $B(4;\ 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

17. Определить координаты концов отрезка A и B, который точками $P(2;\ 2)$ и $Q(1;\ 5)$ разделен на три равные части.

18. Прямая проходит через точки $M(2;\ -3)$ и $N(-6;\ 5)$. Найти на этой прямой точку, ордината которой равна -5.

19. Прямая проходит через точки $M_1(7;\ -3)$ и $M_2(23;\ -6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

20. Центр масс однородного стержня находится в точке $M(1;\ 4)$. Один из его концов в точке $P(-2;\ 2)$. Определить координаты точки Q − другого конца этого стержня.

21. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(2;\ \pi/2)$; $B(3;\ \pi/4)$; $C(3;\ 3\pi/4)$; $D(4;\ 0)$; $F(2;\ 3\pi/2)$; $P(3;\ \pi)$.

22. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A(3;\ \pi/3)$; $B(4;\ -\pi/4)$.

23. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $A(1;\ \pi/4)$; $B(5;\ -\pi/3)$.

24. Даны точки в прямоугольной системе координат $M_1(0;\ 5)$, $M_2(-3;\ 0)$, $M_3(\sqrt{3};\ 1)$. Найти их полярные координаты.

25. Даны точки в полярной системе координат $A(3;\ \pi/6)$, $B(5;\ 2\pi/3)$. Найти расстояние d между ними.

26. Написать в полярных координатах уравнения линий:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $y=2x$; 3) $x=2$; 4) $y=-3$; 5) $x+y=5$.

27. Записать уравнение в полярных координатах $\rho=2\cos\varphi$ в прямоугольных координатах, определить ее вид и построить кривую.

1.8. Домашняя работа

1. Построить в прямоугольной системе координат точки, заданные в полярной системе координат:

$$A(5;0);\ B\left(2;\frac{\pi}{4}\right);\ C\left(3;-\frac{\pi}{4}\right);\ D\left(4;\frac{5\pi}{4}\right),\ E\left(-3,\ \frac{\pi}{3}\right);\ F\left(3,\ -\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Определить середины сторон треугольника и вычислить его площадь, если треугольник задан своими вершинами $A(7;5)$, $B(-3;-6)$, $C(4;-1)$.

3. Даны точки $A(1;2)$, $B(6;6)$. На оси OX определить точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 10.

4. Отрезок OM, где точка $M(-1,\ 4)$, повернут на угол 30^0. Найти координаты точки $M(x_2, y_2)$ в новой системе координат, если начало координат системы перенесено в точку $O_1(2,\ 3)$.

5. Определить вершины треугольника, если треугольник задан сторонами: $2x+5y=10$, $-2x+7y=14$, $4x-3y=12$.

1.9. Контрольная работа № 1

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Найти длину отрезка, если он задан двумя точками в полярной системе координат $A\left(M\sqrt{5},\ \pi/6\right)$, $B\left(N\sqrt{10},\ \pi/3\right)$. Найти координаты середины отрезка и точки C, делящей отрезок в отношении $1/3$.

2. Определить середины сторон треугольника и вычислить его площадь, если треугольник задан вершинами $A(M,\ N)$, $B(10-M,\ D/2)$, $C(M+N,\ M)$.

2. Уравнение линии на плоскости

2.1. Определение линии

Пусть на плоскости XOY задана прямоугольная система координат и некоторая линия (кривая) L.

Уравнением линии L на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой, не лежащей на этой линии:

$$F(x,\ y) = 0\,, \tag{11}$$

то есть линия – это множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (11).

Уравнение линии можно задать следующими способами:

1) в прямоугольной системе координат: $y = f(x)$; (12)

2) в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$, где t - параметр; (13)

3) в полярной системе координат: $\rho = \rho(\varphi)$. . (14)

Линия называется линией n - ого порядка, если она определяется уравнением n -ой степени относительно текущих прямоугольных координат. Линия первого порядка называется прямой.

Углом наклона прямой к оси OX называется наименьший неотрицательный угол α, на который следует повернуть ось OX, чтобы ее положительное направление совпадало с одним из направлений прямой.

2.2. Уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть задана прямая под углом α к оси OX (рис. 8).

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой

$$k = \mathrm{tg}(\alpha). \qquad (15)$$

Рассмотрим треугольник BMN:

$$MN \perp OX, \qquad BN \perp OY, \qquad BN = x, \qquad MN = y - b.$$

Найдем отношение сторон из треугольника BNM:

$$\frac{MN}{BN} = \mathrm{tg}\alpha, \quad \frac{y-b}{x} = k, \quad y - b = kx, \quad y = kx + b.$$

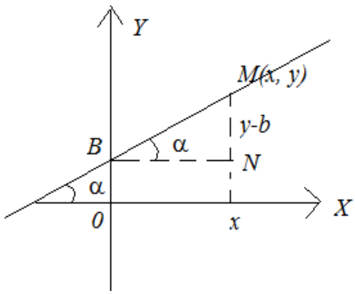

Рис. 8

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b. \qquad (16)$$

Частные случаи поведения прямой:

1) если $k = 0,\ y = b$, то прямая параллельна оси OX;

2) если $b = 0,\ y = kx,$, то прямая проходит через начало координат;

3) если $x = a,$ прямая параллельна оси OY.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку.

Пусть задана точка $M\left(x_1, y_1\right)$, принадлежащая прямой $y = kx + b$. Подставим координаты точки в уравнение: $y_1 = kx_1 + b$. Выразим свободный член $b = y_1 - kx_1$. Тогда уравнение примет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (17)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть заданы две точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$и $M_2\left(x_2;y_2\right)$, принадлежащие прямой L . Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой (17): $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Выразим коэффициент $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Уравнение прямой будет иметь вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{18}$$

Уравнение прямой в отрезках.

Пусть задана прямая, отсекающая на осях OX и OY отрезки a и b соответственно. Точки $A\left(a;0\right)$ и $B\left(0;b\right)$ принадлежат прямой, заданной уравнением (18) (рис.9).

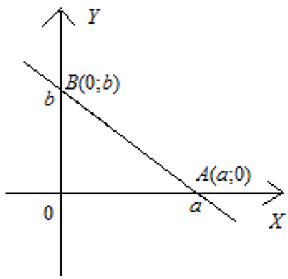

Рис.9

Подставим координаты точек в уравнение прямой (18), получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{19}$$

Каноническое уравнение прямой.

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две точки (18). Введем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, принадлежащий прямой:

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{x_2-x_1;y_2-y_1\right\}=\left\{m;n\right\}. \tag{20}$$

Этот вектор или ему параллельный называют направляющим вектором прямой. Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (21)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Параметрические уравнение прямой.

Приравняем уравнение прямой (21) к параметру t. Получим пару параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x=mt+x_1; \\ y=nt+y_1. \end{cases} \qquad (22)$$

Общее уравнение прямой.

В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

$$Ax+By+C=0\ , \qquad (23)$$

где $A, B, C -$ произвольные числа, причем $A, B -$ одновременно не равны нулю. Угловой коэффициент прямой имеет вид:

$$k=-\frac{A}{B}. \qquad (24)$$

При отсутствии какого-либо коэффициента в уравнении прямой получаются неполные уравнения прямой:

1) $C=0, \quad Ax+By=0$ - прямая, проходящая через начало координат;

2) $B=0, A\neq 0, C\neq 0, Ax+C=0$ – прямая, параллельная оси OY;

3) $B\neq 0, A=0, C\neq 0, By+C=0$ – прямая, параллельная оси OX;

4) $B=0, A\neq 0, C=0, Ax=0, x=0$ – ось OY;

5) $B\neq 0, A=0, C=0, By=0, y=0$ – ось OX.

Нормальное уравнение прямой.

Пусть задана некоторая прямая L. Через начало координат проведем перпендикуляр ON к прямой L. Этот перпендикуляр называется нормалью к прямой и обозначается $\vec{N}$ (где $\vec{n}-$ единичный вектор нормали).

Пусть нормаль $\vec{N}$ с осью OX образует угол α $(\leq \alpha \leq 2\pi)$. Введем параметр p: $ON=p$.

Рассмотрим точку $M(x,y)=M(\rho,\varphi)\in L,$ совмещая прямоугольную и полярную системы координат ($x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi,$ рис. 10).

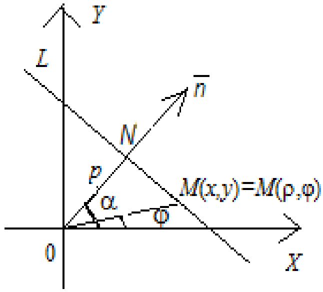

Рис. 10

Из ΔONM получим:

$$p = \rho\cos(\angle NOM) = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos\alpha\cos\varphi - \rho\sin\alpha\sin\varphi,$$

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

В результате получим нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - з = 0. \tag{25}$$

2.3. Расстояние между точкой и прямой

Пусть задана прямая L и точка $M_0(x_0, y_0) \notin L$. Зададим прямую в виде нормального уравнения (25). Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую L_0, параллельную заданной прямой L. Пусть точки N и N_0 лежат по одну сторону от начала координат (рис. 11).

