МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Г.М. Редькин
А.С. Горлов
Е.И. Толмачева

Теория вероятностей

Учебное пособие

Белгород
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Г.М. Редькин
А.С. Горлов
Е.И. Толмачева

Теория вероятностей

Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов младших курсов технических направлений и специальностей

Белгород
2017

УДК 519.21(07)
ББК 22.171 я7
Р 33

Рецензенты:
Доктор физико–математических наук, профессор Белгородского юридического института МВД РФ им. И.Д. Путилина,
С.Е. Савотченко
Доктор физико–математических наук, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова,
А.Г. Брусенцев

Редькин Г.М.
Р 33 Теория вероятностей: учебное пособие/Г.М. Редькин, А.С. Горлов, Е.И. Толмачева.–Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. – 155 с.

Учебное пособие подготовлено в соотвествии с тебованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и рабочей программы дисциплины «Математика», содержит основные теоретические положения. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами.

Издание предназначено для студентов младших курсов технических направлений и специальностей.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.21(07)
ББК 22.171я7

Содержание

Введение

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и рабочей программы дисциплины «Математика».

Предлагаемое пособие написано на основе лекций, прочитанных авторами в течение последних лет в БГТУ им. В.Г. Шухова. Теория вероятностей изложена на современном языке с использованием теоретико-множественных и пространственно-топологических представлений в доступной для понимания форме.

Структура пособия выдержана в строгом соответствии с логикой представления материала: вероятностное пространство; теоремы теории вероятностей; случайные величины; характеристики случайных величин; законы распределения вероятностей; законы больших чисел.

Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач по темам и может быть использовано как при изучении лекционного курса, так и на практических занятиях.

Приведенные доказательства можно при первом чтении не разбирать, а пользоваться лишь их утверждениями для понимания смысла и идеи развития теории вероятностей.

Учебное пособие рассчитано на широкую аудиторию: студентов, аспирантов, преподавателей, слушателей магистратуры, научных сотрудников.

Краткая историческая справка

Теория вероятностей возникла в XVII веке из потребностей практики при исследовании задач, относящихся к массовым случайным событиям и явлениям. К этому времени относят первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, судебная статистика несчастных случаев.

Важную роль в зарождении и развитии теории вероятностей сыграли Б. Паскаль (1623–1662), П. Ферма (1601–1665), Х. Гюйгенс (1629–1695), которые при исследовании азартных игр применяли комбинаторные методы. Они ввели такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание, и установили их основные свойства и приемы вычисления.

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Я. Бернулли (1654–1705), которому принадлежит доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей–так называемого закона больших чисел.

Дальнейшими успехами в развитии теория вероятностей обязана Муавру (1667–1754), П. Лапласу (1749–1827), К. Гауссу (1777–1855), которые обосновали законы распределения вероятностей, доказали предельные теоремы, разработали метод наименьших квадратов.

Новый наиболее плодотворный период связан с именами русских математиков П.Л. Чебышева (1821–1894) и его учеников А.А. Маркова (1856–1922) и А.М. Ляпунова (1857–1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.

Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам С.Н. Бернштейну, В.И. Романовскому, А.Н. Колмогорову, Л.Я. Хинину, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнову и др.

Возникнув из изучения комбинаторных задач азартных игр–пороков человеческого общества, теория вероятностей в настоящее время широко применяется в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи, обороне страны. Теория вероятностей также служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, приемочном контроле качества продукции. Она все шире проникает в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА.

Глава 1. Вероятностное пространство

§ 1.1. Логические символы и элементы теории множеств

Математические тексты представляют собой формулы соединенные логическими символами (знаками). Приведем некоторые из них:

$\Rightarrow$ –«следует»;

$\Leftrightarrow$ –«тогда и только тогда» либо «необходимо и достаточно»;

$\forall$ –квантор всеобщности означает «для каждого» либо «для всех»;

$\exists$ –квантор существования означает «существует».

Для понимания теории вероятностей приведем ряд теоретико-множественных определений.

Понятие множества является одним из первичных основных математических понятий и поэтому ему нельзя дать точное определение. Все первичные понятия объясняют на примерах и приводят слова синонимы, которые их заменяют. Так вместо слово множество можно использовать синонимы: собрание, совокупность, класс, отряд, группа и т.д.. Примерами множеств являются: множество натуральных чисел N, множество всех точек прямой, множество студентов в аудитории и т.д..

Множества состоят из элементов $x, y, a, b, \ldots$ и множества обозначают прописными буквами латинского алфавита без индексов либо с нижними индексами: $A, B, C, A_1, B_3, H, \ldots$. Принадлежность и не принадлежность элемента x множеству A соответственно обозначают $x \in A$ и $x \overline{\in} A$.

Элементы множества перечисляют в фигурных скобках, если это возможно, либо указывают на свойства элементов множества.

Множество Ø называют пустым, если оно не содержит ни одного элемента.

<u>Примеры:</u> _ множество натуральных чисел; $R = \{x; -\infty < x < +\infty\}$ – множество действительных чисел; $A = \{x; x = (x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ – множество точек окружности с центром в начале координат и радиусом единица; $A = \{x, x^2 + x + 1 = 0\}$ – множество корней квадратного уравнения.

Множества подчиняются двум отношениям.

Определение 1. (Отношение включения множеств) Множество A называется подмножеством или частью множества B, если из того, что элемент $x \in A$ следует $x \in B$.

Принадлежность подмножества A множеству B обозначают $A \subset B$.

Пусть, например, N – множество всех натуральных чисел, а Q – множество всех рациональных чисел, тогда $N \subset Q$.

Ясно, что всякое множество есть часть самого себя $A \subset A$, а пустое множество Ø – часть любого множества A, Ø $\subset A$.

Определение 2. (Отношение равенства множеств) Множество A равно множеству B, $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множества A и B равны тогда и только тогда, когда $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{и} B \subset A$.

Например, если $A = \{-3,5\}$ а $B = \{x; x^2 - 2x - 15 = 0\}$–множество корней квадратного уравнения в фигурных скобках, то $A = B$.

Для количественного сравнения элементов множеств важно понимание взаимнооднозначного соответствия между элементами множеств.

Определение 3. Взаимнооднозначным соответствием между множествами A и B называется правило, по которому элемент множества A отвечает только один элемент множества B и наоборот каждому элементу множества B отвечает только один элемент множества A.

Определение 4. Множества A и B называются эквивалентными или имеющими одинаковую мощность, если между ними установлено взаимнооднозначное соответствие.

Эквивалентные или равномощные множества обозначают $A \sim B$.

Два конечных множества будут эквивалентными тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. Поэтому понятие эквивалентности (одинаковой мощности) является обобщением понятия одинаковости количества.

Определение 5. Множество A с бесконечным количеством элементов называется счетным, если оно эквивалентно (равномощно) множеству всех натуральных чисел $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$.

Для того чтобы множество A было счетным необходимо и достаточно, чтобы его можно было «перенумеровать», т.е. представить в виде последовательности $A = \{a_1, a_2, a_3, ..a_n, \ldots\}$.

Однако не все бесконечные множества счетны. Существуют бесконечные множества большей мощности чем счетные. Например, множества мощности континуума. К ним относятся непрерывные множества точек любых отрезков, интервалов, полуинтервалов числовых осей и сами числовые оси.

§ 1.2. Предмет и специфика теории вероятностей

В основе теории вероятностей лежат представления об испытании и исходах испытания. В силу первичности данных представлений им нельзя дать строгие точные определения. Первичные понятия в математике, в том числе и данные объясняют на примерах и приводят слова синонимы, которые их заменяют.

Так испытание эквивалентно понятиям опыт, эксперимент, наблюдение, а исход равносилен понятиям результат, итог, которые взаимно исключают друг друга.

Рассмотрим поясняющие примеры:

1. Испытание–однократное подбрасывание монеты.

Исходы: на видимой стороне–герб, на видимой стороне–цена.

2. Испытание–однократное подбрасывание игральной кости.

Исходы: на видимой стороне выпало i очков, где $i = 1,2,3,4,5,6$.

3. Испытание–студент сдает экзамен.

Исходы: получил неуд., удовл., хор., отл..

4. Испытание–человек заболел гриппом.

Исходы: больной выздоровел, получил осложнение, умер.

Различные совокупности исходов образуют случайные события. Например, в испытании–студент сдает экзамен, случайными событиями, являются: получил неуд. Или удовл.; хор. или отл.; удовл. или хор. или отл.;и так далее–всего $2^4 = 16$ событий.

Как видим, каждому испытанию отвечают достаточно много событий, множественность которых называют массовостью. Оказывается, что массовые случайные события независимо от их конкретной природы подчиняются закономерностям.

Таким образом, предметом теории вероятностей являются закономерности массовых случайных событий.

Специфика теории вероятностей заключается в том, что в отличии от многих других математических дисциплин, между исходами испытания нельзя ввести понятие расстояния и представить множество исходов в качестве метрического пространства. Следовательно, нельзя перейти к понятию предела, на котором основано дифференциальное и интегральное исчисления.

Современный период развития теории вероятностей связан с именем советского математика А.Н. Колмогорова. Поскольку исходы испытания неметризуемы, он перешел к обобщению метрических пространств, к топологическим пространствам и ввел во множество исходов топологию, представляющую собой систему подмножеств, удовлетворяющую теоретико-вероятностным аксиомам.

Таким образом, на базе теории множеств, топологии исходов испытания, нормированной на единицу вероятностной меры была пересмотрена и представлена теория вероятностей в строгом математическом изложении, которому последуем в настоящей работе.

§ 1.3. Выборочное пространство. Случайные события

Рассмотрим некоторое испытание и его исходы.

Определение 1. Исходы испытания называют также элементарными событиями и обозначают ω.

Определение 2. Выборочным пространством или пространством элементарных событий называют множество всех логически возможных исходов. Его обозначают

$$\Omega = \{\omega\}.$$

Принадлежность элементарных событий выборочному пространству обозначают

$$\omega \in \Omega.$$

Будем изучать такие испытания, которые приводят к пространствам элементарных событий Ω, выраженными либо конечными, либо счетными, либо непрерывными множествами исходов.

Определение 3. Пространство Ω называется конечным, если оно состоит из конечного числа элементарных событий

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..\omega_N\}.$$

Определение 4. Пространство Ω называется дискретным, если оно содержит не более чем счетное количество исходов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..\omega_n, ...\}.$$

Замечание. Таким образом, к дискретным относятся пространства элементарных событий Ω, содержащее либо конечное, либо счетное множество исходов.

Определение 5. Пространство Ω называется непрерывным, если его исходы суть множество мощности континуума

$$\Omega = \{x; x \in < a, b >\},$$

где промежуток $< a, b >$ представляет собой либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал числовой оси, либо всю числовую ось $(a = -\infty, b = +\infty)$.

Определение 6. Случайным событием или просто событием называют подмножество выборочного пространства Ω.

Случайные события обозначают прописными буквами латинского алфавита без индексов или с нижними индексами $A, B, C, A_1, B_3, H, \ldots$. События представляют множества исходов $A = \{\omega\}$, а их принадлежность выборочному пространству обозначают $A \subset \Omega$.

Определение 7. Невозможным событием Ø называют событие не содержащее ни одного исхода.

Определение 8. Исходы $\omega_i \in A,\ i = 1,2,\ldots,m$, составляющие событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, называются исходами благоприятствующими событию A.

Говорят, что «событие A произошло», если в результате испытания появился (реализовался, осуществился) исход благоприятствующий событию A.

Поэтому событие Ø с пустым множеством исходов называется невозможным, т.к. в результате любого испытания ни при каком исходе ω оно не может произойти.

Выборочное же пространство Ω содержит все исходы, представляет собой самое «большое» событие и, следовательно, оно произойдет при любом исходе испытания. Поэтому пространство элементарных событий Ω называют достоверным событием. Для невозможного события Ø, случайного события A и выборочного пространства Ω справедливы соотношения

$$\varnothing \subset A \subseteq \Omega.$$

Пример. Испытание–однократное подбрасывание игральной кости.

Исходы: ω_i –выпало i очков на верхней грани кости, где $i = 1,2,\ldots,6$.

Данному испытанию с исходами отвечают:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$–пространство элементарных событий;

$A = \{\omega_3\}$, $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $C = \{\omega_2, \omega_4\}$–примеры некоторых событий.

Если в результате испытания выпадут:

1) одно очко, то произойдет событие B;
2) два очка, то произойдут события B и C;
3) три очка, то произойдут события A и B;
4) четыре очка, то произойдет событие C;
5) пять либо шесть очков, то события A, B, C не произойдут.

Однако заметим, что достоверное событие Ω произойдет при любом, а невозможное событие Ø не произойдет ни при каком исходах испытания.

§ 1.4. Операции над событиями. Алгебра событий

Поскольку событие отождествляется с множеством, то над событиями можно совершать все операции и отношения между событиями, выполняемые над множествами.

В качестве геометрической иллюстрации операций над событиями и различных отношений между ними будем использовать диаграммы Эйлера–Венна, на которых исходы изображаются в виде точек, а события в виде множеств точек плоскости.

Пусть с некоторым испытанием связаны события A и B. Отношению включения множества A во множество B соответствует последование события B за событием A.

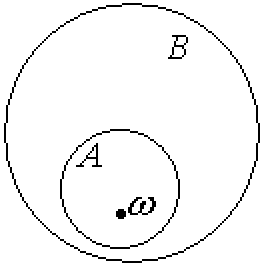

Рис.1.1. Включение события A в событие B

Действительно, согласно приведенной диаграмме (рис.1.1), из того, что в результате испытания исход $\omega \in A$ следует, что $\omega \in B$, т.е.

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B.$$

Определение 1. Событие A называется причиной или частным случаем события B, а B следствием события A, если каждый исход испытания, благоприятный для события A, является благоприятным также и для события B.

Пример. Событие A –пойман карп, а событие B –поймана рыба. Из события A –пойман карп следует событие B –поймана рыба, но не наоборот. Значит карп–частный случай рыбы, а рыба–следствие карпа.

Определение 2. События A и B называются равными, если каждое из них является следствием другого

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Определение 3. Суммой или объединением событий A и B называется событие $A \bigcup B$ (рис. 1.2), состоящее из исходов благоприятствующих хотя бы одному из событий A или B.

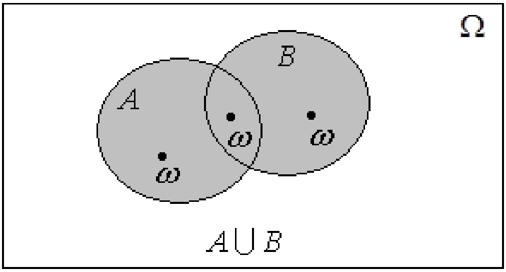

Рис. 1.2. Сумма событий A и B

Сумма событий $A \bigcup B$ произойдет, если произойдут хотя бы одно из событий A или B.

В общем случае, сумма n событий

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

произойдет, если произойдут хотя бы одно из этих событий.

Определение 4. Произведением или пересечением событий A и B называется событие $A \bigcap B$ (рис. 1.3), состоящее из исходов, принадлежащих и событию A, и событию B.

Произведение событий $A \bigcap B$ произойдет, если произойдут и событие A, и событие B.

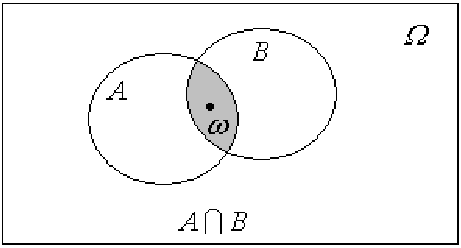

Рис. 1.3. Произведение событий A и B

Аналогично, произведение n событий $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ произойдет, если одновременно произойдут все эти события.

Определение 5. Разностью событий A и B называется событие $A \setminus B$ (рис. 1.4), состоящее из исходов, принадлежащих событию A, но не принадлежащих событию B.

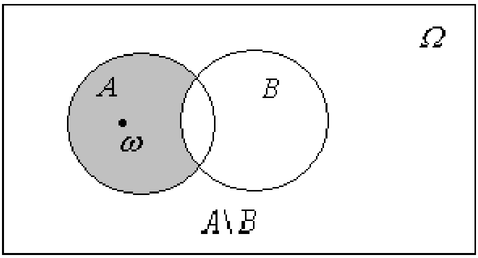

Рис. 1.4. Разность событий A и B

Разность событий $A \setminus B$ произойдет, если событие A произойдет, а событие B не произойдет.