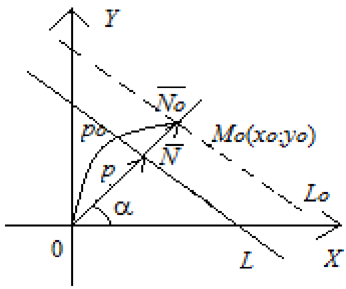

Рис. 11

Векторы $\vec{ON}$ и $\vec{ON_0}$ коллинеарные. Пусть $\left|\vec{ON_0}\right| = p_0$.. Оценим расстояние между прямыми:

$$d = \left|p_0 - p\right| = \left|x_0 \cos\alpha + y \ \sin\alpha - p.\right| \tag{26}$$

Полученная формула позволяет вычислить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L.

Если уравнение прямой задано общим уравнением (23), то его можно перевести в нормальное уравнение прямой, введя нормирующий множитель:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{27}$$

Знак множителя определяется так:

а) если $C < 0$, то μ - положительный;

б) если $C > 0$, то μ - отрицательный.

Нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\mu(A \cdot x + B \cdot y + C) = 0, \tag{28}$$

а расстояние между точкой и прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{29}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M(4,3)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

Решение. Применим формулу (29), подставив вместо x_0, y_0 координаты точки $M(4,3)$:

$$d = \frac{\left|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

2.4. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Возможны следующие взаимные положения прямых: прямые пересекаются, параллельны или совпадают.

1. Прямые пересекаются.

Точкой пересечения прямых является общее решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \tag{30}$$

при условии, что главный определитель системы не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ или при соблюдении условие } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}; \tag{31}$$

Угол φ между прямыми можно найти, если известны угловые коэффициенты прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}; \quad k_2 = -\frac{A_2}{2}; \quad k_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1; \quad k_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1); \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}.$$

Тогда угол можно найти по формуле:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{32}$$

Из формулы (32) можно получить условие перпендикулярности прямых:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad k_1k_2 - = -1 \tag{33}$$

2. Прямые параллельные.

Прямые будут параллельными, если система уравнений (30) не имеет решения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или соблюдается условие } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \tag{34}$$

можно условие параллельности записать, используя равенство нулю угла между прямыми:

$$\varphi = 0; \quad k_1 = k_2. \tag{35}$$

3. Прямые совпадают при соблюдении условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{36}$$

2.5. Упражнения

1. Определить, какие из точек $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1)$, $M_6(-2;\ -1)$, лежат на прямой, а какие не лежат на прямой $2x-3y-3=0$.

2. На прямой $3x-2y-6=0$ расположены точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, −2, −6. Определить ординаты этих точек.

3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, −1, 3. Определить абсциссы этих точек.

4. Определить угловой коэффициент и указать величину отрезка, отсекаемого прямой на оси OY в каждом случае: 1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.

5. Зная параметры k и b, в каждом из указанных случаев, составить уравнение прямой: 1) $k=2/3,\ b=3$; 2) $k=3,\ b=0$; 3) $k=0,\ b=-2$; 4) $k=-3/4,\ b=3$; 5) $k=-2,\ b=-5$; 6) $k=-1/3,\ b=2/3$.

6. Определить точки пересечения заданной прямой $3x-2y-12=0$ с координатными осями.

7. Найти точку пересечения заданных двух прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

8. Задана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;\ 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

9. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $M_1(5;\ -4)$, $M_2(-1;\ 3)$, $M_3(-3;\ -2)$ параллельно противоположным сторонам.

10. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки: 1) $M_1(2;\ -5)$, $M_2(3;\ 2)$; 2) $M_3(-3;\ 1)$, $M_4(7;\ 8)$.

11. Определить угол φ между двумя прямыми:

1) $5x-y+7=0,\quad 3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7,\quad 2x+3y-3=0$;

3) $x-2y-4=0,\quad 2x-4y+3=0$; 4) $3x+2y-1=0,\quad 5x+2y+3=0$.

12. Задана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 1)$ под углом 45° к данной прямой.

13. Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой: 1) параллельной данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

14. Составить уравнения высот треугольника с вершинами $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$, $M_3(3;\ 2)$.

15. Найти проекцию точки $P(3;\ 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;\ -3)$ и $B(11;\ -15)$.

16. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.

17. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(3;\ -7)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

18. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+8y+n=0$, $2x+my-1=0$: 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

19. Вычислить расстояние d между двумя параллельными прямыми:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$;

2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

3) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$;

4) $24x-10y+39=0$, $12x-5y-26=0$.

20. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь квадрата.

21. Точка A является вершиной треугольника ABC. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону $x-2y-7=0$. Вычислить её длину.

22. Дан треугольник с вершинами $A(3;\ 1)$, $B(-3;\ -1)$ и $C(5;\ -12)$ Найти уравнение медианы, проведенной из вершины C, и вычислить ее длину.

23. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок $b=3$ и образующей с осью OX угол: 1) 45°; 2) 135°. Построить эти прямые.

24. Уравнения прямых привести к виду уравнения прямой в отрезках:

1) $3x-2y=6$; 2) $5x-2y+4=0$; 3) $6x+4y12=0$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,\ 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью равной 3 кв. ед.

26. Написать и построить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ 3)$ и составляющей с осью OX угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°, 4) 0°.

27. Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$ и расстояние от этой точки до данных прямых. .

28. Написать уравнения прямой, если точка $A(2,\ 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

29. Написать уравнение прямой, параллельной оси OY и отсекающей на оси OX отрезок, равный : 1) 4; 2) −5; 3) 0.

30. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6,\ 2)$ на прямую $x-4y-7=0$.

2.6. Домашняя работа

Даны точки $A_1(x_1,\ y_{1)}$, $A_2(x_2,\ y_2)$, $A_3(x_3,\ y_3)$, $A_4(x_4,\ y_4)$.

1. Составить уравнения прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 и записать их: 1) в «отрезках на осях»; указать отрезки, отсекаемые прямой от координатных осей; 2) с угловым коэффициентом; указать угловой коэффициент каждой из прямых; 3) как уравнение прямой, проходящей через две точки; указать направляющий вектор, лежащий на каждой из прямых;

2. Изобразить область, ограниченную данными прямыми, и указанной четвертью. Описать область с помощью системы неравенств.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(x_1,\ y_1)$, перпендикулярно прямой A_2A_4.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(x_4,\ y_4)$, параллельно прямой A_1A_3.

5. Найти уравнение и величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на указанную прямую. Сделать чертеж.

Варианты заданий

1. $A_1(-3,\ 2)$, $A_2(1,\ 4)$, $A_3(3,\ 2)$, $A_4(2,\ -2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

2. $A_1(-2,\ -2)$, $A_2(2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 4)$, $A_4(-4,\ -4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$

3. $A_1(2,\ -2)$, $A_2(4,\ 1)$, $A_3(1,\ 4)$, $A_4(-1,\ 0)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

4. $A_1(-4,\ -2)$, $A_2(2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(-4,\ 3)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$

5. $A_1(-5,\ -2)$, $A_2(2,\ 2)$, $A_3(-1,\ 6)$, $A_4(-5,\ 4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$

6. $A_1(-2,\ -2)$, $A_2(7,\ 1)$, $A_3(4,\ 6)$, $A_4(-2,\ 1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

7. $A_1(-1,\ -2)$, $A_2(1,\ 1)$, $A_3(1,\ 4)$, $A_4(-3,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.

8. $A_1(4,\ 1)$, $A_2(3,\ 4)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(2,\ -1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_2$.

9. $A_1(4,\ -1)$, $A_2(6,\ 3)$, $A_3(2,\ 5)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

10. $A_1(-1,\ 5)$, $A_2(3,\ 5)$, $A_3(7,\ 1)$, $A_4(4,\ -3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

11. $A_1(-1,\ -1)$, $A_2(-5,\ 3)$, $A_3(-2,\ 6)$, $A_4(3,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

12. $A_1(3,\ 2)$, $A_2(8,\ -4)$, $A_3(-2,\ -1)$, $A_4(6,\ -5)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_4$

13. $A_1(7,\ 1)$, $A_2(7,\ 5)$, $A_3(-2,\ 5)$, $A_4(3,\ -1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.

14. $A_1(3,\ 2)$, $A_2(2,\ 4)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(1,\ -3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_2$.

15. $A_1(-3,\ -1)$, $A_2(-10,\ 5)$, $A_3(-4,\ 7)$, $A_4(3,\ 4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_4$

16. $A_1(5,\ -2)$, $A_2(7,\ 3)$, $A_3(5,\ 6)$, $A_4(-2,\ 2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

17. $A_1(-3,\ 2)$, $A_2(-8,\ -1)$, $A_3(-1,\ -9)$, $A_4(1,\ -5)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$

18. $A_1(6,\ -4)$, $A_2(5,\ 1)$, $A_3(-2,\ -2)$, $A_4(4,\ -6)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_1A_4$

19. $A_1(-2,\ -2)$, $A_2(1,\ 3)$, $A_3(-4,\ 6)$, $A_4(-5,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.

20. $A_1(-3,\ 2)$, $A_2(-6,\ -2)$, $A_3(-1,\ -6)$, $A_4(1,\ -1)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$

21. $A_1(3,\ 2)$, $A_2(8,\ -2)$, $A_3(1,\ -6)$, $A_4(-1,\ -3)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.