Определение 6. Событием $\overline{A}$ (не A) называется событие противоположное событию A (рис. 1.5), если оно состоит из исходов не благоприятствующих событию A.

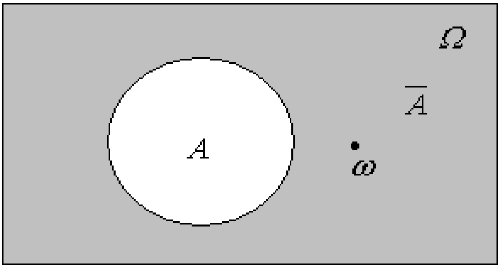

Рис. 1.5. Противоположное событие $\overline{A}$

Событие противоположное $\overline{A}$ произойдет, если событие A не произойдет. Событие $\overline{A}$ можно определить выражением $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Определение 7. События A и B называются несовместными (рис. 1.6), если их произведение равно невозможному событию $A \bigcap B = \varnothing$.

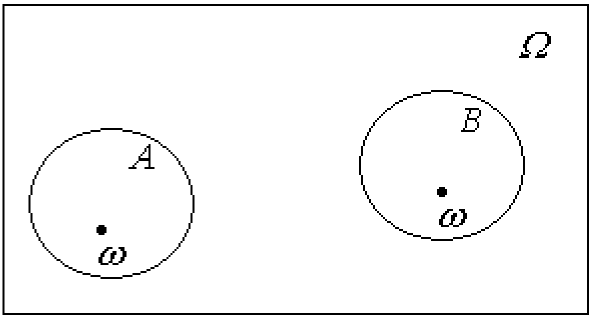

Рис. 1.6. Несовместные события A и B

Несовместные события не могут произойти одновременно, т.к. не имеют общих исходов.

Для операций над событиями справедливы законы:

1) коммутативный или переместительный

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A;$$

2) ассоциативный или сочетательный

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3) дистрибутивный

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно.

Тогда имеет место *определение 8.* Система событий £ называется алгеброй или Булевой алгеброй событий, если выборочное пространство $\Omega \in$ £, а также для любых двух событий $A \in$ £ и $B \in$ £ их сумма $A \bigcup B \in$ £, произведение $A \bigcap B \in$ £, разность $A \setminus B \in$ £.

Алгебра событий £ является топологией в выборочном пространстве Ω, она в качестве элементов содержит выборочное пространство $\Omega \in$ £, невозможное событие $\varnothing \in$ £, замкнуто относительно операций над событиями и состоит из множества всех подмножеств Ω. Если в Ω N исходов, то из формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^N = \sum_{m=0}^{N} C_N^m a^m b^{N-m}$$

при $a = b = 1$ следует, что множество всех подмножеств £ будет иметь 2^N событий.

<u>Пример.</u> Испытание–однократное подбрасывание игральной кости.

Данному испытанию отвечают конечное выборочное пространство Ω из шести исходов $N = 6$ и алгебра событий £ из $2^6 = 64$ событий

$$£= \{\Phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_5, \omega_6\}, \ldots, \Omega\}.$$

Пусть теперь пространство элементарных событий Ω будет дискретным либо непрерывным. В этом случае определение 8 надо потребовать, чтобы алгебра событий £ была замкнута относительно операций над счетным числом событий и тогда алгебра £ будет называться σ – алгеброй (сигма–алгеброй).

§ 1.5. Вероятность и частота появления события. Вероятностное пространство

Под вероятностью события $A \subset \Omega$ понимают число $P(A)$ в пределах от 0 до 1, $0 \le P(A) \le 1$. Между тем с вероятностью события тесно связано понятие частоты появления события, которое разберем подробнее.

В любом испытании любое событие $A \in$ £ из алгебры событий либо происходит, либо не происходит. Пусть вероятность появления события A равна $P(A) = p > 0$. Тогда вероятность события $\overline{A}$ равна

$$P(\overline{A}) = 1 - p = q > 0 .$$

Рассмотрим схему повторных испытаний Бернули, которая заключается в следующем. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в которой событие A происходит m раз,

$$0 \le m \le n .$$

Тогда частотой появления события A называется отношение

$$0 \le \frac{m}{n} \le 1 .$$

Причем из закона больших чисел, установленным Бернули, следует, что частота появления события A по мере неограниченного увеличения количества независимых испытаний стремится к вероятности события в одном испытании

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=P(A).$$

Данный факт устойчивости частот представляет собой статистическое толкование вероятности события и открывает возможность экспериментальной проверки выводов теории вероятностей.

Таким образом, чтобы теория вероятностей адекватно отображала испытание и его исходы и, тем самым, была приложима к практике, необходимо выполнение следующего принципа вероятности события. Очень малому значению вероятности события при многократном повторении испытания должно отвечать крайне редкое появление события.

Данному принципу отвечает следующее строгое определение вероятности события.

Определение 1. Вероятностью события A называется функция события $P(A)$, определенная на алгебре или на σ –алгебре событий £ со значениями $0\le P(A)\le 1$ и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей):

1) вероятность невозможного события равна нулю

$$P(\varnothing)=0\,; \tag{1.1}$$

2) вероятность достоверного события равна единице

$$P(\Omega)=1\,; \tag{1.2}$$

3) для любой конечной или бесконечной последовательности несовместных событий $\{A_i; A_i\cap A_j=\varnothing, i\ne j;\ i,j\ge 1\}$ вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий (аксиома адекватности)

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i). \qquad (1.3)$$

Определение 2. Вероятностным пространством некоторого испытания и его исходов называется тройка $(\Omega, £, P)$, где

Ω –выборочное пространство или пространство элементарных событий, которое либо конечное, либо дискретное, либо непрерывное;

£–алгебра событий, если Ω – конечное, или σ –алгебра, если Ω – дискретное или непрерывное выборочные пространства;

P –вероятность событий, определенная на £.

Вероятностное пространство $(\Omega, £, P)$ является математическим эквивалентом испытания, исходов испытания и случайных событий.

Аксиоматическая теория вероятностей в приведенном здесь виде была создана А.Н. Колмогоровым в 1933 году.

Глава 2. Теоремы теории вероятностей.

§ 2.1. Классическое определение вероятности

Формула классического определения вероятности долгое время оставалась основной в теории вероятностей и справедлива она для испытаний, исходы которых удовлетворяют двум условиям:

1. Количество исходов испытания–конечное множество, т.е. выборочное пространство конечно и содержит N исходов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\};$$

2. Вероятность в выборочном пространстве Ω распределена равномерно

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}.$$

Таким условиям удовлетворяют испытания по извлечению на удачу неразличимых на ощупь шаров из урн. Поэтому подобные испытания называют–схемой урн.

Пусть событие A состоит из m исходов

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}.$$

Тогда вероятность события A равна отношению числа исходов благоприятствующих событию A к числу всех исходов

$$P(A) = \frac{m}{N}. \qquad (2.1)$$

Полученная формула (2.1) классического определения вероятности служит адекватной математической моделью при решении задач из области азартных игр, лотерей, организации выборочного контроля, выборочных статистических исследований и т.п..

Пример. Найти вероятность выпадения нечетного числа очков на верхней грани игральной кости, при ее однократном подбрасывании.

Решение. Испытание заключается в однократном подбрасывании игральной кости. Событие $A=\{1,3,5\}$ –множество трех нечетных чисел $m=3$, которые являются исходами, благоприятствующими событию A. Всего исходов шесть $N=6$. Тогда $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

§ 2.2. Элементы комбинаторики

Вычисление вероятностей событий по классическому определению вероятности зачастую невозможно без использования формул комбинаторики.

В основе комбинаторики лежат два правила.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов n способами, после чего объект B можно выбрать m способами, то выбрать пару объектов (A,B) можно $n\cdot m$ способами.

Пример. В столовой имеется: три первых блюда, пять вторых и три третьих блюд. Сколько существует вариантов выбора полного обеда?

Согласно правилу произведения получим $3\cdot 5\cdot 3=45$ вариантов выбора полного обеда.

Правило суммы. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов n способами, после чего объект B можно выбрать m способами, то выбрать либо объект A, либо объект B можно $n+m$ способами.

Пример. Пусть в условиях предыдущего примера зададимся вопросом. Сколько существует вариантов выбора обеда, состоящего из одного блюда?

По правилу суммы получим $3+5+3=11$ вариантов обеда из одного блюда.

Рассмотрим множество из n элементов $E=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Определение 1. Перестановками из n элементов называются комбинации из этих же элементов, отличающиеся только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают через P_n и на основе правила произведения определяют по формуле

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!\,.$$

Действительно первый элемент из множества E можно выбрать n способами, после чего второй элемент–$(n-1)$ способами и т.д., n-ый элемент–одним способом. Перемножая по правилу произведения все количества способов, получим приведенную формулу.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3,4,6, если каждая цифра входит в написание числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6\,.$$

Определение 2. Размещениями называются комбинации из n элементов по m элементам, отличающиеся или порядком, или составом элементов.

Исходя из правила произведения, количество размещений из n элементов по m элементам A_n^m определяют по формуле

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 3,4,6,7,9, если каждая цифра входит в написание числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$$

Определение 3. Сочетаниями называются комбинации из n элементов по m элементам, отличающихся только составом элементов.

Каждому сочетанию, количество которых обозначают C_n^m, соответствует $m!$ размещений

$$m!C_n^m = A_n^m.$$

Откуда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример. Из группы 15 человек требуется выбрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколько существует вариантов выбора этой делегации?

Решение. Искомое число вариантов выбора делегации

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!10!} = 3003.$$

§ 2.3. Геометрические вероятности

Классическое определение вероятности справедливо для испытаний с конечным множеством исходов и равномерным распределением вероятности в конечном выборочном пространстве Ω.

Рассмотрим геометрические вероятности, которые обобщают формулу классической вероятности на случай непрерывных пространств элементарных событий Ω. С данными пространствами и событиями A из σ–алгебры £, которые представляют собой непрерывные множества исходов, связано понятие меры.

Определение. Мерой непрерывного множества исходов (события) A называется неотрицательная функция множества $\mathrm{mes}A \geq 0$, удовлетворяющая условию аддитивности

$$\mathrm{mes}(A \bigcup B) = \mathrm{mes}A + \mathrm{mes}B$$

при $A \bigcap B = \varnothing$.

Понятие меры множества является обобщением понятий длины отрезка, площади плоской фигуры, объема тела в пространстве.

Пусть исходы испытания удовлетворяют следующим двум условиям:

1. Непрерывное множество исходов ω выборочного пространства Ω представляет ограниченную область n-мерного пространства R^n

$$\Omega = \{\omega; \omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n\} \subset R^n ,$$

причем из ограниченности Ω следует конечность меры $\mathrm{mes}\Omega < \infty$.

2. Вероятность в выборочном пространстве Ω распределена равномерно, пропорционально мере подобласти и не зависит от ее местоположения в Ω.

Событием A является подобласть выборочного пространства Ω, поэтому события не превосходят меры Ω

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow \mathrm{mes}A \leq \mathrm{mes}\Omega .$$

Тогда вероятность события A равна отношению мер события и выборочного пространства

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}A}{\mathrm{mes}\Omega} .$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Пусть исходы ω некоторого испытания принадлежат ограниченному непрерывному множеству точек одномерного пространства R, геометрической интерпретацией которого является числовая ось Ox.

В этом случае будут (рис. 2.1):

исход ω –точка, число x на оси Ox,

$$\omega = x ;$$

выборочное пространство Ω –отрезок $[a,b]$,

$$\Omega = \{x; a \leq x \leq b\};$$

событие A –подотрезок $[c,d]$ отрезка $[a,b]$,

$$A = \{x, c \leq x \leq d\}, \ [c,d] \subseteq [a,b],$$

мера Ω –длина отрезка $[a,b]$,

$$\mathrm{mes}\Omega = \mathrm{mod}[a,b] = |b-a| = L ,$$

мера события A –длина отрезка $[c,d]$,

$$\mathrm{mes}A = \mathrm{mod}[c, d] = |d - c| = l,\ l \le L.$$

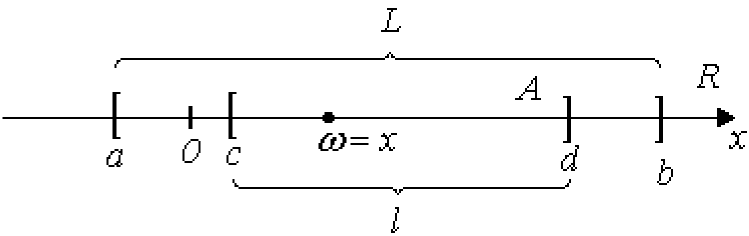

Рис.2.1. Одномерные исходы ω

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{l}{L}. \qquad (2.2)$$

2. Пусть исходы ω некоторого испытания принадлежат ограниченной непрерывной области двухмерного пространства R^2, геометрической интерпретацией которого является плоскость с введенной декартовой прямоугольной системой координат Oxy.

В этом случае будут (рис. 2.2):

исход ω –точка плоскости с координатами x и y,

$$\omega = (x, y),$$

выборочное пространство Ω –ограниченная область в плоскости

$$\Omega = \{(x, y); \varphi(x, y) = 0 - \text{уравнение границы}\},$$

событие A –подобласть выборочного пространства Ω,

$$A = \{(x, y); \psi(x, y) = 0 - \text{уравнение границы}\}, A \subseteq \Omega,$$

мера Ω –площадь области Ω,

$$\mathrm{mes}\Omega = S,$$

мера A –площадь области A,

$$\mathrm{mes}A = s, s \le S .$$

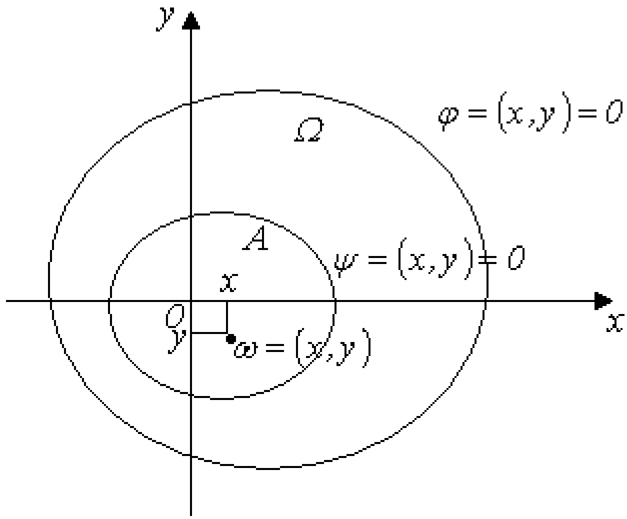

Рис. 2.2. Двухмерные исходы ω

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{s}{S} .$$

Замечание. Подобным образом определяют геометрические вероятности в пространствах б**о**льших измерений R^n, при $n \ge 3$.

<u>Пример.</u> (Задача о встрече). Двое договорились о встрече в определенном месте в любой момент промежутка времени $[0, T]$. Определить вероятность встречи, если моменты прихода каждого независимы и время ожидания одним другого не больше τ, где $0 < \tau < T$.

Решение. Обозначим через x и y времена приходов в условленное место первого и второго лиц соответственно, а через событие A – встреча состоялась.

Введем в плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy и паре значений времен x и y поставим в соответствие точку плоскости с этими координатами $\omega = (x, y)$, которая и будет исходом ω данного испытания.

Согласно условию, переменные x и y независимо друг от друга изменяются во временном промежутке $[0, T]$. Следовательно, множество всех логически возможных исходов Ω –пространство элементарных событий интерпретируется как совокупность всех точек квадрата (рис. 2.3)

$$\Omega = \{\omega = (x, y); \, 0 \le x \le T, \, 0 \le y \le T\}.$$

Для того чтобы встреча состоялась, должны дополнительно выполниться неравенства $x - y \le \tau$ и $y - x \le \tau$. Откуда

$$|x - y| \le \tau \text{ или } x - \tau \le y \le x + \tau .$$

Таким образом, событие A –заштрихованная фигура на рис.2.3, представляет собой подмножество точек квадрата Ω, координаты которых удовлетворяют приведенным неравенствам

$$A = \{\omega = (x, y); |x - y| \le \tau, 0 \le x \le T, 0 \le y \le T\}.$$

Заметим, что в качестве мер выборочного пространства Ω и события A выступают их площади.

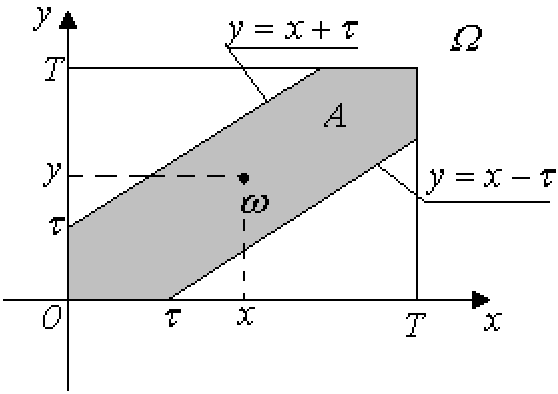

Рис. 2.3. События A и достоверное Ω в задаче о встрече

Тогда по формуле геометрической вероятности искомая вероятность события A выражается отношением площадей события A и выборочного пространства Ω,

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - \tau^2)}{T^2}.$$

§ 2.4. Условные вероятности

В теории вероятностей часто встречаются задачи, которые изложим в обобщенном виде.

Рассмотрим некоторое испытание, которому отвечает вероятностное пространство $(\Omega, £, P)$ и условие заключается в том, что произошло событие H.

Требуется пересчитать вероятности событий $A \in £$ из алгебры событий £ при условии реализации события H.

1. Так, как событие H произошло, то оно является достоверным и выступает в качестве выборочного пространства, т.е. (рис. 2.4)

$$\Omega \to H$$

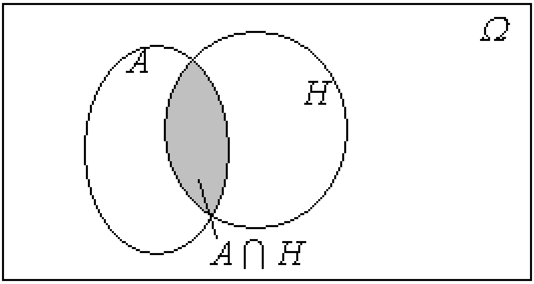

Рис. 2.4. Новое выборочное пространство H

2. Тогда событиям $A \in £$ будут отвечать произведения событий $A \cap H$ (рис. 2.4), множество которых образует алгебру событий $£_H$,

$$£ \notin A \to A \cap H \in £_H.$$

Следовательно, алгебра событий £ индуцируется в алгебру событий $£_H$, $£ \to £_H$.

3. На поле событий алгебры событий $£_H$ определим новую вероятность P_H, которая выражается через старую P следующим равенством

$$P_H(A) = P(A \cap H). \qquad (2.3)$$

Значит, старой вероятности P отвечает новая P_H,

$$P \to P_H.$$

Однако новая вероятность P_H имеет недостаток, она не нормирована на единицу и, поэтому не удовлетворяет второй аксиоме определения вероятности события (1.2). Действительно, т.к.

$$H \subset \Omega \Rightarrow P(H) < P(\Omega) = 1,$$

то по формуле (2.3) получим

$$P_H(H) = P(H \cap H) = P(H) < 1.$$

Нормируем на единицу новую вероятность P_H. Для этого разделим обе части равенства (2.3) на вероятность события H,

$$\frac{P_H(A)}{P(H)} = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

и, обозначив через

$$\frac{P_H(A)}{P(H)} = P(A \mid H),$$

получим

$$P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} - \qquad (2.4)$$

–вероятность события A при условии, что произошло событие H или условную вероятность события A.

Определение. Условная вероятность события A равна отношению произведения событий A и H к вероятности события H.

Таким образом, достоверность события H порождает новое вероятностное пространство

$$(\Omega, \pounds, P) \to (H, \pounds_H, P_H),$$

в котором условные вероятности событий A пересчитываются по формуле (2.4).

Пример. Пусть событие A состоит в том, что новорожденный доживет до 5 лет и $P(A) = 0{,}8$, а событие B состоит в том, что новорожденный доживет до 50 лет и $P(B) = 0{,}7$. Найти вероятность того, что новорожденный доживет до 50 лет при условии, что он дожил до 5 лет, т.е. $P(A \mid B)$.

Решение. Так как событие B частный случай события A (рис. 2.5)

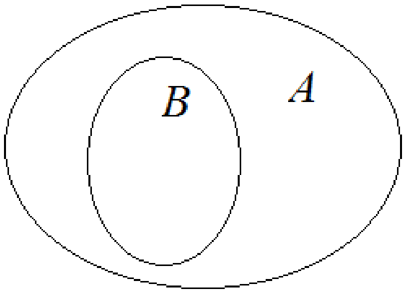

Рис. 2.5. Событие B частный случай события A

$B \subset A$, то $B \bigcap A = B$ и, в соответствии с формулой (2.4) найдем

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \bigcap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}7}{0{,}8} = 0{,}875.$$

Как видим, вероятность дожить новорожденному до 50 лет повышается при условии, что он дожил до 5 лет.

§ 2.5. Правило умножения вероятностей

Зачастую условные вероятности $P(A \mid H)$ определяют не из формулы (2.4), а непосредственно из данных задачи. Тогда эту формулу используют для нахождения вероятности произведения событий

$$P(A \bigcap H) = P(H) \cdot P(A \mid H). \qquad (2.5)$$

Применив последнюю формулу к событию $H \bigcap A$, найдем

$$P(H \cap A) = P(A) \cdot P(H \mid A), \qquad (2.6)$$

или, поскольку произведение событий коммутативно $H \bigcap A = A \bigcap H$, получим справедливость формул и (2.5) и (2.6), которые называют правилом умножения вероятностей.

Данное правило с помощью метода математической индукции обобщается на любое конечное число событий A_i, $i = 1,2,\ldots,n$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1, A_2) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot P(A_n \mid A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}),$$

где $P(A_n \mid A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$–вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ произошли.

Замечание. Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д..

Пример. Студент знает 25 из 30 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает один из предложенных ему двух вопросов.

Решение. Обозначим события через:

$A, \overline{A}$ –студент соответственно знает и не знает первый вопрос;

$B, \overline{B}$ –студент соответственно знает и не знает второй вопрос;

C –студент знает один из предложенных ему двух вопросов.

Тогда $P(C) = ?$

Событие C наступит, если студент знает первый и не знает второй вопросы или не знает первый и знает второй вопросы. Согласно операциям над событиями (см. §1.4)

$$C = \left(A \bigcap \overline{B}\right) \bigcup \left(\overline{A} \bigcap B\right).$$

Значит

$$P(C)=P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right).$$

Из несовместности событий $\left(A\cap\overline{B}\right)$ и $\left(\overline{A}\cap B\right)$ третьей аксиомы определения вероятности события (1.3) следует, что вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей

$$P(C)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right).$$

Теперь по правилу умножения вероятностей (2.5) получим

$$P(C)=P(A)\cdot P\left(\overline{B}\mid A\right)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B\mid\overline{A}\right)=\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}=\frac{25}{87}.$$

§ 2.6. Независимость событий

Понятие независимости является одним из фундаментальных понятий в теории вероятностей.

Определение 1. Событие A называется независимым от события B, если появление события B не изменяет вероятности события A,

$$P(A\mid B)=P(A).$$

Теорема. Для того чтобы событие A не зависело от события B необходимо и достаточно, чтобы вероятность произведения этих событий равнялось произведению их вероятностей.

Доказательство.

Необходимость. Дано: событие A не зависит от события B,

$$P(A\mid B)=P(A).$$

Требуется доказать: вероятность произведения событий A и B равна произведению их вероятностей $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Из системы формул условной вероятности и не зависимости событий следует

$$\begin{cases} P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A \mid B) = P(A) \end{cases} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

или

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Достаточность. Дано: вероятность произведения событий A и B равна произведению их вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Требуется доказать: событие A не зависит от события B

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Из формулы условной вероятности и данного условия получим

$$\begin{cases} P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Из доказательной теоремы следует тождественность утверждений

$$P(A \mid B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Поэтому можно дать новое, эквивалентное приведенному выше, определение независимости событий A и B.

Определение 2. События A и B независимые, если вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей.

Для n независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ приведем следствие из доказательной теоремы, которое легко доказать по методу математической индукции.

Следствие. Вероятность совместного появления n независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. Из колоды в 52 карты наудачу выбирается одна. Рассмотрим события:

A –выбран туз; B –выбрана пиковая масть.

Тогда произведением этих событий будет $A \cap B$ –выбран пиковый туз.

Найдем вероятности данных событий

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; \; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}; \; P(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Откуда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

и, следовательно, события A и B независимые.

Теперь колоду карт добавим джокера (карту, не имеющую масти) и пересчитаем вероятности приведенных событий

$$P(A) = \frac{4}{53}; \; P(B) = \frac{13}{53}; \; P(A \cap B) = \frac{1}{53}.$$

Рассмотрим разность

$$P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{53} - \frac{4 \cdot 13}{53^2} = \frac{1}{53} - \frac{52+1-1}{53^2} = \frac{1}{53^2} > 0.$$

Следовательно, $P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$ и события A и B зависимые.

Этот результат объясняется таким рассуждением. Если данная карта–туз, то она не может быть джокером, значит, получена некоторая информация для определения масти.

§ 2.7. Вероятность суммы событий

Определение. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Событие A –появление трех очков при бросании игральной кости; событие B –появление нечетного числа очков. События A и B –совместные.

Пусть события A и B совместные. Тогда для них справедлива теорема.

Теорема. Вероятность суммы событий или вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доказательство.

Рассмотрим в формате диаграммы Эйлера–Венна события A, B, $A \cap \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, причем последние три события попарно несовместны. Например $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$. Выразим сумму событий и события A и B через эти несовместные события (рис. 2.6)

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B),\ B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

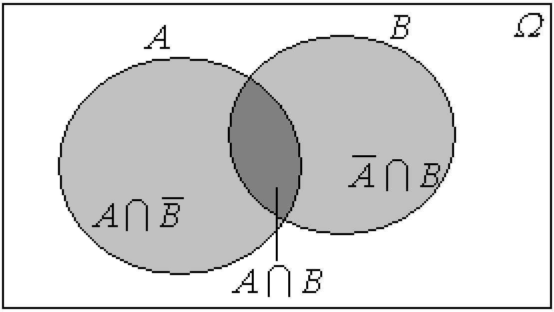

Рис. 2.6. Сумма событий A и B

Так как в правых частях равенства события попарно несовместные, то по третьему свойству определения вероятности события (1.3) получим равенства вероятностей событий в левых частях суммам вероятностей событий в правых частях приведенных выражений.

$$P(A\cup B)=P\left(A\cap \overline{B}\right)+P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right),$$

$$P(A)=P\left(A\cap \overline{B}\right)+P(A\cap B),$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right).$$

Из второго и третьего равенств выразим $P\left(A\cap \overline{B}\right)$ и $P\left(\overline{A}\cap B\right)$, подставим в первое и найдем

$$P(A\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

или

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Замечание 1. Из доказательной теоремы и правила умножения вероятностей следует:

а) для зависимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \begin{cases} P(A) \cdot P(B \mid A) \\ \text{или} \\ P(B) \cdot P(A \mid B) \end{cases};$$

б) для не зависимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Пример 2. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе из обоих орудий хотя бы одним из орудий.

Решение. Обозначим события: A, B –попадания в цель соответственно первого и второго орудия; C –попадание хотя бы одним из орудий. События A и B совместные, независимые, их вероятности равны $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$. Событие $C = A \cup B$ и, согласно замечанию 1, искомая вероятность равна $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 07{,}+0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

Замечание 2. Формула вероятности суммы n совместных событий имеет вид

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<}\sum_{j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<}\sum_{j<}\sum_{k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + ..+$$

$$+(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

§ 2.8. Формула полной вероятности

Пусть некоторому испытанию отвечают выборочное пространство Ω и множество событий $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots = \{H_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Определение. Множество событий $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ образует полную систему событий, если оно разбивает выборочное пространство Ω (рис. 2.7), то есть выполняются условия:

1) эти события попарно несовместны $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) сумма данных событий равна выборочному пространству Ω $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$.

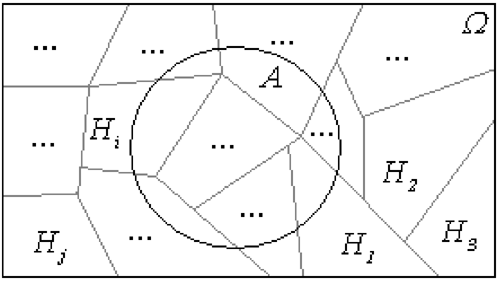

Рис. 2.7. Полная система событий $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$

Заметим, что любая пара событий A и ему противоположная $\overline{A} = \Omega \setminus A$ образуют полную систему событий. Действительно, они несовместны $A \cap \overline{A} = A \cap (\Omega \setminus A) = \varnothing$ и их сумма равна выборочному пространству $A \cup \overline{A} = A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$. Поэтому, если $P(A) = p \geq 0$ и $P(\overline{A}) = q \geq 0$, то $\begin{cases} P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 \\ P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \end{cases} \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = p + q = 1$.

Рассмотрим выборочное пространство Ω, полную систему событий $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ в нем и некоторое событие $A \subset \Omega$ (рис. 2.7).

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Вероятность любого события A равна сумме произведений вероятностей полной системы событий на соответствующие условные вероятности события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(H_i)\cdot P(A\mid H_i).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности», а события H_i по отношению к событию A –гипотезами.

Доказательство. Событие A можно представить в виде суммы произведений событий (рис. 2.7)

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap H_i)$$

и вероятность события A будет равна

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap H_i)\right).$$

Но, слагаемые суммы попарно несовместны

$$(A\cap H_i)\cap(A\cap H_j)=\varnothing$$

при $i\neq j$.

Тогда по третьей аксиоме определения вероятности события (1.3) и правила умножения вероятностей (2.5) получим формулу полной вероятности

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap H_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A\cap H_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(H_i)\cdot P(A\mid H_i).$$

<u>Пример 1.</u> В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Испытание состоит в выборе наудачу одного шара из $n+1$ шаров.

Обозначим через A событие –извлечен белый шар. С данным событием связаны следующие гипотезы (события) о первоначальном составе шаров в урне: H_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ –в урне i белых шаров.

Поскольку гипотезы попарно несовместны, образуют полную систему событий, равновероятны и сумма вероятностей равна 1, то вероятность каждой из гипотез равна

$$P(H_i)=\frac{1}{n+1},\ i=0,1,2,\ldots,n .$$

Условные вероятности того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было i белых шаров определяются выражениями

$$P(A\,|\,H_i)=\frac{i+1}{n+1},\ i=0,1,2,\ldots,n .$$

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар находим по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}\left(1+2+\ldots+(n+1)\right)=\frac{(n+2)(n+1)}{2(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)} .$$

<u>Пример 2.</u> На складе три партии компьютеров насчитывают соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что компьютеры, изготовленные разными заводами, проработают без ремонта заданное время, равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что выбранный наудачу один из ста данных компьютеров проработает без ремонта заданное время.

Решение. Испытание состоит в выборе наудачу одного компьютера из 100.

Обозначим через A событие –выборочный компьютер проработает заданное время без ремонта.

С этим событием связаны три гипотезы: H_1, H_2, H_3–выбранный наудачу компьютер принадлежит соответственно первой, второй и третьей партиям.

Все гипотезы попарно несовместны, образуют полную систему событий и по классическому определению вероятности (2.1) найдем

$$P(H_1) = 0{,}2\,,\ P(H_2) = 0{,}3\,,\ P(H_3) = 0{,}5\,.$$

Кроме того, в условии задачи даны условные вероятности события A

$$P(A \mid H_1) = 0{,}7\,,\ P(A \mid H_2) = 0{,}3\,,\ P(A \mid H_3) = 0{,}9\,.$$

Искомую вероятность того, что выборочный компьютер проработает заданное время без ремонта найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}83\,.$$

§ 2.9. Формулы Байеса

Пусть выборочное пространство Ω некоторого испытания разбивается полной системой событий $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$, которую будем интерпретировать, как совокупность гипотез по отношению к рассматриваемому событию A.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Вероятности любых гипотез $H_j \in \{H_i\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1,2,3,\ldots$ из полной системы гипотез при условии, что произошло событие A определяют по формулам Байеса

$$P\left(H_j \mid A\right)=\frac{P\left(H_j\right)P\left(A \mid H_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(H_i\right)\cdot P\left(A \mid H_i\right)}, \quad j=1,2,3,\ldots.$$

Доказательство.