22. $A_1(2,\ 2)$, $A_2(-3,\ 6)$, $A_3(-7,\ 4)$, $A_4(-2,\ -1)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$

23. $A_1(6,\ -22)$, $A_2(6,\ 7)$, $A_3(1,\ 7)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_4$

24. $A_1(4,\ -1)$, $A_2(7,\ 3)$, $A_3(6,\ 6)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \succ 0$; $\perp A_1A_4$.

25. $A_1(5,\ 7)$, $A_2(-2,\ 4)$, $A_3(4,\ -2)$, $A_4(5,\ 0)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

26. $A_1(1,\ -3)$, $A_2(-4,\ 2)$, $A_3(-6,\ -1)$, $A_4(-2,\ -5)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_3A_4$.

27. $A_1(-1,\ -1)$, $A_2(-9,\ 2)$, $A_3(-3,\ 5)$, $A_4(1,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

28. $A_1(1,\ 5)$, $A_2(-3,\ 7)$, $A_3(-7,\ 2)$, $A_4(-1,\ -1)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.

29. $A_1(3,\ 0)$, $A_2(1,\ 1)$, $A_3(-1,\ -5)$, $A_4(4,\ -1)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.

30. $A_1(-2,\ 3)$, $A_2(1,\ 6)$, $A_3(6,\ 5)$, $A_4(5,\ -2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$

2.7. Контрольная работа № 2

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Вершины треугольника находятся в точках $A(M,\ N)$, $B(D,\ N)$, $C(M+1,\ D)$. Найти:

1) уравнение прямой BC и ее угловой коэффициент;

2) расстояние от точки B, до прямой AC;

3) уравнение высоты AH и ее длину;

4) координаты точки $Q-$ пересечения высоты AH и медианы BK;

5) угол между медианой BK и высотой AH;

6) уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника, параллельно противоположным сторонам;

7) описать треугольник ABC с помощью системы неравенств;

8) вычислить площадь треугольника ABC;

9) найти уравнение и величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую AB;

10) сделать чертеж.

2. Определить середины и длины сторон треугольник, если стороны заданы уравнениями: $x+2y=6$, $x-2y=-2$, $x=4$.

3. Плоскость и прямая в пространстве

3.1. Уравнение поверхности

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная поверхность S и уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{37}$$

Уравнение (37) называется уравнением поверхности в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей поверхности, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не принадлежащей поверхности. Степень уравнения определяет порядок поверхности. Поверхность первого порядка называется плоскостью.

3.2. Общее уравнение плоскости

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная плоскость π, точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$ и вектор $\vec{N} \perp \pi$ $\vec{N} = (A, B, C)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z) \in \pi$ (рис.12).

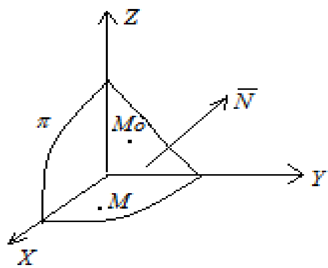

Рис. 12

Построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Он принадлежит плоскости π, следовательно, перпендикулярен вектору $\vec{N}$, и скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N} = 0,$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{38}$$

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{A, B, C\}$, который называется вектором нормали или нормальным вектором.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (39)$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;4;5\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{1,\ 2,\ -3\}$.

Решение. Воспользуемся формулой (38), получим уравнение плоскости:

$$1(x-2)+2(y-4)-3(z-5)=0,$$

$$x+2y-3z+7=0.$$

Пример. Для плоскости $3x-2y+36z+4=0$ определить координаты нормального вектора.

Решение. Определим координаты нормального вектора плоскости, используя уравнение (39): это вектор $\vec{N}=\{3,\ -2,\ 36\}$.

3.3. Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (40)$$

В уравнении (40) вектор нормали $\vec{N}=\{A, B, C\}$ образует с осями координат углы α, β, γ, параметр p - это расстояние от плоскости до точки начала координат O ($p=OM$, рис.13).

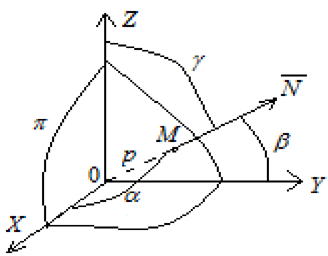

Рис. 13

Если ввести единичный вектор нормали, то нормальное уравнение плоскости можно записать в виде:

$$\mu(Ax+By+Cz+D)=0, \tag{41}$$

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{42}$$

Знак нормирующего множителя определяется так:

а) если $D<0$, то μ – множитель положительный;

б) если $D>0$, то μ – множитель отрицательный.

3.4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть задано нормальное уравнение плоскости (40). Представим уравнение иначе:

$$\frac{\cos\alpha}{p}+\frac{\cos\beta}{p}+\frac{\cos\gamma}{p}=1,$$

$$a=\frac{\cos\alpha}{p};\quad b=\frac{\cos\beta}{p};\quad c=\frac{\cos\gamma}{p},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{43}$$

параметры a, b, c – это отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат (рис. 14).

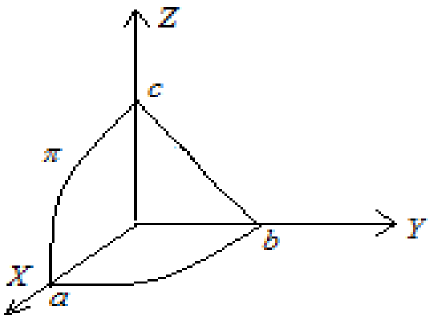

Рис.14

3.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана уравнением общего вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \notin \pi$. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащей плоскости (рис.15), до самой плоскости можно найти, используя нормальное уравнение плоскости (40). Пусть точка $M(x, y, z)$ – проекция точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость π. Точки A, B – проекции точек M, M_0 на вектор $\vec{N}$:

$$OB = p,\ OA = p_0, \quad d = |OA - OB| = |p_0 - p|,$$

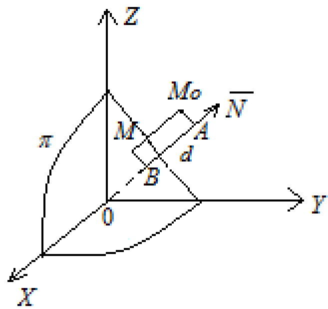

Рис. 15

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma| \tag{44}$$

или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{45}$$

3.6. Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},\ \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Угол φ между плоскостями (рис.16) можно найти как угол между векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$:

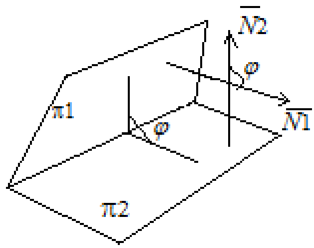

Рис. 16

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}. \tag{46}$$

Пример. Определить угол между плоскостями: $x - z = 0,\ y - z = 0.$

Решение. Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{1, 0, -1\},\ \vec{N}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}. = \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60°.$$

3.7. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2 :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1. Условие перпендикулярности плоскостей (рис. 16) $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, т. е. скалярное произведение векторов равно нулю:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (47)$$

2. Условие параллельности плоскостей (рис. 17) $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$, т. е. соответствующие координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (48)$$

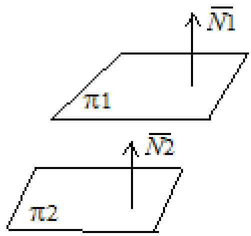

Рис. 17

3.8. Неполные уравнения плоскости

Пусть задано уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0.$

Если один из коэффициентов уравнения равен нулю, мы получим неполное уравнение плоскости:

1) $D = 0,\ Ax + By + Cz = 0$ - плоскость, проходящая через начало координат;

2) $A = 0,\ By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси OX;

3) $B = 0,\ Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси OY;

4) $C = 0,\ Ax + By + D = 0$ – плоскость параллельна оси OZ;

5) $A = 0,\ B = 0,\ Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OXY;

6) $C = 0,\ B = 0,\ Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OYZ;

7) $A = 0,\ C = 0,\ By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OXZ;

8) $A = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ Cz = 0$ – плоскость OXY;

9) $A = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ By = 0$ – плоскость OXZ;

10) $C = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ Ax = 0$ – плоскость OYZ.

3.9. Упражнения

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;4)$, перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-5}$.

2. Найти угол, образованный плоскостью $x-2y+2z-10=0$ с осью OX .

3. Найти угол между плоскостями $2x+3y-z+5=0$, $x-y+4z=0$

4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A_1(1;-1;2)$ и имеет нормальный вектор $\vec{N}=(2;1;-3)$.

5. Точка $P(1;\ -1;\ 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6. Даны две точки $A_1(1;\ -4;\ 3)$ и $A_2(-3;\ 0;\ 1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A_1, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;\ 2;\ -1)$, параллельно векторам $\vec{a}=(2;\ -1;\ 1)$ и $\vec{b}=(-4;\ 3;\ -2)$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(3;-4;1)$, $A_2(5;5;2)$, $A_3(6;0;-3)$.

9. Определить координаты какого-либо нормального вектора каждой из следующих плоскостей:

1) $2x-y-2z+5=0;$ 2) $5x-7y-3=0;$ 3) $x+2y+z=0;$

4) $x-1=0;$ 5) $3y+5z+7=0;$ 6) $z=0;$ 7) $y+5=0;$ 8) $z+3x-1=0.$

10. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $5x-2y+3z-4=0,\ \ 5x-2y+3z+4=0$;

2) $2x+3y+5z+7=0,\ 3x+2y-3z-4=0$;

3) $x-3z+2=0,\ 2x-6z-5=0$.

11. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x+5y-2z+1=0,\ \ 7x-3y-2z+6=0$;

2) $2x+4y-z+1=0$, $3x-y+2z-4=0;$

3) $5x-3y+7z+2=0,\ 2x+y-2z+4=0$.

12. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + ly + 5z - 7 = 0$, $mx - 4y + 5z - 7 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - z - 1 = 0$, $2x - 5y + lz = 0$.

13. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $3x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

14. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат, параллельно плоскости $3x - 5y + 2z - 7 = 0$.

15. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-1;\ 2;\ 1)$ параллельно плоскости $2x + 3y - 4z + 1 = 0$.

16. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1;\ -2;\ 3)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

17. Построить плоскость и найти углы ее нормального вектора с осями координат:

1) $2x - 2y + z - 6 = 0$; 2) $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

18. Найти расстояние точки $(5;\ 1;\ -1)$ от плоскости $x - 2y - z + 4 = 0$.

19. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки, $A_1(1;\ -2;\ 1)$, $A_2(2;\ 2;\ 1)$ и $A_3(4;\ -1;\ 1)$.

20.Найти расстояние точки $(4;\ 3;\ 0)$ от плоскости, проходящей через точки $A_1(1;\ 3;\ 0)$, $A_2(4;\ -1;\ 2)$ и $A_3(3;\ 0;\ 1)$.

21. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x - 2y + 2z - 9 = 0$ и $3x - 2y + 2z + 11 = 0$.

22. Найти точки пересечения плоскости $3x - 2y + 2z - 12 = 0$ с координатными осями.

23. Дано уравнение плоскости $2x - 3y - 4z - 24 = 0$. Написать для нее уравнение «в отрезках».

24. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла OXY .

25. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

26. Плоскость проходит через точку $M_0(6;\,-10;\,1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

3.10. Контрольная работа № 3

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$2Nx+ly+Mz-17=0,\; mx-4Ny+Dz-12=0.$$

2. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

$$Mx-Ny+lz-4=0,\; Nx+My+Dz+15=0.$$

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-N;\;2M;\;D)$ параллельно плоскости $Mx+3y-Nz+1=0$.

4. Найти расстояние точки $(M;\;D;\;N)$ от плоскости, проходящей через точки $A_1(N;\;M;\;0)$, $A_2(5;\;-D;\;N)$ и $A_3(0;\;N;\;M)$.

5. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $Nx-My+Dz-2=0$ и координатными плоскостями.

4. Прямая в пространстве

4.1. Уравнения прямой в пространстве

Линией в пространстве называется множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{49}$$

Система двух уравнений плоскости в пространстве, у которых нормальные вектора $\vec{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\vec{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ неколлинеарные, называется общим уравнением прямой в пространстве (рис. 18):

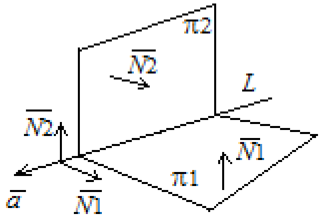

Рис. 18

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{50}$$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, или принадлежащий самой прямой, называется направляющим вектором прямой:

$$\vec{a} = \{l, m, n\}.$$

Пусть точки $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, $M(x, y, z) \in L$ и $\vec{a} \parallel L$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ следовательно, координаты векторов пропорциональны (рис. 19):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{51}$$

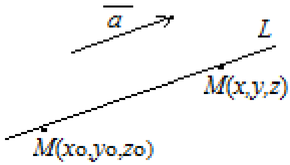

Рис. 19

Уравнение (51) называется каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой (50) можно перевести в каноническое уравнение (51). Пусть две плоскости пересекаются по прямой L. Нормальные вектора плоскостей перпендикулярны плоскостям и прямой, следовательно прямая перпендикулярна нормальным векторам одновременно: $\vec{N}_1 \perp L, \vec{N}_2 \perp L.$.

Выберем любой вектор $\vec{a} \in L, \vec{a} \perp \vec{N}_1, \vec{a} \perp \vec{N}_2$ (рис. 18).

Тогда вектор $\vec{a}$ является векторным произведением векторов $\vec{N}_1, \vec{N}_2$:

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \{l, m, n\}.$$

Точку, принадлежащую прямой, можно найти, задав одну из координат произвольно. После подстановки этой координаты в систему уравнений (49) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример. Записать общее уравнение прямой $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0; \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ в канонической форме.

Решение.

1. Найдем нормальные вектора плоскостей

$$\vec{N}_1 = \{3, 2, 4\},\ \vec{N}_2 = \{2, 1, -3\}.$$

2. Найдем направляющий вектор прямой

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-10, 17, -1\}.$$

3. Пусть $z_0 = 0, z_0 \in L.$ Тогда x_0, y_0 найдем из системы:

$$\begin{cases} 3x_0 + 2y_0 - 11 = 0; \\ 2x_0 + y_0 - 1 = 0; \end{cases} \qquad x_0 = 9,\ y_0 = 19.$$

Ответ: каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-9}{-10} = \dfrac{y-19}{17} = \dfrac{z}{-1}.$

Если уравнение (51) приравнять к некоторому параметру $t \in (-\infty; +\infty),$ то получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0. \end{cases} \tag{52}$$

Если заданы две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то уравнение прямой, проходящее через две точки, можно записать так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{53}$$

4.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые в канонической форме L_1, L_2:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Для каждой из них запишем направляющий вектор

$$\vec{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}, \quad \vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}.$$

Возможны следующие взаимные расположения прямых:

1) прямые пересекаются под углом φ. Угол φ. между прямыми можно выразить как косинус угла между векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}; \tag{55}$$

2) прямые перпендикулярные $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (рис. 20):

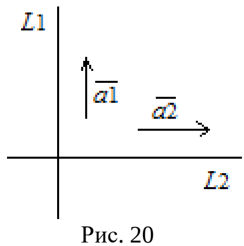

Рис. 20

$$\vec{a}_1\perp\vec{a}_2; \quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0; \tag{56}$$

3) прямые параллельные $\varphi=0$ (рис. 21):

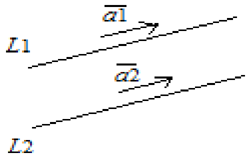

Рис. 21

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2; \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{57}$$

4.3. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть задана прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и точка $M(x_1, y_1, z_1)$, ей не принадлежащая (рис. 22).

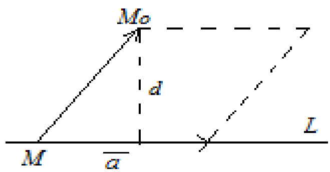

Рис. 22

На прямой выберем произвольную точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Рассмотрим векторы $\vec{a} = \{l, m, n\}$ и $\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$. Построим на этих векторах параллелограмм. Тогда высота параллелограмма будет определять расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times MM_0|}{|\vec{a}|}. \tag{58}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M(3;-1;1)$ до прямой:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{4}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой: $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

Найдем длину вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

За точку, принадлежащую прямой, примем точку $M(2;-1;7)$. Составим вектор $\overrightarrow{MM_0} = \{2-3;-1+1;7-1\} = \{-1;0;6\}$.

Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}, \overrightarrow{MM_0}$:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{MM_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6i - 22j - k = \{-6;-22;-1\}.$$

Найдем площадь параллелограмма как модуль векторного произведения:

$$S = \sqrt{6^2 + 22^2 + 1} = \sqrt{521}.$$

По формуле (58) найдем расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{\sqrt{521}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{521}{26}}.$$

Ответ: $d = \dfrac{\sqrt{521}}{\sqrt{26}}$.

4.4. Упражнения

1. Даны точки $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(0;\ -2;\ 3)$, $C(1;\ 2;\ -1)$, $D(3;\ 1;\ 2)$. Вычислить расстояние между 1) A и C; 2) B и D; 3) C и D.

2. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -4;\ 2)$ и $C(-3;\ 2;\ 1)$, равнобедренный.

3. На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3;\ 4;\ 8)$ равно 12.

4. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -3;\ 7)$ и $B(5;\ 7;\ -5)$.

5. Даны вершины треугольника $A_1(1;\ -4;\ 3)$, $A_2(-3;\ 0;\ 1)$, $A_3(3;\ 2;\ -5)$. Найти середины его сторон.

6. Даны вершины треугольника $A_1(3;\ -4;\ -1)$, $A_2(3;\ 2;\ -2)$, $A_3(-5;\ 0;\ 6)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A_1

7. Прямая проходит через две точки $A_1(1;\ -4;\ 4)$ и $A_2(3;\ -4;\ 2)$. Найти точки пересечения ее с координатными плоскостями.

8. Привести к каноническому виду уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0; \end{cases}$

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-3;\ 0;\ 2)$ параллельно: 1) вектору $\vec{p}=(1;\ -2;\ 3)$; 2) прямой $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

10. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: 1) $(1;\ -2;\ 1)$, $(3;\ 1;\ -1)$; 2) $(3;\ -1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ -3)$; 3) $(0;\ -2;\ 3)$, $(3;\ -2;\ 1)$; 4) $(1;\ 2;\ -4)$, $(-1;\ 2;\ -4)$.