Для любой гипотезы H_j и события A по правилу умножения вероятностей (2.5), (2.6) справедливы равенства

$$P\left(A \cap H_j\right)=P(A)\cdot P\left(H_j \mid A\right), \quad P\left(H_j \cap A\right)=P\left(H_j\right)\cdot P\left(A \mid H_j\right).$$

Но из коммутативности произведения событий

$$A \cap H_j = H_j \cap A$$

следует равенство их вероятностей

$$P\left(A \cap H_j\right)=P\left(H_j \cap A\right)$$

или

$$P(A)\cdot P\left(H_j \mid A\right)=P\left(H_j\right)\cdot P\left(A \mid H_j\right).$$

Заменим в последнем равенстве вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности и выразим из полученного выражения условную вероятность $P\left(H_j \mid A\right)$, в результате получим формулу Байеса

$$P\left(H_j \mid A\right)=\frac{P\left(H_j\right)\cdot P\left(A \cap H_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(H_i\right)\cdot P\left(A \mid H_i\right)}, \quad j=1,2,3,\ldots.$$

В формулах Байеса вероятности гипотез $P\left(H_j\right)$ называются априорными (априори–до опыта), а условные вероятности гипотез $P\left(H_j \mid A\right)$–апостериорными (апостериори–после опыта).

Ценность формул Байеса заключается в том, что они позволяют пересчитать (переоценить) априорные вероятности гипотез $P\left(H_j\right)$

после поступления новой информации (произошло событие A), и получить апостериорные вероятности гипотез $P(H_j \mid A)$, $j = 1,2,3,\dots$.

Из формул Байеса вытекает важное следствие.

Следствие. Если событие A не зависит от гипотезы H_j, то апостериорная и априорная вероятности гипотезы совпадают, то есть если

$$P(A \mid H_j) = P(A), \text{ то } P(H_j \mid A) = P(H_j).$$

Доказательство. В формуле Байеса

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}$$

положим $P(A \mid H_j) = P(A)$ и, с учетом полноты системы гипотез $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$, получим

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A)}{P(A) \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)} = P(H_j).$$

Благодаря приведенному следствию, формулы Байеса используют при обороне страны и называются оборонными. Если происходящие в мире события и оборонные гипотезы независимые, то априорные и апостериорные вероятности гипотез совпадают. Если от событий в мире оборонные гипотезы начинают зависеть, то происходит переоценка апостериорных вероятностей и при их близости к единице надо действовать согласно оборонным гипотезам.

<u>Пример 1.</u> В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар. Наудачу извлеченный из урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что в урне было j белых шаров, если равновозможны все

возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Обозначим через A событие–извлечен белый шар. С этим событием связана полная система гипотез о первоначальном составе шаров в урне: H_j, $j = 0,1,2,\ldots,n$ –в урне j белых шаров.

Априорные вероятности гипотез и условные вероятности события A по классическому определению вероятности будут соответственно равны (см. §2.8, пример 1)

$$P(H_j) = \frac{1}{n+1}, \; P(A \mid H_j) = \frac{j+1}{n+1}, \; j = 0,1,2,\ldots,n.$$

Искомые апостериорные вероятности гипотез $P(H_j \mid A)$ находим по формулам Байеса

$$P(H_j \mid A) = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{j+1}{n+1}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i+1}{n+1}} = \frac{(j+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1)^2 \cdot (n+2)} = \frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)},$$

где $j = 0,1,2,..,n$.

Из анализа значений апостериорных вероятностей гипотез $P(H_j \mid A)$ следует, что с ростом j от 0 до n эти вероятности растут от $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ до $\frac{2}{n+2}$. Причем, вначале, при $0 \le j \le \frac{n}{2}$ они не превосходят априорных $\frac{2}{(n+1)(n+2)} \le P(H_j \mid A) \le \frac{1}{n+1}$, а затем, при $\frac{n}{2} < j \le n$ они больше априорных $\frac{1}{n+1} < P(H_j \mid A) \le \frac{2}{n+2}$ вероятностей.

Пример 2. Для участия в студенческих отборных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй–6, из третьей группы–5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадут в сборную института, соответственно равны 0,9, 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

Решение. Обозначим через A событие–наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. С этим событием связаны три гипотезы: H_1, H_2, H_3–студент выделен для участия в соревнованиях соответственно из первой, второй, третьей групп.

Априорные вероятности гипотез по классическому определению вероятности (2.1), будут равны $P(H_1) = \frac{4}{15}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$, $P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Из условия задачи, условные вероятности события A равны

$$P(A \mid H_1) = 0{,}9,\ P(A \mid H_2) = 0{,}7,\ P(A \mid H_3) = 0{,}8.$$

Искомые апостериорные вероятности гипотез находим по формулам Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{4}{15} \cdot 0{,}9}{\frac{4}{15} \cdot 0{,}9 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}7 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8} = \frac{0{,}24}{0{,}24 + 0{,}28 + 0{,}267} = \frac{0{,}24}{0{,}787} = 0{,}30$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0{,}28}{0{,}787} = 0{,}36;\ P(H_3 \mid A) = \frac{0{,}287}{0{,}787} = 0{,}34.$$

Таким образом, вероятнее всего в сборную выбран студент из второй группы.

Глава 3. Случайные величины

§3.1. Понятие случайной величины

Пусть некоторое испытание приводит к вероятностному пространству $(\Omega, £, P)$, которое является математическим эквивалентом испытания, его исходов и случайных событий.

Исходы ω из выборочного пространства Ω $(\omega \in \Omega)$ могут иметь различную природу. Введение понятия случайной величины позволит в качестве исходов рассматривать только действительные числа $x \in R$, геометрической интерпритацией которых являются точки числовой оси Ox. Это открывает возможность наряду с методами алгебры, геометрии, комбинаторики дополнительно применять в теории вероятностей методы математического анализа.

Определение 1. Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называется функция исходов, определенная на множестве исходов выборочного пространства $\Omega = \{\omega\}$ и, принимающая значения во множестве действительных чисел R (точек числовой оси Ox).

Покажем, что случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ порождает новое вероятностное пространство

$$(R, F, P_\xi),$$

где выборочное пространство R –множество действительных чисел или точек числовой оси Ox;

Ŧ–алгебра либо σ-алгебра событий, представляющих собой множества действительных чисел R или точек числовой оси Ox;

P_{ξ} –новая вероятность, индуцированная случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$, и определенная на алгебре событий Ƭ.

1. Каждому исходу $\omega \in \Omega$ случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ ставит в соответствие некоторое число $\xi \in R$ (рис. 3.1), которое назовем образом исхода ω, а исход ω –прообразом соответствующего числа ξ.

Обозначим через

$$X = \{\xi;\ \xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega\}$$

–множество образов исходов ω. Множество образов X может не совпадать с множеством всех действительных чисел R и составлять его часть $X \subseteq R$. Например, множества образов исходов конечных или дискретных выборочных пространств. Поэтому числам из $R \setminus X$ поставим в соответствие в качестве прообраза невозможное событие $\varnothing \xrightarrow{\xi=\xi(\varnothing)} \xi$, если $\xi \in R \setminus X$.

Следовательно, случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ отображает выборочное пространство Ω во множество образов исходов X, а невозможное событие Ø во множество $R \setminus X$

$$\Omega \xrightarrow{\xi=\xi(\omega)} X\ ,\ \varnothing \xrightarrow{\xi=\xi(\varnothing)} R \setminus X\ .$$

Таким образом, в силу справедливости равенства

$$(R \setminus X) \bigcup X = R\,,$$

случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ сумму невозможного события Ø и выборочного пространства Ω отображает не все множество действительных чисел R (на все точки числовой оси Ox), (рис. 3.1)

$$\Omega \bigcup \varnothing \xrightarrow{\xi=\xi(\omega)} R = \{\xi;\ -\infty < \xi < \infty\}.$$

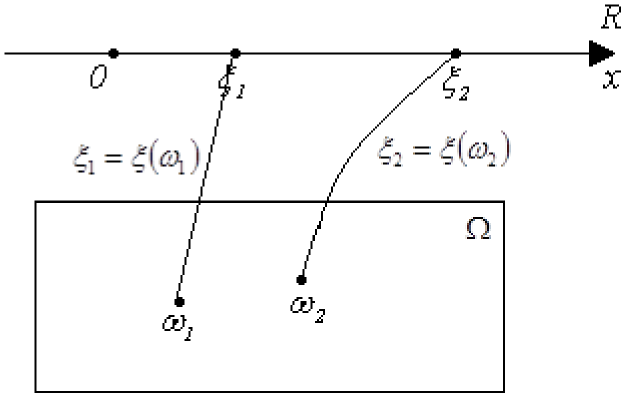

Рис. 3.1. Отображение выборочного пристрастна Ω во множество действительных чисел R (точек числовой оси Ox)

Определение 2. Образом события A из алгебры событий £ $(A \in £)$ называется событие E, составленное из множества действительных чисел $E \subset R$ –образов исходов, благоприятствующих событию A. Согласно определению, выразим событие E в теоретико-вероятностных символах

$$E = \xi(A) = \{\xi;\ \xi = \xi(\omega),\ \omega \in A\}.$$

Определение 3. Событие A называют прообразом события E, которое определяется равенством $A = \xi^{-1}(E) = \{\omega;\ \xi(\omega) = \xi,\ \xi \in E\}$.

Множество событий E –образов событий A образуют алгебру событий Ŧ во множестве действительных чисел R (на числовой оси Ox).

Следовательно, случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ алгебру событий £ отображает алгебру событий Ŧ (рис. 3.2)

$$£ \xrightarrow{\xi=\xi(\omega)} Ŧ = \{E;\ E = \xi(A),\ A \in £\}.$$

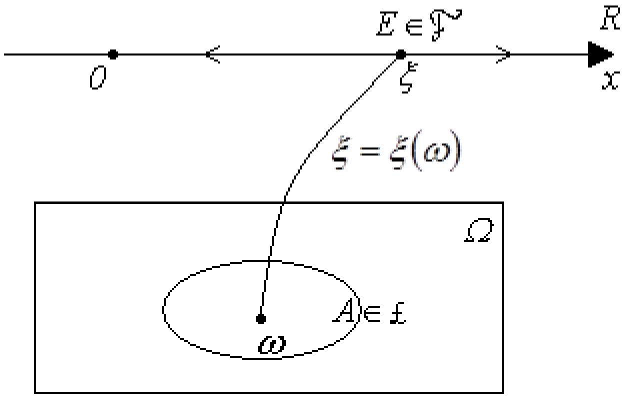

Рис. 3.2. Отображение алгебры событий £ в алгебру событий F

2. Определим на образах $E \in$ Ŧ вероятность, индуцированную случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$, как вероятность прообразов $A \in £$

$$P_\xi(E) = P(\xi \in E) \overset{def}{=} P(A).$$

Таким образом, случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ вероятность P индуцирует в вероятность P_ξ

$$P \xrightarrow{\xi=\xi(\omega)} P_\xi$$

и, окончательно, вероятностное пространство $(\Omega, £, P)$ в вероятностное пространство (R, F, P_ξ)

$$(\Omega, £, P) \xrightarrow{\xi=\xi(\omega)} (R, F, P_\xi).$$

§ 3.2. Функция распределения

Рассмотрим индуцированное случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ вероятностное пространство (R, Φ, P_ξ).

Определение 1. Законом распределения вероятностей P_ξ случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ называют соответствие между ее возможными значениями и вероятностями этих значений.

Закон P_ξ можно задать аналитически (в виде формулы), таблично либо графически. Аналитически его задают с помощью функции распределения.

Определение 2. Функцией распределения случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ называют функцию $F_\xi(x)$, которая определяет вероятность того, что случайная величина ξ в результате испытания примет значения меньшие x (рис. 3.3)

$$F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)). \tag{3.1}$$

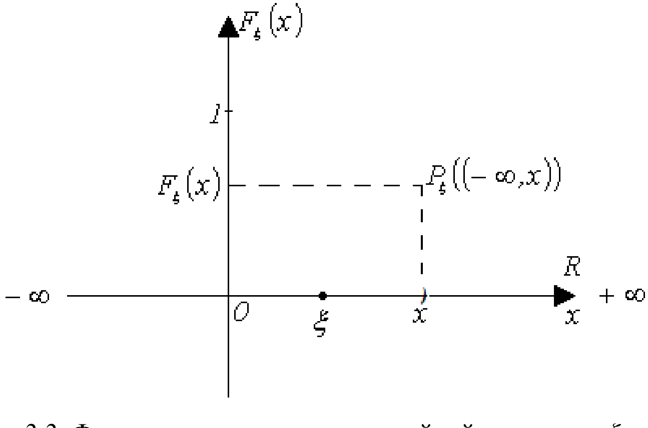

Рис. 3.3. Функция распределения случайной величины $\xi = \xi(\omega)$

§3.3. Свойства функции распределения

Свойство 1. Функция распределения является монотонно неубывающей функцией, т.е.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим следующие события и соотношение между ними (рис. 3.4) $(-\infty, x_1) \cup [x_1, x_2) = (-\infty, x_2)$

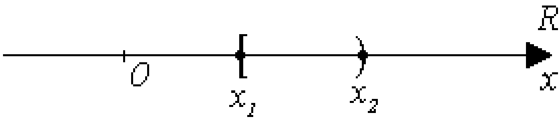

Рис. 3.4. Сумма несовместных событий

Найдем вероятности событий в левой и правой частях равенства. Т.к. в левой части события несовместные то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий

$$P_\xi((-\infty, x_1)) + P_\xi([x_1, x_2)) = P_\xi((-\infty, x_2)).$$

По определению функции распределения имеем

$$F_\xi(x_1) + P_\xi([x_1, x_2)) = F_\xi(x_2).$$

Учитывая, что $P_\xi([x_1, x_2)) \ge 0$, получим

$$F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Значения функции распределения изменяются от 0 до 1, при этом $\lim\limits_{x_n \to -\infty} F_\xi(x_n) = 0$; $\lim\limits_{x_n \to +\infty} F_\xi(x_n) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность событий $(-\infty, x_n)$–бесконечных интервалов на оси Ox (рис. 3.5)

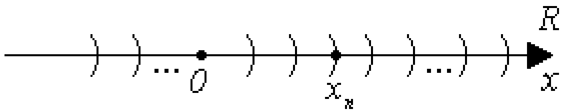

Рис. 3.5. Последовательность бесконечных интервалов

Пусть вначале правые концы этих интервалов $x_n \to -\infty$

$$\lim_{x_n \to -\infty} F_\xi(x_n) \overset{def}{=} \lim_{x_n \to -\infty} P_\xi((-\infty, x_n)) =^*$$

Вероятность является непрерывной функцией, поэтому предел от функции равен функции от предела

$$=^* P_\xi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n)\right) = P_\xi(\varnothing) = 0 .$$

Пусть теперь $x_n \to +\infty$

$$\lim_{x_n \to +\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{x_n \to -\infty} P_\xi((-\infty, x_n)) = P_\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n)\right) = P_\xi(R) = 1 ,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Функция распределения непрерывна слева, т.е.

$$F_\xi(x-0) = F_\xi(x), \text{ где } F_\xi(x-0) = \lim_{\varepsilon_n \to 0} F_\xi(x-\varepsilon_n).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность событий $[x-\varepsilon_n, x)$ и найдем ее предел (рис. 3.6)

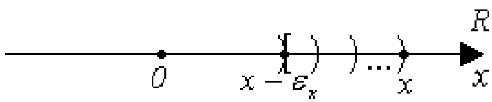

Рис. 3.6. Последовательность событий $[x-\varepsilon_n, x)$

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0}[x-\varepsilon_n, x) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[x-\varepsilon_n, x) = \varnothing .$$

Для суммы последовательностей событий справедливо следующее равенство (рис. 3.6)

$$(-\infty, x-\varepsilon_n) \cup [x-\varepsilon_n, x) = (-\infty, x),$$

в левой части которого события несовместные. Найдем пределы от вероятностей этих событий

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} P_\xi((-\infty, x-\varepsilon_n)) + \lim_{\varepsilon_n \to 0} P_\xi([x-\varepsilon_n, x)) = \lim_{\varepsilon_n \to 0} P_\xi((-\infty, x)) = P_\xi((-\infty, x)),$$

но по определению функции распределения и найденному пределу последовательности событий $[x-\varepsilon_n, x)$ получим

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} F_\xi(x-\varepsilon_n) + \lim_{\varepsilon_n \to 0} P_\xi(\varnothing) = F_\xi(x)$$

или

$$F_\xi(x-0) = F_\xi(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Любая функция $F(x)$, удовлетворяющая приведенным трем свойствам, может быть принята в качестве функции распределения некоторой случайной величины.