11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;\ 1;\ 2)$ параллельно: 1) вектору $\vec{p}=(-2;\ 1;\ 1)$; 2) прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{2}$; 3) прямой $x=-t+1$, $y=2t-3$, $y=t+2$.

12. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

13. Доказать параллельность прямых:

1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

14. Доказать перпендикулярность прямых:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

15. Найти угол между прямыми:

1) $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$

16. Составить параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку $M_0(1;\ -1;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{p}=(1;\ -2;\ 3)$; 2) проходящей через точки $A_1(1;-2;1)$ и $A_2(2;\ -3;\ -1)$.

17. Показать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1}$ перпендикулярна прямой $x=z+1$, $y=1-z$.

18. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A_0(2;\ -2;\ 1)$ и параллельно прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

19. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A_0(3;\ -2;\ 4)$ на ось Oz.

20. Найти расстояние точки $A_0(2;\ -1;\ 3)$ от прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$.

21. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$.

22. Даны вершины треугольника $A_1(-5;\ 2;\ 3)$, $A_2(3;\ 6;\ -7)$ и $A_3(4;\ -7;\ -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины A_3.

24. Даны вершины треугольника $A_1(1;-2;-4)$, $A_2(3;\ 1;\ -3)$ и $A_3(5;\ 1;\ -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, проведенной из вершины A_2 на противоположную сторону.

25. Найти расстояние точки $A_0(3;\ 0,\ 4)$ от прямой $y=2x+1$, $z=2x$.

26. Даны уравнения движения точки $A(x;\ y,\ z)$: $x=5-2t$, $y=-3+2t$, $z=5-t$. Определить расстояние d, которое пройдет эта точка за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=7$.

27. Составить уравнения движения точки $A(x;\ y,\ z)$, которая имея начальное положение $A_0(3;\ -1,\ -5)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{s}=(-2;\ 6,\ 3)$ со скоростью $v=21$.

28. Составить уравнения движения точки $A(x;\ y,\ z)$, которая двигаясь прямолинейно и равномерно, прошла расстояние от точки $A_1(-7;\ 12;\ 5)$ до точки $A_2(9;\ -4;\ -3)$ за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=4$.

29. Точка $A(x;\ y,\ z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $A_0(20;\ -18,\ -32)$ в направлении противоположном вектору $\vec{s}=(3;\ -4,\ -12)$ со скоростью $v=26$.

30. Даны уравнения движения точки $A(x;\ y,\ z)$: $x=3-4t$, $y=5+3t,\ \ z=-2+12t$. Определить ее скорость v.

31. Найти направляющие косинусы прямой (т.е. направляющие косинусы направляющего вектора прямой) $\begin{cases} x-3y+z-4=0; \\ 3x-2y+z+2=0. \end{cases}$

32. Привести уравнение прямой $\begin{cases} x-3y+4z-2=0; \\ 2x+y-z-3=0; \end{cases}$ к каноническому виду и найти длину направляющего вектора.

4.5. Контрольная работа № 4

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Привести к каноническому виду уравнение прямой:

$$\begin{cases} Nx-2y+Mz-2=0, \\ 3x+Dy+Nz+5=0. \end{cases}$$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-N;\ M+D;\ 2M)$ параллельно: 1) вектору $\vec{p}=(1;\ N;\ N)$; 2) прямой $\dfrac{x-N}{M}=\dfrac{y-D}{2}=\dfrac{z+2}{-N}$.

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через

две данные точки: $(1+N;\ M-2;\ D)$, $(N+3;\ 1;\ M-1)$ и найти расстояние от этой прямой до точки $(2N;\ M;\ -M)$.

4. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} Nx-y+Mz-14=0, \\ 2x+Dy-2Mz+25=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+Ny+Dz+3=0, \\ 2Mx+Dy-z-8=0. \end{cases}$$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(N;\ D;\ -2)$ параллельно прямой $\begin{cases} Dx-2y+Nz+3=0, \\ Mx+Ny-Dz-5=0. \end{cases}$

4.6. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Пусть заданы прямая и плоскость в пространстве соответственно:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Для прямой найдем направляющий вектор $\vec{a}=\{l,m,n\}$, а для плоскости найдем нормальный вектор $\vec{N}=\{A,B,C\}$. Возможны следующие случаи расположения прямой и плоскости в пространстве:

1) пересечение прямой и плоскости под углом φ (рис. 23). Угол φ между прямой и плоскостью можно заменить углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости: $\varphi=90°-\alpha$:

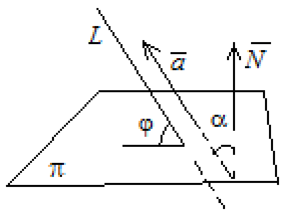

Рис. 23

$$\sin\varphi=\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{N}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{N}|}=\frac{lA+mB+nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad (59)$$

2) прямая и плоскость параллельные, $\varphi=0$ (рис. 24):

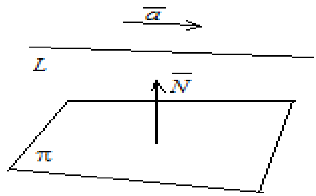

Рис. 24

$$\vec{a} \perp \vec{N}; \quad lA + mB + nC = 0; \tag{60}$$

3) прямая и плоскость перпендикулярные, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 25):

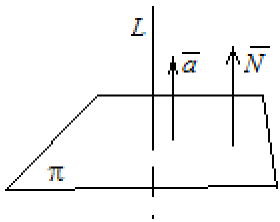

Рис. 25

$$\vec{a} \parallel \vec{N}; \qquad \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \tag{61}$$

4) прямая и плоскость пересекаются в точке $M(x_1, y_1, z_1)$.

Для определения точки пересечения прямой и плоскости переведем уравнение прямой в параметрическую форму и подставим координаты x, y, z прямой $\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0, \end{cases}$ в уравнение плоскости:

$$A(lt + x_0) + B(mt + y_0) + C(nt + z_0) + D = 0.$$

Из полученного уравнения найдем параметр t и вычислим координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ и плоскости $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

Решение. Составим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = t + 6; \\ y = 2t + 3; \\ z = 3t + 2. \end{cases}$$

Подставим значения координат в уравнение плоскости:

$$t + 6 + 2(2t + 3) + 3(3t + 2) - 4 = 0,\ 14t = -14,\ t = 1.$$

Найдем координаты точки пересечения плоскости и прямой:

$$x = 5,\ y = -1,\ x = -1.$$

Ответ: точка $M(5;-1;-1)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

4.7. Упражнения

1. Доказать, что прямая $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

2. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$;

2) $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$, $3x - 2y + z - 3 = 0$;

3) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

3. Доказать, что прямая $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$.

4. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2;\ 1;\ 0)$ на прямую $x = 3z - 1$, $y = 2z$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;\ 1;\ 3)$ перпендикулярно прямой $x = 2$, $y = 2z$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$ и перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z = 4$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$ и $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.

8. Построить плоскость $x+y-z=0$ и прямую, проходящую через точки $A_1(0;\ 0;\ 4)$ и $A_2(2;\ 2;\ 0)$. Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(-2;\ 3;\ 1)$, перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z=-2$.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(-1;\ 2;\ 1)$ и перпендикулярно к прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(-4;\ 5;\ -1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

12. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

13. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$?

14. При каких значениях l и C прямая $\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

15. Найти проекцию точки $A_0(2;\ -1;\ 3)$ на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2+2t$.

16. Найти точку A_0, симметричную точке $A(4;\ 1;\ 6)$ относительно прямой $x-y-4z+12=0$, $2x+y-2z+3=0$.

17. Найти точку A_0, симметричную точке $A(2;\ -5;\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки: $M_1(5;\ 4;\ 6)$ и $M_2(-2;\ 17;\ 8)$.

18. Найти проекцию точки $A_0(5;\ 2;\ -1)$ на плоскость $2x-y+z+23=0$.

19. Найти точку A_0, симметричную точке $A(1;\ 3;\ -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

20. Точка $M(x;\ y;\ z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15;\ -24;\ -16)$ со скоростью $v=12$ в на-

правлении вектора $\vec{s}=(-2;\ 2,\ 1)$. Убедившись, что траектория точки M пересекает плоскость $3x+4y+7z-17=0$, найти:

1) точку P их пересечения;

2) время, затраченное на движение точки M от M_0 до P;

3) длину отрезка M_0P.

21. Точка $M(x;\ y;\ z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(28;\ -30;\ -27)$ со скоростью $v=12{,}5$ по перпендикуляру, опущенному из точки M_0 на плоскость $15x-16y-12z+26=0$. Составить уравнения движения точки M и определить:

1) точку P пересечения ее траектории с этой плоскостью;

2) время, затраченное на движение точки M от M_0 до P;

3) длину отрезка M_0P.

22. Точка $A(x;\ y,\ z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $A_0(11;\ -21,\ 20)$ в направлении вектора $\vec{s}=(-1;\ 2,\ -2)$ со скоростью $v=12$. Определить, за какое время она пройдет отрезок своей траектории, заключенный между параллельными плоскостями $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

23. Вычислить расстояние d от точки $A_0(1;\ -1,\ -2)$ до прямой $\frac{x+}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

24. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ и точку $A_0(2;\ -2,\ 1)$.