§3.4. Вероятность события–полуинтервала числовой оси

Пусть закон распределения P_ξ случайной величины ξ, описывается функцией распределения $F_\xi(x)$.

Выразим через функцию распределения $F_\xi(x)$ вероятность события $[a,b)$–полуинтервала числовой оси, которую обозначают

$$P_{\xi}([a,b)) = P(\xi \in [a,b)) = P(a \le \xi \le b).$$

Рассмотрим события, для которых справедливо соотношение (рис. 3.7)

$$(-\infty, a) \cup [a,b) = (-\infty, b).$$

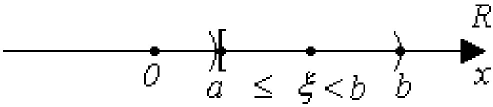

Рис. 3.7. Расположение событий на оси Ox

Т.к. в левой части равенства события несовместные, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей

$$P_{\xi}((-\infty, a)) + P_{\xi}([a,b)) = P_{\xi}((-\infty, b))$$

и по определению функции распределения получим

$$F_{\xi}(a) + P_{\xi}([a,b)) = F_{\xi}(b).$$

Откуда

$$P_{\xi}([a,b)) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a). \qquad (3.3)$$

Таким образом, вероятность события–полуинтервала числовой оси или вероятность попадания случайной величины ξ в полуинтервал равна разности значений функций распределения в точках правого и левого концов полуинтервала.

Следствие. Если значения функции распределения на концах полуинтервала совпадают

$$F_{\xi}(a) = F_{\xi}(b) \Rightarrow P_{\xi}([a,b)) = 0,$$

то говорят, что полуинтервал $[a,b)$ для случайной величины ξ – запретный и функция распределения над таким полуинтервалом постоянная.

Пример. Функция распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$F_{\xi}(x)=\alpha+\beta\cdot\mathrm{arctg}\,x,\ (x\in R).$$

Найти параметры α и β, вероятность события–полуинтервала $[0;1)$. Построить график функции распределения.

Решение. Найдем параметры α и β, исходя из 2-го свойства функции распределения:

$$\lim_{x\to-\infty}F_{\xi}(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha+\beta\cdot\mathrm{arctg}\,x)=\alpha-\frac{\pi}{2}\beta=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}F_{\xi}(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha+\beta\cdot\mathrm{arctg}\,x)=\alpha+\frac{\pi}{2}\beta=1$$

Решая систему

$$\begin{cases}\alpha-\dfrac{\pi}{2}\beta=0\\ \alpha+\dfrac{\pi}{2}\beta=1\end{cases},$$

получим $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{1}{\pi}$.

Тогда функция распределения примет вид

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}\,x \tag{3.4}$$

и

$$P(0\le\xi\le1)=F_{\xi}(1)-F_{\xi}(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}\,1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}\,0=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}.$$

График $F_{\xi}(x)$ приведем на рис. 3.8.

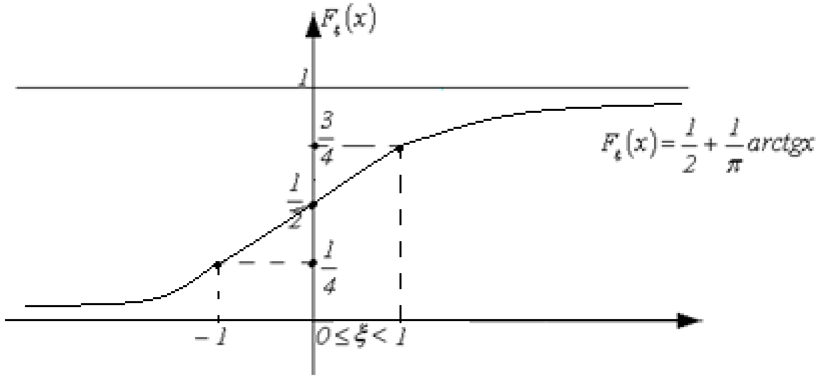

Рис. 3.8. График функции распределения (3.4)

§ 3.5. Вероятность события–точки числовой оси

Выразим через функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi=\xi(\omega)$ вероятность события–точки числовой оси Ox или вероятность принятия случайной величиной значения $\xi=x\in R$

$$P_\xi(\{x\})=P(\xi=x).$$

Рассмотрим последовательность событий $(-\infty, x+\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n\to 0$ – бесконечно малая величина (рис. 3.9)

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0}(-\infty, x+\varepsilon_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x+\varepsilon_n).$$

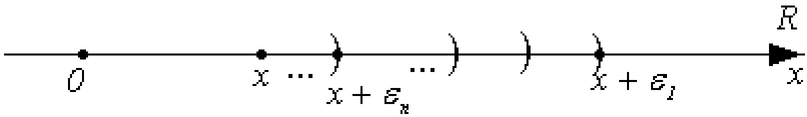

Рис. 3.9. Последовательность событий $(-\infty, x+\varepsilon_n)$

Точка x принадлежит всем событиям $\left(-\infty, x+\varepsilon_n\right)$, значит x принадлежит и их произведению $x \in \left(-\infty, x+\varepsilon_n\right) \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x+\varepsilon_n\right)$.

Пусть теперь x_1 любое число большее x, $x < x_1$. Т.к. $\varepsilon_n \to 0$, то всегда будет существовать такой номер N, что при $n > N$ $x+\varepsilon_n < x_1$. Откуда следует

$$x_1 \overline{\in} \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x+\varepsilon_n\right).$$

Значит

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0}\left(-\infty, x+\varepsilon_n\right) = \left(-\infty, x\right] = \left(-\infty, x\right) \cup \{x\}.$$

Найдем вероятности от левой и правой частей равенства с учетом несовместности событий в его правой части

$$P_\xi\left(\lim_{\varepsilon_n \to 0}\left(-\infty, x+\varepsilon_n\right)\right) = P_\xi\left(\left(-\infty, x\right)\right) + P_\xi\left(\{x\}\right).$$

В силу непрерывности вероятности и определения функции распределения, получим

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} F_\xi\left(x+\varepsilon_n\right) = F_\xi(x) + P(\xi = x),$$

но в левой части равенства стоит предел функции распределения справа

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} F_\xi\left(x+\varepsilon_n\right) = F_\xi(x+0).$$

Итак, окончательно имеем

$$P(\xi = x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x). \qquad (3.5)$$

Таким образом, вероятность события–точки числовой оси равна разности предела функции распределения справа и значения функции распределения в этой точке.

Из математического анализа следует, что разность предела функции справа в точке x и значением функции в этой точке является разрывом функции первого рода или «скачком». Поэтому, если функция распределения непрерывна в точке x, то вероятность события этой точки равна нулю.

Замечание. Любое событие E из алгебры событий Ϯ, $E \in$ Ϯ можно представить в виде суммы, произведения, разности полуинтервалов и точек числовой оси. Поэтому, имея функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, по формулам (3.3), (3.5) можно найти вероятности любых событий $E \in$ Ϯ.

Таким образом, функция распределения $F_\xi(x)$ является полной характеристикой случайной величины $\xi = \xi(\omega)$. Задать случайную величину ξ, это значит задать ее функцию распределения $F_\xi(x)$, удовлетворяющую трем приведенным выше свойствам.

§ 3.6. Математическое ожидание случайной величины

Как уже известно, функция распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, наряду с функцией распределения в теоретико-практическом приложении вероятностных методов важны частные числовые характеристики случайных величин. Среди числовых характеристик различают характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана и др.) и характеристики рассеяния (дисперсия, среднее квадратичное отклонение, различные моменты распределения порядка выше первого и др.).

Определение 1. Математическим ожиданием случайной величины ξ или ее средним значением по распределению называется число $M\xi$ равное интегралу Римана-Стильтьеса по всему выборочному пространству $R=(-\infty,+\infty)$ (числовой оси Ox)

$$M\xi = \int_R x dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x). \tag{3.6}$$

Математическое ожидание (3.6) определяет положение центра закона распределения вероятностей случайной величины. Например, при измерении различных физических величин (длина, площадь, сила тока, напряжение и т.д.) их математические ожидания характеризуют приближенные значения измеренных величин (тем точнее, чем больше независимых измерений).

Для вычисления частных характеристик случайных величин и доказательств их свойств приведем более общую теорему.

Рассмотрим систему n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ или случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, функцию этих случайных величин $\varphi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и зависящую от n переменных функцию распределения случайного вектора $F_\xi(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ – точка (радиус-вектор) n-мерного метрического пространства R^n, представляющего собой прямое или декартово произведение выборочных пространств случайных величин ξ_i, $i = 1,2,\dots,n$, т.е. $R^n = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Математическое ожидание функции от случайных величин $\varphi(\xi)$ равно n-кратному интегралу по пространству R^n в формах:

векторной

$$M\varphi(\xi)=\int\limits_{R^n}\varphi(\bar{x})\frac{\partial^n F_\xi(\bar{x})}{\partial x_1\partial x_2..\partial x_n}\prod_{i=1}^{n}dx_i\ , \qquad (3.7)$$

координатной

$$M\varphi(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=$$

$$=\int\limits_{R_1}\int\limits_{R_2}...\int\limits_{R_n}\varphi(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^n F_\xi(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1\partial x_2..\partial x_n}dx_1dx_2..dx_n \qquad (3.8)$$

Следствие. В частном случае математическое ожидание функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ будет равно

$$M\varphi(\xi)=\int\limits_{R}\varphi(x)dF_\xi(x). \qquad (3.9)$$

Математическое ожидание (3.6) обладает свойствами.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной

$$MC=C\ .$$

Доказательство. Величина ξ называется постоянной, если она принимает одно значение C с вероятностью единица, т.е. $\xi=C$ и $P(\xi=C)=1$. Положим в равенстве (3.6) $\xi=x=C$ получим

$$MC=\int\limits_{R}CdF_\xi(x)=C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dF_\xi(x)=CF_\xi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=C\big(F_\xi(+\infty)-F_\xi(-\infty)\big)=C(1-0)=C$$

, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания

$$Ma\xi = aM\xi \ .$$

Доказательство. По определению математического ожидания (3.6) имеем

$$Ma\xi = \int\limits_R axdF_\xi(x) = a\int\limits_R xdF_\xi(x) = aM\xi \ .$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \ . \qquad (3.10)$$

Доказательство. Рассмотрим случайный вектор с независимыми координатами $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ и функцию $\varphi(\bar{\xi}) = \xi_1 \cdot \xi_2$ –равную произведению этих координат.

Тогда по формуле (3.8) найдем

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = \int\limits_{R_1}\int\limits_{R_2} x_1 \cdot x_2 \frac{\partial^2 F_\xi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \ . \qquad (3.11)$$

Но функция распределения $F_\xi(x_1, x_2)$ вектора $\bar{\xi}$ с независимыми координатами ξ_1 и ξ_2 равна произведению функций распределения независимых координат $F_\xi(x_1, x_2) = F_\xi(x_1) \cdot F_\xi(x_2)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 F_\xi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{dF_\xi(x_1)}{dx_1} \cdot \frac{dF_\xi(x_2)}{dx_2} \ .$$

Подставляя последнее равенство в соотношение (3.11), с учетом определения 1 (3.6), получим

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = \int\limits_{R_1}\int\limits_{R_2} x_1 \cdot x_2 dF_\xi(x_1) dF_\xi(x_2) =$$

$$= \int\limits_{R_1} x_1 dF_{\xi_1}(x_1) \cdot \int\limits_{R_2} x_2 dF_{\xi_2}(x_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \ ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Т.к. функция распределения произведения конечного числа независимых случайных величин равна произведению функций распределения этих величин

$$F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n),$$

то, аналогично, получим

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdot \ldots \cdot M\xi_n .$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2 . \qquad (3.12)$$

Доказательство. Рассмотрим случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ и функцию от этого вектора, равную сумме его координат $\varphi(\overline{\xi}) = \xi_1 + \xi_2$.

Тогда по теореме (3.8) с учетом равенств

$$\int_{R_2} \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 = \frac{dF_{\xi_1}(x_1)}{dx_1}, \quad \int_{R_1} \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 = \frac{dF_{\xi_2}(x_2)}{dx_1}$$

Определим

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \int_{R_1} \int_{R_2} (x_1 + x_2) \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{R_1} \int_{R_2} x_1 \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_{R_1} \int_{R_2} x_2 \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{R_1} x_1 \left(\int_{R_2} \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \int_{R_2} x_2 \left(\int_{R_1} \frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \int_{R_1} x_1 dF_{\xi_1}(x_1) + \int_{R_2} x_2 F_{\xi_2}(x_2) = M\xi_1 + M\xi_2 ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_3 \,. \tag{3.13}$$

Доказательство проводится аналогичным образом.

§ 3.7. Дисперсия случайной величины

Дисперсия, как и математическое ожидание, также является важной частной числовой характеристикой закона распределения случайной величины. Она характеризует отклонение от центра закона и является мерой рассеяния относительно математического ожидания.

Так, при измерении физических величин дисперсия является погрешностью этих измерений.

Определение 1. Случайная величина $\overset{0}{\xi} = \overset{0}{\xi}(\omega)$ называется центрированной, если ее математическое ожидание равно нулю

$$M\overset{0}{\xi} = 0 \,.$$

Любую случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ можно центрировать с помощью преобразования сдвига, а именно,

$$\overset{0}{\xi} = \xi - M\xi \,.$$

Действительно, согласно четвертому и первому свойствам математического ожидания, получим

$$M\overset{0}{\xi} = M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0 \,.$$

Замечание. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания или флуктуация всегда будет центрированной величиной.

Определение 2. Дисперсией (рассеянием) случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ называется математическим ожиданием ее квадрата центрированной случайной величины

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 . \tag{3.14}$$

Дисперсию проще вычислять согласно следующей теореме.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины ξ и квадрата ее математического ожидания:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 . \tag{3.15}$$

Доказательство. Приняв во внимание второе и четвертое свойства математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий) упростим формулу (3.14), выражающую определение дисперсии:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2\right) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 =$$
$$= M\xi^2 - (M\xi)^2 ,$$

что и требовалось доказать.

Определение 3. Стандартом или средним квадратическим отклонением случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ называется арифметический квадратный корень из дисперсии

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} . \tag{3.16}$$

Стандарт, как и дисперсия также характеризует отклонение от центра закона–математического ожидания и является погрешностью измерений физических величин.

Дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины. Так как стандарт равен квадратному корню из дисперсии, то его размерность совпадает с размерностью случайной величины. Поэтому, стандарт вычисляют в тех случаях, когда необходимо иметь оценку рассеяния в размерностях случайной величины.

Так как дисперсия (3.14) есть математическое ожидание функции от случайной величины $\varphi(\xi)=(\xi-M\xi)^2$, то вычисляют дисперсию (3.14) на основе следствия (3.9) по формуле

$$D\xi=\int_R (x-M\xi)^2\,dF_\xi(x). \tag{3.17}$$

Аналогично, дисперсию (3.15) вычисляют по формуле

$$D\xi=\int_R x^2 dF_\xi(x)-\left(\int_R x dF_\xi(x)\right)^2. \tag{3.18}$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна:

$$D\xi=\int_R (x-M\xi)^2\,dF_\xi(x)\geq 0.$$

Доказательство. Т.к. функция распределения $F_\xi(x)$ монотонно убывает, то ее дифференциал $dF_\xi(x)\geq 0$. Поэтому подинтегральное выражение и, следовательно, сам интеграл неотрицательные.

Свойство 2. Дисперсия случайной величины равна нулю тогда и только тогда, когда величина постоянная, т.е.:

$$D\xi=0 \Leftrightarrow \xi=a \text{ и } P(\xi=a)=1.$$

Доказательство. Если $\xi=a$, то $M\xi=a$ и $\xi-M\xi=a-a=0$. Поэтому по формуле (3.17) $D\xi=0$.

Обратно, если $D\xi = \int\limits_R (x - M\xi)^2 dF_\xi(x) = 0$, то $x - M\xi = 0$, $x = M\xi$, $\xi = x = M\xi = a$.

Свойство 3. Если a и b –постоянные, то

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi ,$$

$$\sigma_{a\xi+b} = |a|\sigma_\xi .$$

Доказательство. Действительно,

$$D(a\xi + b) = M(a\xi + b - M(a\xi + b))^2 = M(a\xi + b - aM\xi - b)^2 =$$

$$= Ma^2(\xi - M\xi)^2 = a^2 M(\xi - M\xi)^2 = a^2 D\xi .$$

Свойство 4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 .$$

Доказательство. По формуле (3.18) для вычисления дисперсий имеем

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M(\xi_1 + \xi_2)^2 - (M(\xi_1 + \xi_2))^2 .$$

Раскроем скобки и, пользуясь свойствами математического ожидания суммы двух величин (3.12) и произведением независимых случайных величин (3.10), получим

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M\left(\xi_1^2 + 2\xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_2^2\right) - (M\xi_1 + M\xi_2)^2 =$$

$$= M\xi_1^2 + 2M\xi_1 \cdot M\xi_2 + M\xi_2^2 - (M\xi_1)^2 - 2M\xi_1 \cdot M\xi_2 - (M\xi_2)^2 =$$

$$= \left[M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2\right] + \left[M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2\right] = D\xi_1 + D\xi_2 .$$

Следствие. Дисперсия суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n.$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

§ 3.8. Дискретная случайная величина

Определение 1. Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное (дискретное) множество изолированных значений с вероятностью единица.

Примеры дискретных случайных величин:

1) количество дождливых дней в году;
2) количество студентов курса опоздавших на лекцию;
3) число родившихся мальчиков среди ста новорожденных.

Согласно определению, случайная величина ξ принимает дискретное множество изолированных значений с вероятностью единица (рис. 3.10), т.е.

$$\xi=x_k,\ k=1,2,3,\ldots \text{ и } P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} x_k\right)=1.$$

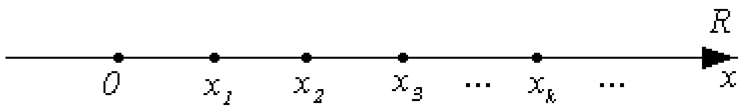

Рис. 3.10. Дискретное множество значений случайной величины

В силу изолированности, а значит несовместимости событий $\xi=x_k$ вероятность их суммы равна сумме вероятностей

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} x_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi=x_k)=1.$$

Обозначим через $P(\xi = x_k) = p_k \geq 0$ и получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \tag{3.19}$$

Определение 2. Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон можно задать аналитически (в виде формулы), таблично или геометрически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая–их вероятности:

Таблица 3.1

Распределение вероятностей дискретной случайной величины

$\xi = x_k$	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$p_k = P(\xi = x_k)$	P_1	P_2	$\cdots$	P_k	$\cdots$

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

При графическом задании закона распределения дискретной случайной величины в прямоугольной системе координат Oxp строят точки (x_k, p_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, которые затем соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения (рис. 3.11).

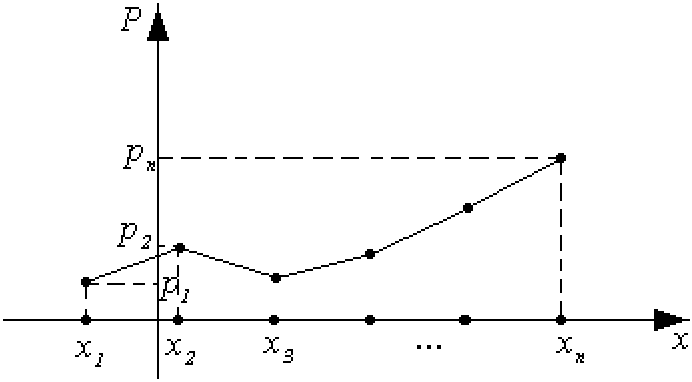

Рис. 3.11. Многоугольник распределения

Зная закон распределения дискретной случайной величины можно построить ее функцию распределения, представляющую собой, согласно определению, функцию накопленных вероятностей

$$F_{\xi}(x) = \sum_{x_k < x} P(\xi = x_k), \tag{3.20}$$

где суммирование распространяется на все значения индекса k, для которых $x_k < x$.

Из закона распределения дискретной случайной величины следует, что значения $\xi = x \neq x_k$, $k = 1,2,\ldots$ отличные от x_k она принимает с вероятностью ноль $P(\xi = x \neq x_k) = 0$. Следовательно функция распределения в точках $x \neq x_k$ сохраняет постоянные значения, а в точках $\xi = x_k$ имеет разрывы первого рода (скачки), оставаясь непрерывной слева, при этом сумма скачков равна единице. График функции распределения представляет неубывающую ступенчатую, кусочно-постоянную, непрерывную слева линию, разрывы которой сосредоточены в значениях случайной величины $\xi = x_k$, $k = 1,2,\ldots$ и равны вероятностям этих значений $P(\xi = x_k) = p_k$.

Заметим, что, согласно (3.5), скачки выражаются через функцию распределения следующим образом

$$p_k = P(\xi = x_k) = F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k), \tag{3.21}$$

где $F_\xi(x_k + 0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_\xi(x_k + \varepsilon)$ –предел функции распределения справа.

Пример. Из 25 изделий, среди которых 5 отмечены государственным «Знаком качества», наугад извлекают три изделия. Найти закон распределения числа изделий, отмеченных «Знаком качества» и оказавшихся в выборке. Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения и построить ее график. Определить вероятность событий $P(\xi = 1)$, $P(1 \le \xi < 2{,}5)$, $P(1{,}5 < \xi < 4)$.

Решение. Обозначим через случайную величину ξ –число изделий отмеченных «Знаком качества» и оказавшихся в выборке, которая принимает четыре возможных значения $\xi = 0, 1, 2, 3$.

По формуле классической вероятности найдем вероятности событий:

$$p_0 = P(\xi = 0) = \frac{C_5^0 \cdot C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{20! \cdot 3! \cdot 22!}{3! \cdot 17! \cdot 25!} = \frac{57}{115},$$

$$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{20}^2}{C_{25}^3} = \frac{19}{46},$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{20}^1}{C_{25}^3} = \frac{2}{23},$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{20}^0}{C_{25}^3} = \frac{1}{230} .$$

На основе проведенных вычислений составим в табличной форме закон распределения дискретной случайной величины ξ

Таблица 3.2

Закон распределения вероятностей

$\xi = x_k$	0	1	2	3
$p_k = P(\xi = x_k)$	$\frac{57}{115}$	$\frac{19}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{230}$

$\sum_{k=0}^{3} p_k = 1$

и построим ее многоугольник распределения (рис. 3.12)

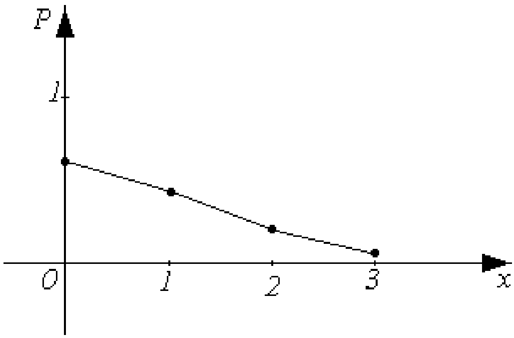

Рис. 3.12. Многоугольник распределения числа изделий, отмеченных «Знаком качества»

По закону распределения числа изделий, отмеченных «Знаком качества», на основе формулы (3.20) найдем функцию распределения $F_\xi(x)$ этой случайной величины:

1) если $x \le 0$, то $F_\xi(x) = 0$;

2) если $0 < x \le 1$, $F_\xi(x) = \dfrac{57}{115}$;

3) если $1 < x \le 2$, то $F_\xi(x) = \dfrac{57}{115} + \dfrac{19}{46} = \dfrac{209}{230}$;

4) если $2 < x \le 3$, то $F_\xi(x) = \dfrac{209}{230} + \dfrac{2}{23} = \dfrac{229}{230}$;

5) если $3 < x$, то $F_\xi(x) = \dfrac{229}{230} + \dfrac{1}{230} = 1$.

Таким образом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ \dfrac{57}{115}, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{209}{230}, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{229}{230}, \text{ если } 2 < x \le 3, \\ 1, \text{ если } 3 < x. \end{cases} \quad (3.22)$$

График функции распределения (3.22) приведен на рис 3.13.

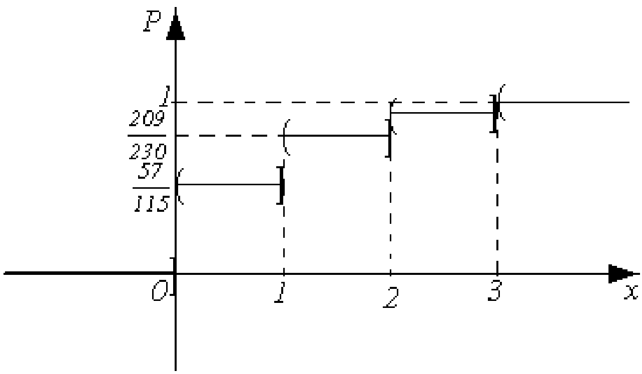

Рис. 3.13. График функции распределения числа изделий, отмеченных «Знаком качества»

На основе формул (3.3), (3.21), (3.22) определим вероятности следующих событий:

$$P(\xi = 1) = F_\xi(1+0) - F_\xi(1) = \frac{209}{230} - \frac{57}{115} = \frac{19}{46},$$

$$P(1 \le \xi < 2{,}5) = F_\xi(2{,}5) - F_\xi(1) = \frac{229}{230} - \frac{57}{115} = \frac{1}{2},$$

$$P(1{,}5 < \xi < 4) = F_\xi(4) - F_\xi(1{,}5) = 1 - \frac{209}{230} = \frac{21}{230}.$$

§ 3.9. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Как уже известно, математическое ожидание случайной величины ξ выражается интегралом Римана-Стильтьеса (3.6), который определяется предельным переходом его интегральных сумм

$$M\xi = \int_R x dF_\xi(x) = \lim \sum_k x_k \Delta F_\xi(x).$$

Поэтому, если случайная величина дискретная $\xi = x_k$, $k = 1,2,3,\ldots$, то ее математическое ожидание будем определять этой интегральной суммой, которую с учетом формулы (3.3), можно преобразовать следующим образом

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Delta F_\xi(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left[F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(x_k < \xi \le x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех ее значений на вероятности этих значений:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \,. \tag{3.23}$$

В частном случае, если случайная величина принимает конечное множество значений с вероятностью единица $\xi = x_k$, $k = 1,2,\ldots,N$, $\sum_{k=i}^{N} p_k = 1$ и вероятность распределена равномерно $p_k = P(\xi = x_k) = \frac{1}{N}$, то математическое ожидание случайной величины равно ее среднему арифметическому значению

$$M\xi = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \,.$$

Замечание. Для дискретных случайных величин справедливы приведенные и доказанные в параграфе 3.6 все свойства математических ожиданий.

Дисперсию дискретных случайных величин на основе выражений (3.14), (3.15), (3.23) определяют по формулам

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \right)^2 p_k \,, \tag{3.24}$$

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \right)^2 . \tag{3.25}$$

При этом дисперсии (3.24), (3.25) удовлетворяют всем четырем свойствам, приведенным в параграфе 3.7.

Пример. Рассмотрим приведенную в примере предыдущего параграфа 3.8 дискретную случайную величину ξ –число изделий, отмеченных «Знаком качества». На основе ее закона распределения (табл. 3.2) вычислим математическое ожидание, дисперсию и стандарт этой случайной величины.

Решение. Согласно формулам (3.23), (3.25) и (3.16) найдем

$$M\xi = 0\cdot\frac{57}{115} + 1\cdot\frac{19}{46} + 2\cdot\frac{2}{23} + 3\cdot\frac{1}{230} = \frac{69}{115} = 0{,}6\,,$$

$$D\xi = 0^2\cdot\frac{57}{115} + 1^2\cdot\frac{19}{46} + 2^2\cdot\frac{2}{23} + 3^2\cdot\frac{1}{230} - 0{,}6^2 = \frac{92}{115} - 0{,}36 =$$
$$= 0{,}8 - 0{,}36 = 0{,}44,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{0{,}44} \approx 0{,}66\,.$$

Итак, математическое ожидание $M\xi = 0{,}6$ характеризует центр закона распределения дискретной случайной величины ξ –числа изделий со «Знаком качества» в выборке, а дисперсия $D\xi = 0{,}44$ и стандарт $\sigma_\xi = 0{,}66$ меру рассеяния вокруг математического ожидания. При этом размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины, а размерность стандарта совпадает с размерностью случайной величины.

§ 3.10. Непрерывная случайная величина

Определение 1. Случайная величина называется непрерывной, если ее возможные начения составляют непрерывное множество, а любое дискретное множество значений она принимает с вероятностью ноль.

Пример. Рассмотрим испытание–выстрел из орудия и случайную величину ξ –расстояние, которое пролетит снаряд. Данная случайная величина будет непрерывной. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих факторов (погрешности в заряде и в изготовлении снаряда, силы и направления ветра, температуры и т.д.), которые влияют на дальность полета снаряда. Поэтому случайная величина ξ может принять любое значение из некоторого промежутка $\langle a,b\rangle$, в котором нельзя отделить промежутками одно возможное значение от другого.

Из определения непрерывной случайной величины следует, что любое дискретное множество значений она принимает с вероятностью ноль, т.е. если $\xi = x_k$, $k = 1,2,\ldots$, то $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right) = 0$ и по третьему свойству определения вероятности (1.3) имеем

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 0\text{, где}$$

$$p_k = P(\xi = x_k) \geq 0.$$

Откуда

$$p_k = 0,\ k = 1,2,\ldots \tag{3.26}$$

Из выражений (3.21), (3.26) следует, что функция распределения непрерывной случайной величины не имеет скачков, т.е. является непрерывной. Более того, будем предполагать, что она– дифференцируемая.

Кроме того, по теореме Лебега-Витали в приложении к функциям распределения[1] справедливо интегральное представление последней

$$F_\xi = (x) \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, \tag{3.27}$$

где

---

[1] См., например, Н.С. Ландкоф. Введение в теорию вероятностей.–Харьков: Изд-во ХГУ, 1968.–235с. (стр. 18).

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \qquad (3.28)$$

Определение 2. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины ξ называется производная $f_\xi(x)$ функции распределения $F_\xi(x)$.

Определение 3. Кривой распределения называется график плотности распределения.

Таким образом, зная плотность распределения, можно по формуле (3.27) найти функцию распределения и, наоборот, по известной функции распределения можно определить по формуле (3.28) плотность вероятности.

Заметим, что плотность вероятности неприменима для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Исходя из интегрального представления (3.27), (3.28) функции распределения, сформулируем следующую теорему, которая определяет вероятность в выборочном пространстве R (числовая ось Ox).

Теорема. Если случайная величина ξ –непрерывная, то вероятность события–полуинтервала числовой оси $E = [a,b)$ равняется интегралу по событию E от плотности вероятности этой случайной величины:

$$P_\xi(E) = \int_E f_\xi(x)dx. \qquad (3.29)$$

Доказательство. Вероятность события–полуинтервала числовой оси выражается равенством (3.3)

$$P_\xi(E) = P_\xi([a,b)) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Подставляя в последнее равенство, интегральное представление функции распределения (3.27), получим

$$P_\xi(E)=\int_{-\infty}^{b} f_\xi(x)dx-\int_{-\infty}^{a} f_\xi(x)dx=\int_{a}^{b} f_\xi(x)dx=\int_{E} f_\xi(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Геометрически утверждение теоремы можно интерпретировать так (рис. 3.14): вероятность того, что непрерывная случайная величина ξ примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a,b)$, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Из интегрального представления функции распределения (3.27), (3.10.3), теоремы (3.29) следует свойства плотности вероятности:

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией:

$$f_\xi(x)\ge 0.$$

Доказательство. Функция распределения–неубывающая функция, следовательно, ее производная (3.28) будет неотрицательной функцией.

Геометрически это свойство означает (рис. 3.14), что кривая распределения расположена над осью Ox, либо на этой оси.

2. Интеграл по всей числовой оси Ox (выборочному пространству R) от плотности вероятности равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=1. \tag{3.30}$$

Доказательство. Рассмотрим в качестве события $E=(-\infty,+\infty)=R$ –всю числовую ось Ox. Тогда по теореме (3.29) и второму свойству определения вероятности (1.2), найдем

$$\begin{cases} P_\xi(R) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx, \\ R_\xi(R) = 1 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1.$$

Равенство (3.30) называется условием нормировки плотности вероятности. На рис. 3.14 приведем возможную кривую распределения, из которого следует, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью Ox должна равняться единице.