25. Составить каноническое уравнение прямой, которая проходит через точку $A_0(3;\ -2,\ -4)$, параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$.

4.8. Контрольная работа № 5

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Даны четыре точки $A_1(M,\ N,\ -D)$, $A_2(D,\ 1-N,\ 2-M)$, $A_3(M+1,\ D,\ N+1)$. Следует составить:

1) канонические уравнения прямых A_1A_2, A_1A_3, A_1A_3. Записать их в параметрической форме; 2) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 3) уравнение прямой A_4M, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$; 4) уравнение прямой A_1H, параллельной плоскости $A_2A_3A_4$; 5) уравнение плоскости, проходящей через точку A_3, параллельно прямой A_1A_2;

Найти: 1) величину перпендикуляра A_4M; 2) точку пересечения прямой A_4M с плоскостью $A_1A_2A_3$; 3) точку P', симметричную точке P, относительно плоскости $A_1A_2A_3$; 4) площадь сечения, проходящего через середины ребер A_3A_1 и A_3A_2, и точку A_4; 5) уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 и перпендикулярно к прямой $\frac{x+2}{M}=\frac{y-1}{-N}=\frac{z-2}{D+1}$.

5. Кривые второго порядка

5.1. Окружность

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом, называется окружностью.

Пусть центр окружности находится в точке O. Точка $M(x,y)$ принадлежит окружности. Тогда

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=R;$$

$$x^2+y^2=R^2. \tag{62}$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(a,b)$, то уравнение окружности запишется так

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{63}$$

Пример. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение. Составим систему уравнений с тремя неизвестными: a, b – координаты центра окружности, R – радиус окружности. Заменив текущие координаты уравнения (63) координатами заданных точек, получим:

$$\begin{cases}(5-a)^2+(5-b)^2=R^2;\\(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2;\\(-1-a)^2+(5-b)^2=R^2.\end{cases}$$

Решив систему, получим искомое уравнение окружности:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$

5.2. Упражнения

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R=5$;

б) центр окружности находится в точке $C(-2;\,0)$ и ее радиус $R=2$;

в) центр окружности находится в точке $C(-4;\,5)$, а окружность проходит через точку $M(-1;\,1)$.

г) концы одного из диаметров окружности имеют координаты $A(0;\,4)$ и $B(6;\,0)$.

2. Показать, что предложенные уравнения определяют окружности. Найти центр C и радиус R каждой из них:

а) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$; б) $x^2+y^2-x+12y-1=0$;

в) $x^2+y^2+3x-7y-\dfrac{3}{2}=0$; г) $x^2+y^2+x-y=0$.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(0;\,1)$; $M_2(2;\,0)$; $M_3(3;\,-1)$.

4. Найти точки пересечения окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и прямой $y=2x$.

5. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.

6. Найти уравнение окружности, касающейся оси OX в начале координат и пересекающей ось OY в точке $A(0;\,10)$.

7. Найти уравнение окружности, касающейся оси OY в начале координат и пересекающей ось OX в точке $B(-12;\,0)$.

8. Написать уравнение касательных, проведенных из точки $M(0;\ 3)$ к окружности: $x^2+y^2-6x+4y-12=0.$

9. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(4;\ -2).$

10. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0,\quad 4x\text{-}3y+12=0,\quad y=0.$

11. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $M_1(0;\ 2);\ \ M_2(1;\ 1);\ \ M_3(2;\ -2).$

12. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0.$

5.3. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ фокусы эллипса, $|F_1F_2|=2c.$

Сумму расстояний от любой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ обозначим через $2a: 2a>2c$ (рис. 26).

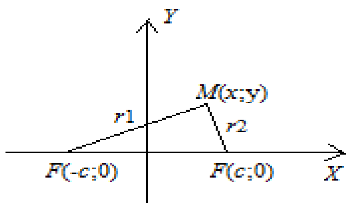

Рис. 26

Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами. По определению эллипса получим уравнение:

$$r_1+r_2=2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right);$$

Пусть $b^2=a^2-c^2;\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{64}$$

Полученное уравнение эллипса называется каноническим.

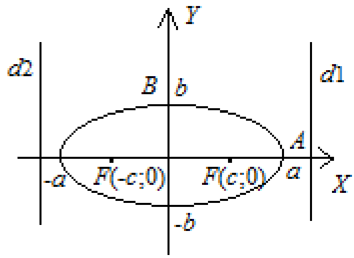

Рис. 27

Основные свойства эллипса (рис. 27):

1) эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат;

2) оси координат называются осями эллипса; начало координат называется центром эллипса;

3) точки пересечения эллипса с осями симметрии эллипса образуют вершины эллипса (точки A и B);

4) если $a \geq b$, то a называется большей полуосью эллипса, b называется малой полуосью эллипса ($2a, 2b$ – большая и малая оси эллипса);

5) если $a \geq b$, то фокусы эллипса находятся на оси OX; если $a \leq b$, то фокусы находятся на оси OY;

6) если $a=b,$ то эллипс вырождается в окружность;

7) связь между полуосями и расстоянием между фокусами определяется формулой:

$$b^2=a^2-c^2; \tag{65}$$

8) эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси эллипса:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \qquad (66)$$

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c<a$, то $0\le\varepsilon\le1$;

2) $\frac{a}{b}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$;

3) эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль оси, на которой находятся фокусы: при $\varepsilon\approx1$ эллипс сильно вытянут вдоль оси, при $\varepsilon\approx0$ эллипс похож на окружность;

9) директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и проходящие на расстоянии ли $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса (проходят за фокусами эллипса, d_1, d_2):

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}; \qquad (67)$$

10) если r – расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету; так как $\varepsilon<1$ то директрисы находятся за пределами эллипса.

Пример. Составить уравнение эллипса, если задана точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$, принадлежащая эллипсу, и его эксцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Решение. Подставим координаты заданной точки в уравнение эллипса: $\frac{2^2}{a^2}+\left(-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b^2}=1.$ Используя понятие эксцентриситета, найдем $\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{4}{9}$, и оценим $c^2=\frac{4}{9}a^2$. Подставим найденное значение в выражение $b^2=a^2-c^2=a^2-\frac{4}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2$. Подставим b^2 в уравнение эллипса.

Найдем значения полуосей $a=3, b=\sqrt{5}$ и получим искомое уравнение эллипса: $5x^2+9y^2=45$.

5.4. Упражнения

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
а) его полуоси равны 6 и 4;
б) расстояние между фокусами равно 10, а большая ось равна 16;
в) малая полуось равна 4, и расстояние между фокусами равно 10;
г) большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,5;
д) малая полуось равна 8, а эксцентриситет равен 0,6;
е) сумма полуосей равна 12,расстояние между фокусами равно $6\sqrt{2}$.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
а) его полуоси равны соответственно 9 и 4;;
б) расстояние между фокусами 12 и эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;
в) его малая ось равна 16, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
г) его большая ось равна 20, расстояние между фокусами равно 16;
д) расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

3. Составить уравнение эллипса, зная, что он проходит через точки:
а) $M_1(2\sqrt{3};\, 0{,}4\sqrt{10})$; $M_2\left(-\frac{5}{2};\, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$; б) $M_1(2;\, -4\sqrt{3})$; $M_2(-1;\, 2\sqrt{15})$.

4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(3;\, 1-2\sqrt{3})$, если его эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

5. Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти:
а) длины его полуосей;
б) координаты фокусов;
в) эксцентриситет эллипса;
г) уравнения директрис и расстояние между ними;
д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса $F_1 = 12$.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; б) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$; в) $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$; г) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

7. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

8. Найти уравнение касательной к эллипсу $5x^2 + 20y^2 = 100$, перпендикулярной прямой $x - y + 50 = 0$.

9. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX, а малая ось равна $2\sqrt{3}$. Каждый из фокусов равноудален от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси.

10. Найти координаты точек эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, для которых расстояние от левого фокуса в два раза больше расстояния от правого фокуса.

11. Дана точка $A\left(2;\, -\frac{5}{3}\right)$ эллипса $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки A.

12. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

5.5. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$ фокусы гиперболы, $|F_1F_2| = 2c$. Сумму расстояний от любой точки $M(x;\ y)$ до точек $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$ обозначим через $2a$. Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами (рис. 26). По определению гиперболы получим уравнение:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \text{ пусть } r_1 > r_2.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right);$$

Пусть $b^2=c^2-a^2;\quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (68)$$

Полученное уравнение гиперболы называется каноническим.

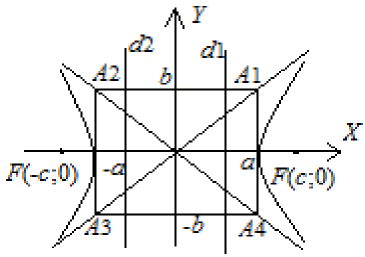

Рис. 28

Основные свойства гиперболы (рис. 28).

1. Гипербола симметрична относительно осей и начала координат. Оси симметрии называются осями гиперболы, центр симметрии называется центром гиперболы.

2. Одна из осей симметрии пересекает гиперболу в двух точках, которые называются вершинами.

3. Ось, на которой находятся вершины гиперболы называется действительной осью (a – действительная полуось), другая ось называется мнимой (b – мнимая полуось).

4. Прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.

5. Фокусы гиперболы находятся на действительной оси.