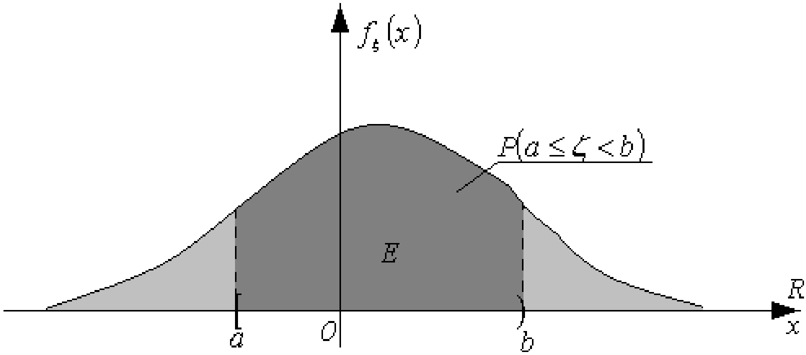

Рис. 3.14. Кривая распределения непрерывной случайной величины

Пример. Модуль скорости молекулы газа является непрерывной случайной величиной ξ,–распределенной по закону Максвелла:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}, \ x \ge 0, \end{cases}$$

где $h = \sqrt{\dfrac{m}{2kT}}$, m –масса молекулы, k –постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Найти: а) функцию распределения вероятностей случайной величины ξ; б) вероятность события $P\left(0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{2}h}\right)$.

Решение. а) Функция распределения $F_\xi(x)$ выражается через плотность вероятности равенством (3.27)

$$F_\xi(x) = \int_0^x \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-h^2t^2} dt = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^2 e^{-h^2t^2} dt =^*$$

Данный интеграл не берется в конечном виде. Выразим его через функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\upsilon^2}{2}} dv, \qquad (3.31)$$

которая также является неберущимся интегралом, но она протабулирована и широко представлена в литературе. Будем вычислять интеграл по частям

$$\begin{bmatrix} u = t, \quad du = dt \\ dv = te^{-h^2t^2}, \ v = \int te^{-h^2t^2} dt = -\frac{1}{2h^2} e^{-h^2t^2} \end{bmatrix}$$

$$=^* \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{t}{2h^2} e^{-h^2t^2} \Big|_0^x + \frac{1}{2h^2} \int_0^x e^{-h^2t^2} dt \right) =^*$$

сделаем в интеграле замену: $t = \frac{v}{\sqrt{2}h}$, $dt = \frac{dv}{\sqrt{2}h}$, $t = 0$, $v = 0$; $t = x$, $v = \sqrt{2}hx$ и получим

$$=^* \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}hx} e^{-\frac{v^2}{2}} dv - \frac{2hx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} = 2\Phi\left(\sqrt{2}hx\right) - \frac{2hx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Решение. б) Вероятности событий вычислят по формуле (3.29)

$$P\left(0 \le \xi < \frac{1}{\sqrt{2}h}\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}h}} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-h^2t^2} dt .$$

Легко видеть, что данный интеграл равен значению функции распределения в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}h}$

$$P\left(0 \le \xi < \frac{1}{\sqrt{2}h}\right) = F_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}h}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{2}h \cdot \frac{1}{\sqrt{2}n}\right) - \frac{2h}{\sqrt{2\pi}h} e^{-\frac{h^2}{2h^2}} =$$

$$= 2\Phi(1) - \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \approx 2 \cdot 0{,}3413 - 0{,}4841 \approx 0{,}2 .$$

§ 3.11. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Из интегрального представления математического ожидания случайной величины (3.6) и (3.28) следует выражение математического ожидания непрерывной случайной величины ξ равенством

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx , \qquad (3.32)$$

где $f_\xi(x)$–плотность распределения случайной величины ξ.

Действительно

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x F'_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx .$$

Замечание. Для непрерывных случайных величин справедливы приведенные и доказанные в параграфе 3.6 все свойства математических ожиданий.

Дисперсию непрерывных случайных величин на основе выражений (3.17), (3.18), (3.28) определяют по формулам

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx, \tag{3.33}$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \right)^2, \tag{3.34}$$

которые удовлетворяют всем четырем свойствам из параграфа3.7.

Пример. Рассмотрим приведенную в примере предыдущего параграфа 3.10 непрерывную случайную величину ξ –модуль скорости молекулы газа, распределенную по закону Масквелла:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Требуется найти: а) среднюю скорость молекул газа; б) дисперсию скорости молекул.

Решение. а) Средняя скорость молекул газа или математическое ожидание определяются равенством (3.32):

$$M\xi = \int\limits_0^\infty x \cdot \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2} dx =^*$$

Сделаем в данном интеграле замену переменной: $-h^2x^2 = t,$ $xdx = \dfrac{dt}{-2h^2}$, $x = 0, t = 0, x = \infty, t = -\infty$ и получим

$$=^* \frac{2}{\sqrt{\pi}h} \int\limits_0^{-\infty} te^t dt =^*,$$

который вычислим по формуле интегрирования по частям $u = t,\ dv = e^t dt,\ du = dt,\ v = e^t$

$$=^{*} \frac{2}{\sqrt{\pi} h}\left[te^{t}\Big|_{0}^{-\infty} - \int_{0}^{-\infty} e^{t} dt\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi} h}\left[0 - e^{t}\Big|_{0}^{-\infty}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi} h}.$$

Итак средняя скорость молекул газа равна $M\xi = \dfrac{2}{\sqrt{\pi} h}$.

<u>Решение.</u> б) дисперсия скорости молекул найдем по формуле (3.34) с учетом $M\xi = \dfrac{2}{\sqrt{\pi} h}$:

$$D\xi = \int_{0}^{\infty} x^{2} \frac{4h^{3}}{\sqrt{\pi}} x^{2} e^{-h^{2}x^{2}} dx - \frac{4}{\pi h^{2}} =^{*}$$

Вычисляя данный интеграл дважды по формуле интегрирования по частям, можно его привести к виду

$$=^{*} \frac{3}{\sqrt{\pi} h} \int_{0}^{\infty} e^{-h^{2}x^{2}} dx - \frac{4}{\pi h^{2}} =^{*}$$

и, делая в нем замену: $hx = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$, $dx = \dfrac{dv}{\sqrt{2}}$, выразим его через функцию Лапласа (3.31)

$$=^{*} \frac{3}{h^{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{v^{2}}{2}} dv - \frac{4}{\pi h^{2}} = \frac{3}{h^{2}} \Phi(\infty) - \frac{4}{\pi h^{2}} =^{*},$$

которая на бесконечности равна $\Phi(\infty) = \dfrac{1}{2}$,

$$=^{*} \frac{3}{2h^{2}} - \frac{4}{\pi h^{2}} = \frac{3\pi - 8}{2\pi h^{2}}.$$

Глава 4. Законы распределения вероятностей

В настоящей главе рассмотрим законы распределения вероятностей случайных величин. Не все существующие законы распределения одинаково важны в теории вероятностей. Но три из них– биномиальный, Пуассона и нормальный, названные классическими законами распределений, являются основополагающими в развитии теории вероятностей и нашли наиболее широкое применение в практических приложениях.

§ 4.1. Биномиальный закон

Биномиальный закон разработан Бернулли и связан он с формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m} , \qquad (4.1)$$

где C_n^m –число сочетаний из n элементов по m элементам.

Определение. Испытания называются независимыми, если вероятности событий в каждом испытании не зависят от исходов в других испытаниях.

Рассмотрим схему повторных независимых испытаний Бернулли (см. §1.5). Пусть в результате испытания происходит событие A, вероятность которого равна $P(A)$. Тогда вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Производится серия из n независимых испытаний.

Обозначим через A_n^m –событие, заключающееся в том, что в серии из n независимых испытаний событие A происходит m раз. На основе операций над событиями (см. §1.4) выразим событие A_n^m, $m = 0,1,2,3,\ldots,n$ через события A и $\overline{A}$:

1) $m = 0$, событие A_n^0 представляется одним произведением из n противоположных событий $A_n^0 = \overline{A} \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}$, при этом исходим из того, что число сочетаний из n по нулю равно единице, т.е. $C_n^0 = 1$;

2) $m = 1$, событие A_n^1 можно выразить как сумму из $n = C_n^1$ слагаемых, в каждом из которых одно событие A последовательно занимает $1,2,\ldots,n$-ое места, а на остальных $n-1$ местах стоят противоположные события $\overline{A}$

$$A_n^1 = \left(A \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{A} \cap A \cap \ldots \cap \overline{A}\right) \cup \ldots \cup \left(\overline{A} \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}\right);$$

……………………………………………………………………………..

$m+1)$ событие A_n^m представляет собой сумму из C_n^m слагаемых, в каждом из которых произведения составлены в различных порядках из m событий A и $n-m$ событий $\overline{A}$

$$A_n^m = \bigcup_{1}^{C_n^m} \left(\underbrace{A \cap A \cap \ldots \cap A}_{m} \cap \underbrace{\overline{A} \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}}_{n-m} \right);$$

………………………………………………………………………………

$n+1)$ $m = n$, событие A_n^n выражается одним $\left(1 = C_n^n\right)$ произведением из n событий A

$$A_n^n = A \cap A \cap \ldots \cap A.$$

Теперь найдем вероятности событий A_n^m. Так как события–слагаемые скобки–несовместные, а события в скобках A и $\overline{A}$ – независимые, то, в силу третьей аксиомы определения вероятности событий (1.3) и определения 2 (см. §2.6), вероятность от суммы произведения событий равна сумме произведений вероятностей этих событий:

$$
\begin{gathered}
P\left(A_n^0\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\overline{A}\right)=q^n=C_n^0 p^0 q^n,\\
P\left(A_n^1\right)=n\cdot P(A)\cdot P\left(\overline{A}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\overline{A}\right)=npq^{n-1}=C_n^1 p^1 q^{n-1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P\left(A_n^m\right)=C_n^m P(A)^m\cdot P\left(\overline{A}\right)^{n-m}=C_n^m p^m q^{n-m},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P\left(A_n^n\right)=P(A)\cdot P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)=p^n=C_n^n p^n q^0.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Установленная вероятность события A_n^m (4.2) называется формулой Бернулли.

Введем случайную величину:

μ_n –число появлений события A в серии из n независимых испытаний.

Тогда

$$P(\mu_n=m)=P\left(A_n^m\right)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

и получили заданный аналитически биномиальный закон распределения вероятностей дискретной величины μ_n

$$P(\mu_n=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.3}$$

где $m=0,1,2,\ldots,n$.

Аналитически заданный биномиальный закон (4.3) можно, согласно табл. 3.1, выразить в табличной форме

Таблица 4.1

Биномиальный закон распределения вероятностей

$\mu_n = m$	0	1	2	$\dots$	m	$\dots$	
$p_m = P(\mu_n = m)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$		$C_n^n p^n q^0$

Любой закон дискретной случайной величины должен удовлетворять условию нормировки (3.19) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Покажем, что биномиальный закон удовлетворяет этому условию.

Действительно, полагая в формуле бинома Ньютона (4.1) $a = p$, $b = q$, и учитывая, что $p + q = 1$, получим

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-1} = (p+q)^n = 1.$$

Биномиальный закон можно задать и графически, построив в прямоугольной системе координат $O\mu_n p_m$ многоугольник распределения, подобно ломанной на рис. 3.11.

По биномиальному закону (4.3) на основе выражения (3.20) можно найти функцию распределения дискретной величины μ_n

$$F_{\mu_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{m=0}^{[x]} C_n^m p^m q^{n-m}, & 0 < x \le n, \\ 1, & n < x, \end{cases} \qquad (4.4)$$

где $[x]$ –целая часть числа числа x, которая называется функцией антье от x.

Функция распределения (4.4) является полной характеристикой случайной величины μ_n. Действительно, зная функцию распределения, можно, аналогично решению примера в параграфе 3.8, находить вероятности любых событий.

Математическое ожидание дискретной случайной величины μ_n, характеризующее среднее появление события A в серии из n независимых испытаний определяется следующей теоремой.

Теорема. Математическое ожидание распределенной по биномиальному закону случайной величины μ_n равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в одном испытании:

$$M\mu_n = np . \tag{4.5}$$

Доказательство. Случайную величину μ_n можно представить в виде суммы независимых случайных величин $\mu_n = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \ldots + \varsigma_i + \ldots + \varsigma_n$, $i = 1,2,\ldots,n$ или $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i$ где

$$\varsigma_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ появилось в } i-\text{ом испытании}, \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не появилось в } i-\text{ом испытании}. \end{cases}$$

Вероятность появления события A в i-ом испытании, согласно (3.23), определяется равенством

$$M\mu_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p ,$$

т.е. не зависит от номера испытания i и равно вероятности появления события A в одном испытании $P(A) = p$.

Тогда, согласно следствию к четвертому свойству математического ожидания (3.13), математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\mu_i = \sum_{i=1}^{n} M\varsigma_i = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p\,.$$

Математическое ожидание (4.5) характеризует положение центра биномиального закона распределения вероятностей. Меру же рассеяния относительно математического ожидания (4.5) определяет дисперсия следующей теоремой.

Теорема. Дисперсия распределенной по биномиальному закону случайной величины μ_n равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:

$$D\mu_n = npq\,. \tag{4.6}$$

Доказательство. Представим случайную величину μ_n в виде суммы независимых случайных величин $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i$, где

$$\varsigma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ появится в } i-\text{ом испытании,} \\ 0, & \text{если } A \text{ не появится в } i-\text{ом испытании.} \end{cases}$$

Рассмотрим квадраты случайных величин ς_i

$$\varsigma_i^2 = \begin{cases} 1^2 = 1, & \text{если } A \text{ появится в } i-\text{ом испытании,} \\ 0^2 = 0, & \text{если } A \text{ не появится в } i-\text{ом испытании} \end{cases}$$

и найдем их математические ожидания

$$M\varsigma_i^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p\,,\ i = 1,2,\ldots,n\,.$$

В силу взаимной независимости случайных величин ς_i, дисперсия случайной величины μ_n по следствию к свойству 4 (3.13) будет равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D\mu_n = D\sum_{i=1}^{n} \varsigma_i = \sum_{i=1}^{n} D\varsigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(M\varsigma_i^2 - \left(M\varsigma_i \right)^2 \right),$$

где, согласно теореме (3.15),

$$D\varsigma_i = M\varsigma_i^2 - (M\varsigma_i)^2 .$$

Подставляя найденные результаты в последнее равенство, окончательно получим:

$$D\mu_n = \sum_{i=1}^{n}\left(p - p^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p(1-q) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq ,$$

что и требовалось доказать.

<u>Пример.</u> Отрезок AB разделен точкой C в отношении $2:1$. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения. Выполнить следующие задания: а) найти закон распределения точек, попавших на отрезок AC; б) построить многоугольник распределения; в) найти функцию распределения и построить ее график; г) определить вероятности событий $P(\mu_4 = 3)$, $P(0{,}5 < \mu_4 < 2{,}3)$, $P(3{,}6 < \mu_4)$; д) вычислить математическое ожидание, дисперсию и стандарт числа точек попавших на отрезок AC.

Решение. а) Обозначим через событие A –брошенная наудачу точка попала на отрезок AC. Тогда по формуле геометрической вероятности (2.2) вероятности события A и ему противоположного $\overline{A}$ будут равны: $P(A) = p = \frac{2}{3}$ и $P(\overline{A}) = 1 - p = q = \frac{1}{3}$.