6. Связь между полуосями и расстоянием между фокусами:

$$b^2=c^2-a^2; \qquad (69)$$

7. Гипербола, определяемая уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (70)$$

называется сопряженной; у сопряженной гиперболы фокусы находятся на оси OY и $a^2=c^2-b^2$.

8. Прямые, заданные уравнениями:

$$y=\pm\frac{b}{a}, \qquad (71)$$

называются асимптотами гиперболы; асимптоты – это диагонали главного прямоугольника гиперболы.

9. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси гиперболы:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \qquad (72)$$

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c > a$, то $\varepsilon>1$;

2) $\frac{a}{b}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$

10. Директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра гиперболы (директрисы проходят между фокусами гиперболы):

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (73)$$

11. Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ –есть величина постоянная, равная эксцентриситету: $\frac{r}{d}=\varepsilon.$

Пример. Установить какую кривую задает уравнение:

$$y=7-1{,}5\sqrt{x^2-6x+13.}$$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $y-7=-1{,}5\sqrt{x^2-6x+13.}$

Возведем уравнение в квадрат, получим:

$$\left(y-7\right)^2 = 2,25\left(x^2-6x+13\right).$$

Выделяя полный квадрат для переменной x, получим искомое уравнение:

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{4}-\frac{\left(y-7\right)^2}{9}=-1.$$

Это уравнение определяет гиперболу с центром в точке $M(3;7)$, полуосями $a=2, b=3$, фокусами, находящимися на оси, параллельной оси OY (70).

5.6. Упражнения

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между фокусами 30;
б) действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет равен 1,4;
в) расстояние между фокусами равно 10 и мнимая ось равна 8;
г) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20;
д) расстояние между директрисами $\frac{28}{3}$ и расстояние между фокусами равно 26.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) ее полуоси равны 6 и 18;
б) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$;
в) уравнения асимптот $y=\pm 2,4x$ и расстояние между вершинами равно 48;
г) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет равен $\frac{7}{5}$;
д) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 6,4.

3. Составить уравнение гиперболы, которая проходит через точки: а) $M_1\left(3;\ \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и $M_2\left(-2\sqrt{5};\ 3\right)$; б) $M_1\left(\frac{\sqrt{32}}{3};\ 1\right)$ и $M_2(8;\ 0)$.

4. Дано уравнение гиперболы $5x^2-4y^2=20$. Найти: а) длины ее полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы; г) уравнения асимптот и директрис; д) фокальные радиусы точки $M(3;\ 2{,}5)$.

5. Составить уравнение гиперболы, если точка $A(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ лежит на гиперболе и ее эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

6. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2;\ 4)$ и $F_2(12;\ 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

7. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

8. Найти эксцентриситет гиперболы, зная, что расстояние между фокусами в 4 раза больше расстояния между ее директрисами.

9. На гиперболе $9x^2-16y^2=144$ найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 3 раза больше, чем от правого.

10. Через правую вершину гиперболы $3x^2-4y^2=12$ и точку $M(0;\ -1)$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

11. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

12. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{54}-\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

13. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y=+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; б) $y=-3\sqrt{x^2+1}$; в) $x=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$; г) $y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$.

14. Дана точка $M(10;\ -\sqrt{5})$ на гиперболе $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M.

15. Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус ее точки M, проведенный из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить

расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

16. Эксцентриситет гиперболы равен 3, расстояние от точки A гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки A до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

17. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5;\,0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x - 16 = 0.$

18. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8.$ Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точки $A(4;\,6).$

19. Составить уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1.$

20. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 4.$ Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(2;\,3).$

21. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 1.$ Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

22. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

23. Найти фокальные радиус–векторы гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках пересечения ее с окружностью $x^2 + y^2 = 91.$

24. Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40.$ Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

25. Найти расстояние между точками пересечения асимптот гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ с окружностью, имеющий центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

26. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. Найти точку, расстояние которой от асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом было бы в два раза больше, чем расстояние ее от асимптоты с положительным угловым коэффициентом.

5.7. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, называемой фокусом, и от данной прямой BD, называемой директрисой, не проходящей через фокус (рис. 29).

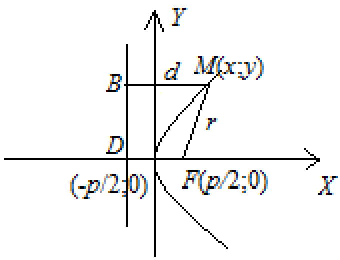

Рис. 29

Пусть если $MB=d$, $MF=r$, $FD=p$, r - фокальный радиус, p – параметр параболы, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболы, точка D имеет координаты $D\left(-\frac{p}{2};0\right)$ и принадлежит директрисе параболы $x=-\frac{p}{2}$.

По определению параболы получим: $r=d$.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2};$$

$$y^2=2px. \tag{74}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением параболы. Аналогично можно вывести уравнения вида:

$$y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py. \qquad (75)$$

Свойства параболы.

1. Парабола симметрична относительно оси, на которой находятся фокусы (OX).

2. Точка $O(0;0)$ является центром параболы; ось симметрии (OX) является осью параболы.

3. p – параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы ($p > 0$).

Пример. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2 = 16y$ и перпендикулярна к прямой $y = 2x + 5$.

Решение. Искомая прямая перпендикулярна данной, следовательно, ее угловой коэффициент равен -0,5. Тогда искомое уравнение имеет вид: $y = -0{,}5x + b$. Прямая касается параболы, следовательно, имеет с ней одну общую точку, которую можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + b; \\ x^2 = 16y. \end{cases}$$

Получим уравнение: $x^2 - 32x - 16b = 0$.

Из условия $32^2 + 4 \cdot 16b = 0$, получим значение $b = -16$. .

Искомое уравнение имеет вид: $y = -0{,}5x - 16$.

Ответ: $y = -0{,}5x - 16$.

5.8. Упражнения

1. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр $p = 3$;

б) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси OX и ее параметр $p = 0{,}5$;

в) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр $p = 0{,}25$;

г) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр $p = 3$.

2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена симметрично относительно оси OX и проходит через точку $A(9;\,6)$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси OX и проходит через точку $B(-1;\,3)$;

в) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $C(1;\,1)$;

г) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $D(4;\,-8)$.

3. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:
а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

4. Дана парабола $x^2 = -4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4;\,4)$.

5. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x + 5$. Построить эскиз графика.

6. Составить уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью OX.

7. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OX и отсекающей от прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

9. Парабола $y^2 = 2x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна $\frac{3}{4}$. Составить уравнение этой прямой.

10. Составить уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

11. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.

12. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OX и проходящей через точку

$M(4;2)$; определить угол α между фокальным радиус–вектором этой точки и осью OX .

13. Определить точки пересечения прямой $x+y-3=0$ и параболы $x^2=4y$.

14. Определить точки пересечения прямой $3x-2y+6=0$ и параболы $y^2=6x$.

15. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=8x$, и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

16. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна прямой $2x+4y+7=0$.

17. Из точки $A(5;9)$ проведены касательные к параболе $y^2=5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

5.9. Общее уравнение линии второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{76}$$

$A, 2B, C, 2D, 2E, F$ – числа, причем A, B, C – одновременно не равные нулю. Составим квадратичную форму из коэффициентов уравнения:

$$L(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2. \tag{77}$$

Пусть $\delta=AC-B^2$. По знаку δ (малый дискриминант) можно определить вид кривой:

1) если $\delta>0$, уравнение (76) относится к эллиптическому виду;
2) если $\delta<0$, уравнение (76) относится к гиперболическому виду;
3) если $\delta=0$, уравнение (76) относится к параболическому виду.

Справедлива лемма. Пусть в прямоугольной системе координат XOY задано общее уравнение линии второго порядка (76) и пусть $\delta\neq 0$. Тогда с помощью параллельного переноса и поворота осей координат данное уравнение примет вид:

$$A^*x_2^2+C^*y_2^2+F^*=0, \tag{78}$$

A^*, C^*, F^* – числа, x_2, y_2 – координаты в новой системе координат.

Координаты нового начала координат после параллельного переноса $O_1(x_0;y_0)$ можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}; \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{79}$$

С учетом параллельного переноса свободный член уравнения вычисляется по формуле:

$$F^* = Dx_0 + Ey_0 + F. \tag{80}$$

Получим новое уравнение:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F = 0. \tag{81}$$

Угол поворота осей координат можно найти, зная тангенс угла поворота:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2B}{A-C}. \tag{82}$$

Зная угол поворота осей координат, оценим коэффициенты уравнения кривой:

$$A^* = C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + A\cos^2\alpha, \tag{83}$$

$$C^* = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \tag{84}$$

$$D^* = D\cos\alpha + E\sin\alpha, \quad E^* = E\cos\alpha - D\sin\alpha. \tag{85}$$

В результате получим коэффициенты уравнения (78).

Теорема. Пусть в прямоугольной системе координат задано уравнение (77). Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение примет вид:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 -$ эллипс;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 -$ мнимый эллипс;

3) $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$ – пара мнимых прямых;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $y^2 = 2px$ – парабола;

7) $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

Пример. Определить вид кривой и построить ее:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Решение. Составим квадратичную форму кривой:

$$L(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2.$$

Оценим $\delta = AC - B^2 = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = -16.$ Следовательно, эта кривая относится к гиперболическому виду.

Найдем координаты центра кривой по формулам (79):

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{3-35}{-16} = 2; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{21-5}{-16} = -1.$$

Определим угол поворота осей координат α по формуле (82):

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{10}{3-3} = \dfrac{10}{0}$ – не существует, следовательно, удвоенный угол поворота равен 90°. Сам угол поворота равен 45°.

Учтем параллельный перенос осей координат и их поворот, пересчитаем значения коэффициентов по формулам (80), (83 – 85):

$$F^* = -1 \cdot 2 - 7(-1) - 13 = -8;$$

$$A^* = 3\sin^2\frac{\pi}{4} + 10\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 3\cos^2\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 8;$$

$$C^* = 3\sin^2\frac{\pi}{4} - 10\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 3\cos^2\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = -2;$$

Уравнение примет вид:

$$8\left(x^*\right)^2 - 2\left(y^*\right)^2 - 8 = 0; \quad 8\left(x^*\right)^2 - 2\left(y^*\right)^2 = 8;$$

$$\frac{\left(x^*\right)^2}{1} - \frac{\left(y^*\right)^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, смещенной в точку $C(2; -1)$ и повернутой на угол 45° (рис. 30).

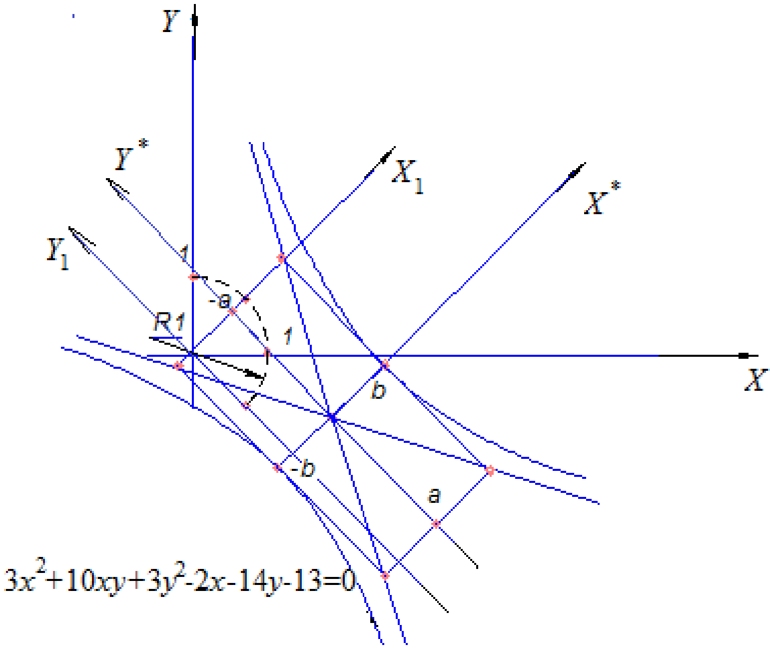

Рис. 30

Пример. Определить вид кривой в зависимости от параметра λ:

$$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0.$$

Решение. Раскроем скобки в уравнении: $x^2 + \lambda y^2 - 2x\lambda - 2y = 0.$.

Составим $\Delta = AC - B^2 = \lambda$ и оценим параметр λ:

1) $\Delta = \lambda > 0$, эллипс;
2) $\Delta = \lambda < 0$, гипербола;
3) $\Delta = \lambda = 0$, парабола.

Получим эти кривые:

1) $\left(x-\lambda\right)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ при $\lambda>0$;

2) $\left(x-\lambda\right)^2-\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ при $\lambda\in(-\infty;-1)\cup(-1;10)$ и $x-y=0$ и $x+y=-2$ при $\lambda=-1$;

3) $x^2=2y$ при $\lambda=0$.

5.10. Упражнения

1. Определить точки пересечения эллипса и параболы: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1;\quad y^2=24x.$

2. Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ и параболы $y^2=3x.$

3. Определить точки пересечения парабол $y=x^2-2x+1,$ $x=y^2-6y+7.$

4. Найти уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y=-2x^2-6x-4$, параллельно прямой $2x-y+3=0.$

5. Дана парабола $y^2=12x.$ Найти длину ее хорды, проходящей через точку $M(8;0)$ и наклоненной к оси OX под углом 60°.

6. Привести к каноническому виду уравнения следующих кривых:

1) $9x^2+25y^2=225;$ 2) $y=2x^2-x+5;$

3) $x^2+y^2-10x+2y+1=0;$ 4) $9x^2-4y^2-36x-8y-4=0;$

5) $25x^2+4y^2+50x-32y-11=0;$ 6) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0;$

7) $3x^2-4xy-2x+4y-5=0;$ 8) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0;$

9) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0;$ 10) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0;$

11) $xy-3y+4x-20=0;$ 12) $9x^2+4y^2-18x-8y-23=0;$

13) $4x^2+9y^2+16x+18y-11=0;$ 14) $x^2-4y^2+6x+16y-11=0;$

15) $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0;$ 16) $5x^2+12xy+10y^2-6x+4y-1=0;$

17) $xy+2y-x+2=0;$ 18) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0;$

19) $8x^2+6xy+3y+6x+1=0;$ 20) $25x^2-30xy+9y^2+68x+19=0;$

21) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0;$ 22) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0;$

23) $x^2-2xy+y^2-x+y-2=0;$ 24) $2x^2-2xy-4y^2-x+4y-1=0;$

25) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0.$

7. Написать каноническое уравнение эллипса и гиперболы, если фокусы их находятся на оси OX, большая полуось эллипса равна действительной полуоси гиперболы и равна радиусу окружности $x^2+y^2-2x+2y-14=0,$ фокусное расстояние эллипса равно 6, а для гиперболы в два раза больше.

8. Найти расстояние между фокусами параболы $y^2=4x$ и эллипса $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$

9. Найти расстояние от центра окружности $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=6$ до вершины параболы $y=-x^2+2x-\frac{1}{3}.$

5.11. Контрольная работа № 6

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M число месяца рождения студента.

1. Найти координаты центра C и радиус R окружности

$$x^2+y^2-2Nx+6My+4M^2=0.$$

2. Написать уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2+x-8y-6=0$; $x^2+y^2-6x-3y-1=0$.

3. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и директрисы кривых: а) $x^2+Ny^2=3M$; б) $2Nx^2-4My^2=NM$. Построить эти кривые.

4. Написать каноническое уравнение параболы $(y^2=2px)$, если расстояние от фокуса до директрисы равно M.

5. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y = x^2 / N$.

6. Написать уравнение эллипса, если известны координаты вершин $A(7;2)$, $B(3;4)$ и одного из фокусов $F(6;2)$ эллипса.

6. Вопросы по курсу аналитической геометрии

1. Уравнение линии на плоскости. Уравнения прямых на плоскости.
2. Угол между прямыми на плоскости.
3. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
4. Взаимное расположение прямых на плоскости.
5. Плоскость в пространстве. Уравнения плоскости в пространстве.
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. Угол между плоскостями.
8. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
9. Прямая в пространстве. Уравнения прямой в пространстве.
10. Угол между прямыми в пространстве.
11. Угол между прямой и плоскостью в пространстве.
12. Взаимное расположение прямых в пространстве.
13. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
14. Уравнение окружности и её свойства.
15. Уравнение эллипса и его свойства.
16. Уравнение гиперболы и её свойства.
17. Уравнение параболы и её свойства.
18. Общее уравнение кривой второго порядка.
19. Преобразования на плоскости: поворот и параллельный перенос.
20. Построение кривых второго порядка с учетом преобразования на плоскости.

Библиографический список

1. *Бортаковский, А. С.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2005. – 496 с.

2. *Владимирский, Б. М.* Математика. Общий курс: учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2002. – 960 с.

3. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – 12–е изд., стер. – М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит.,1977. – 872 с.

4. Высшая математика для экономистов: учебник / [Кремер Н. Ш. и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., стер., – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

5. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие: в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – 2–е изд., стер. – М.: Высшая. школа, 1974. – 416 с.

6. *Ильин, В. А.* Аналитическая геометрия: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позднякю – 6–е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

7. *Клетеник, Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. – СПб.: Профессия, 2003. – 224 с.

8. *Красс, М. С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – 3–е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.

9. *Минорский, В. П.* Сборник задач по высшей математике: учебное пособие / В. П. Минорский. – 14-е изд., испр. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. – 336 с.

10. *Окунева, Г. Л.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Г. Л. Окунева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. – 122 с.

14. *Постников, М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия: учебное пособие / М. М. Постников. – 2–е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., 1986. – 416 с.

15. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / [В. И. Ермаков и др.]; под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

16. *Ситников, Б. Д.* Квадратичные формы: учебное пособие / Б. Д. Ситников, А. Н. Окунев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2014. – 70 с.

17. *Фаддеев, Д. К.* Задачи по высшей алгебре: практикум: учебное пособие / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – СПб.: Лань, 1998. – 288 с.

Оглавление

Учебное издание

Окунева Галина Леонидовна
Рябцева Светлана Васильевна
Селиванова Елена Вячеславовна
Дюкарева Валерия Игоревна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Учебное пособие

Подписано в печать 05.12.16. Формат 60×84/16. Усл. печ. л.. Уч.-изд. л..
Тираж 200 экз. Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46