Обозначим через случайную величину μ_4 –число попавших на отрезок AC точек из брошенных четырех точек на отрезок AB, которая принимает пять значений $\mu_4 = 0,1,2,3,4$. Случайная величина μ_4 распределена по биномиальному закону, на основе которого по формуле (4.3) определим вероятности следующих событий

$$p_0 = P(\mu_4 = 0) = C_4^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}01,$$

$$p_1 = P(\mu_4 = 1) = C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81} \approx 0{,}10,$$

$$p_2 = P(\mu_4 = 2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} \approx 0{,}30,$$

$$p_3 = P(\mu_4 = 3) = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81} \approx 0{,}39,$$

$$p_4 = P(\mu_4 = 4) = C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81} \approx 0{,}20.$$

На основе проведенных вычислений составим в табличной форме биномиальный закон случайной величины μ_4

Таблица 4.2

Биномиальный закон распределения вероятностей случайной величины μ_4

$\mu_4 = m$	0	1	2	3	4
$p_m = P(\mu_4 = m)$	0,01	0,10	0,30	0,39	0,20

$\sum_{m=0}^{4} p_m = 1$

Решение б) По приведенному в табл. 4.2 закону случайной величины μ_4 построим ее многоугольник распределения в прямоугольной системе координат Oxp

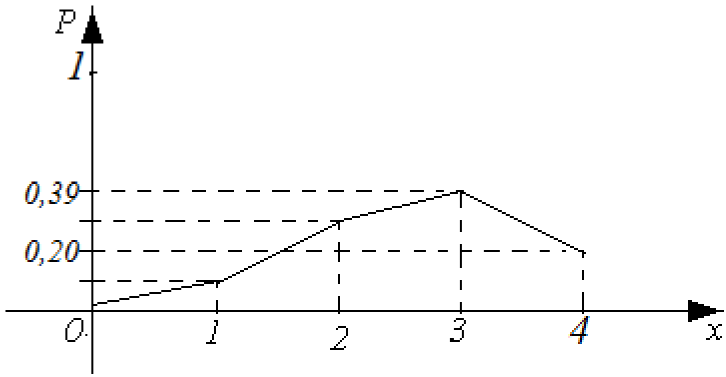

Рис. 4.1. Многоугольник распределения числа точек, попавших на отрезок AC

Решение в) По биномиальному закону распределения вероятностей случайной величины μ_4 (табл. 4.2, рис. 4.1), на основе формулы (4.4) найдем функцию распределения этой случайной величины:

1) если $x \le 0$, то $F_{\mu_4}(x) = 0$;

2) если $0 < x \le 1$, то $F_{\mu_4}(x) = 0{,}01$;

3) если $1 < x \le 2$, то $F_{\mu_4}(x) = 0{,}01 + 0{,}10 = 0{,}11$;

4) если $2 < x \le 3$, то $F_{\mu_4}(x) = 0{,}01 + 0{,}10 + 0{,}030 = 0{,}41$;

5) если $3 < x \le 4$, то $F_{\mu_4}(x) = 0{,}01 + 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}39 = 0{,}8$;

6) если $4 < x$, то $F_{\mu_4}(x) = 0{,}01 + 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}39 + 0{,}2 = 1$.

Следовательно, функцию распределения $F_{\mu_4}(x)$ можно представить выражением

$$F_{\mu_4}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x \le 0,\\ 0{,}01, \text{ если } 0 < x \le 1,\\ 0{,}11, \text{ если } 1 < x \le 2,\\ 0{,}41, \text{ если } 2 < x \le 3,\\ 0{,}80, \text{ если } 3 < x \le 4,\\ 1, \text{ если } 4 < x.\end{cases} \qquad (4.7)$$

График функции распределения $F_{\mu_4}(x)$ (4.7) приведем на рис. 4.2.

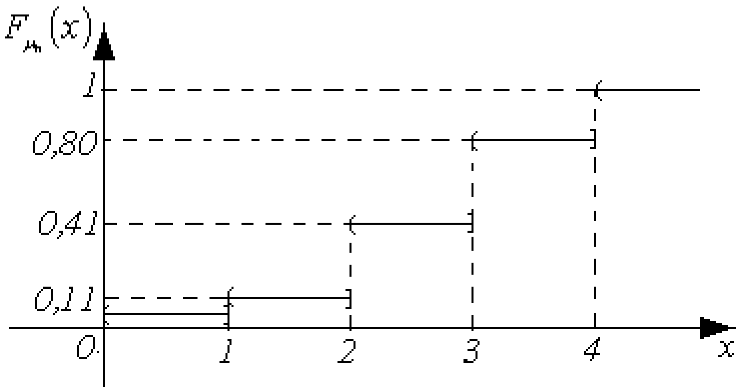

Рис. 4.2. График функции распределения числа точек, попавших на отрезок AC.

Из рис. 4.2 следует, что график функции распределения $F_{\mu_4}(x)$ представляет неубывающую, кусочно-постоянную, непрерывную слева линию, разрывы которой сосредоточены в значениях случайной величины μ_4 и равны вероятностям этих значений, приведенных в табл. 4.2.

Решение г) Используя функцию распределения $F_{\mu_4}(x)$ (4.7) и формулы (3.3), (3.21), найдем вероятности следующих событий:

$$P(\mu_4 = 3) = F_{\mu_4}(3+0) - F_{\mu_4}(3) = 0{,}80 - 0{,}41 = 0{,}39\,,$$

$$P(0{,}5 < \mu_4 < 2{,}3) = F_{\mu_4}(2{,}3) - F_{\mu_4}(0{,}5) = 0{,}41 - 0{,}01 = 0{,}40\,,$$

$$P(3{,}6 < \mu_4) = F_{\mu_4}(3{,}6) - F_{\mu_4}(3{,}6) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20\,.$$

Решение д) Математическое ожидание и дисперсию распределенной по биномиальному закону случайной величины μ_4 найдем, согласно утверждениям теорем, соответственно по формулам (4,5) и (4.6):

$$M\mu_4 = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}\,,$$

$$D\mu_4 = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}\,,$$

$$\delta_{\mu_4} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

§ 4.2. Закон Пуассона

Определение. Дискретная случайная величина ξ называется распределенной по закону Пуассона, если все неотрицательные целые значения она принимает с вероятностями:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}\,, \tag{4.8}$$

где $\lambda > 0$ –параметр закона, а $m = 0,1,2,\ldots$.

Приведем примеры распределенных по закону Пуассона случайных величин:

1) число вызовов на телефонной станции за некоторое время;

2) число отказов сложной аппаратуры за малое время, если отказы независимы друг от друга;

3) число элементарных частиц, регистрируемых прибором.

Покажем, что закон Пуассона удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1,\ \text{где}\ \ p_m = P(\xi = m).$$

Используем разложение функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots,$$

где $0! = 1$, который сходится при любом значении x.

Поэтому, полагая в разложении $x = \lambda$, получим выражение

$$e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}, \tag{4.9}$$

учитывая которое, докажем подчинение закона Пуассона (4.8) условию нормировки:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Теперь найдем частную числовую характеристику распределенной по закону Пуассона случайной величины ξ. Это математическое ожидание или среднее значение ξ, которое определяет центр закона распределения вероятностей.

Теорема. Математическое ожидание распределенной по закону Пуассона случайной величины ξ равно параметру закона λ:

$$M\xi = \lambda. \tag{4.10}$$

Доказательство. По определению математического ожидания дискретной случайной величины (3.23), имеем:

$$M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Сделаем в сумме замену переменной: $m-1=n$, $m=1$, $n=0$, $m=\infty$, $n=\infty$ и, с учетом формулы (4.9), получим

$$M\xi=\lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda\cdot e^0=\lambda,$$

что и требовалось доказать.

Меру рассеяния относительно математического ожидания распределенной по закону Пуассона случайной величины ξ определяет дисперсия, которую найдем по следующей теореме.

Теорема. Дисперсия распределенной по закону Пуассона случайной величины ξ также равна параметру закона λ:

$$D\xi=\lambda. \tag{4.11}$$

Доказательство. По определению дисперсии (3.15)

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2,$$

где по предыдущей теореме (4.10) $M\xi=\lambda$.

Остается найти математическое ожидание квадрата значений (3.23) распределенной по биномиальному закону случайной величины ξ:

$$M\xi^2\overset{def}{=}\sum_{m=0}^{\infty}m^2p_m=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left[m+\left(m^2-m\right)\right]\frac{\lambda^m}{m!}\right]=$$

$$=e^{-\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)\frac{\lambda^m}{m!}\right]=e^{-\lambda}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda\cdot\lambda^{m-1}}{(m-1)!}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^2\lambda^{m-2}}{(m-2)!}\right].$$

Сделаем замены переменных индексов в суммах: в первой: $m-1=n,\ m=1,\ n=0,\ m=\infty,\ n=\infty$; во второй: $m-2=k$, $m=2$, $k=0$, $m=\infty$, $k=\infty$; и, с учетом формулы (4.9), найдем $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = e^{-\lambda}\left[\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right] = e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda}\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}\left(\lambda + \lambda^2\right) =$$

$$= e^{\lambda-\lambda}\left(\lambda + \lambda^2\right) = \lambda + \lambda^2 .$$

Таким образом, по определению дисперсии (3.15) и теореме (4.10), окончательно получим

$$D\xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda .$$

§ 4.3. Связь между законами биномиальным и Пуассона

В схеме повторных независимых испытаний Бернули при условии когда вероятность события A в одном испытании мала $P(A) = p \ll 1$, а количество испытаний велико $n \gg 1$, закон Пуассона является предельным для биномиального закона. С этим связано еще одно название распределения Пуассона–закон редких событий.

Теорема Пуассона. Пусть последовательность распределенных по биномиальному закону случайных величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ удовлетворяют условию:

$$\lim_{n\to\infty} M\mu_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot p = \lambda . \tag{4.12}$$

Тогда эта последовательность стремится по вероятности к случайной величине ξ, подчиненной закону Пуассона:

$$\lim_{n\to\infty} P(\mu_n = m) = P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} . \tag{4.13}$$

Доказательство. Обозначим через $n \cdot p = \lambda_n$. Откуда $p = \dfrac{\lambda_n}{n}$ и $q = 1 - p$, $q = 1 - \dfrac{\lambda_n}{n}$ и из условия (4.12) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

Теперь по биномиальному закону (4.3) вероятность события $\mu_n = m$ будет равна

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot\frac{\lambda_n^m}{m!}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}.$$

Найдем пределы от левой и правой частей последнего равенства

$$\lim_{n\to\infty} P(\mu_n = m) = \lim_{n\to\infty} 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^m}{m!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}.$$

Вычислим пределы в правой части равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-\lambda_n}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda_n}\cdot\frac{-\lambda_n\cdot n}{n}} = e^{-\lambda}, \text{ т.к.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-\lambda_n}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda_n}} = e$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\lambda_n n}{n} = -\lambda$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n^m}{m!} = \dfrac{\lambda^m}{m!}$; остальные пределы равны единице.

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} P(\mu_n = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = P(\xi = m),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть случайная величина μ_n распределеена по биномиальному закону. При этом $n \gg 1$–число независимых испытаний велико, а $p \ll 1$–вероятность события мала.

Тогда точное значение вероятности события $P(\mu_n = m)$ дает формула Бернули $P(\mu_n = m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$, по которой вычислить эту вероятность весьма затруднительно в силу больших n и малых p.

Однако, полагая $\lambda \approx np$, приближенное значение этой вероятности можно вычислить по приближению Пуассна

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \tag{4.14}$$

и приближение тем точнее, чем больше n.

Пример. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. Обозначим через μ_n, где $n = 100000$ –число неправильно сброшюрованных учебников в изданном тираже.

Теперь воспользуемся приближением Пуассна (4.14), полагая в нем $\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$ и $m = 5$:

$$P(\mu_n = 5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = \frac{10^5 \cdot 0{,}000045}{120} = 0{,}0375 .$$

§ 4.4. Нормальный закон

Определение. Непрерывная случайная величина ξ называется распределенной по нормальному или гауссовому закону, если ее плотность вероятности определяется равенством

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.15}$$

где a и σ –параметры закона.

Каждой паре этих значений отвечает своя плотность вероятности (свой гауссов закон). Случайные величины ξ, подчиняющиеся нормальному закону, называют номальными или гаусовыми, а графики плотностей нормального распределенеия (4.15) называют нормальными или гауссовыми кривыми.

Нормальный закон реализуется во всех случаях, когда случайная величина ξ является результатом воздействия большого числа факторов, каждый из которых не имеет решающего воздействия на ее значение.

Примерами нормальных случайных величин являются погрешности измерений физических величин или отклонения в размерах деталей от планируемых при их изготовлении на станках с программным управлением.

Рассмотрим функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \qquad (4.16)$$

которая является неберущимся в конечном виде интегралом, но она протабулирована и в табличной форме широко представлена в справочной литературе.

Функция Лапласа удовлетворяет свойствам:

1) она нечетная

$$\Phi(-x) = \Phi(x);$$

2) возрастающая и ее значения лежат в пределах

$$-\frac{1}{2} < \Phi(x) < \frac{1}{2},$$

причем

$$\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2},$$

а график имеет вид

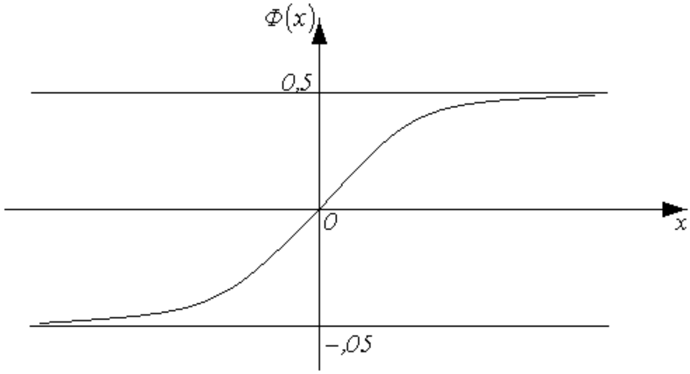

Рис. 4.3. График функции Лапласа

Выразим через функцию Лапласа полную характеристику нормальной случайной величины ξ –ее функцию распределения, которая, согласно (3.27) и (4.15), определяется равенством

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} d\sigma,$$

которая, как и функция Лапласа, не выражается в конечном виде, но с помощью подстановки $\frac{u-a}{\sigma} = v$; $du = \sigma dv$; $u = -\infty$, $v = -\infty$; $u = x$, $v = \frac{x-a}{\sigma}$ и свойств функции Лапласа, получим

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = -\Phi(-\infty) + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{2}\right).$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{2}\right). \tag{4.17}$$

Покажем, что плотность вероятности (4.15) удовлетворяет условию нормировки (3.30), т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 1 .$$

Действительно. Сделаем в интеграле

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

замену переменной $\frac{x-a}{\sigma} = v$; $dx = \sigma dv$; $x = -\infty$, $v = -\infty$; $x = +\infty$, $v = +\infty$, разобьем его на два интеграла и выразим каждый интеграл через функцию Лапласа

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{v^2}{2}}dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv =$$

$$= -\Phi(-\infty) + \Phi(+\infty) = 2\Phi(+\infty) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 ,$$

что и требовалось доказать.

Определим теперь частную характеристику нормальной случайной величины ξ –ее математическое ожидание.

Теорема. Математическое ожидание нормальной случайной величины ξ равно параметру закону a

$$M\xi = a . \tag{4.18}$$

Доказательство. По определению математического ожидания непрерывной случайной величины (3.32) имеем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Введем новую переменную $\frac{x-a}{\sigma} = v$, $dx = \sigma dv$, $x = \sigma v + a$.

Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, и, используя функцию Лапласа получим

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma v + a) e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} d\left(-\frac{v^2}{2}\right) + a\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right) =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + a[-\Phi(-\infty) + \Phi(+\infty)] = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\infty} - e^{-\infty}\right) + a \cdot 2\Phi(+\infty) =$$

$$= 0 + a \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = a ,$$

что и требовалось доказать.

Дисперсия нормальной случайной величины определяется утверждением следующей теоремы.

Теорема. Дисперсия нормальной случайной величины ξ равна квадрату параметр закона σ

$$D\xi = \sigma^2 . \qquad (4.19)$$

Доказательство. По пореденению дисперсии непрерывной случайной величины (3.33), учитывая, что $M\xi = a$, имеем

$$D\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Сделаем замену переменной $\frac{x-a}{\sigma}=t$; $x-a=\sigma t$, $dx=\sigma dt$; $x=-\infty$, $t=-\infty$; $x=+\infty$, $t=+\infty$ и получим

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt .$$

Интегрируя по частям, положив $u=t$,

$$dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt \Rightarrow v=\int te^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = -e^{-\frac{t^2}{2}},\ du=dt,$$

и на основе функции Лапласа, найдем

$$D\xi = \sigma^2\left(-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) =$$

$$= \sigma^2\left(0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) =$$

$$= \sigma^2\left(-\Phi(-\infty)+\Phi(+\infty)\right) = \sigma^2 2\Phi(+\infty) = \sigma^2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \sigma^2 ,$$

что и требовалось доказать.

Будем определять вероятности принятия нормальной случайной величины различных событий:

1. Найдем вероятность того, что гауссова случайная величина ξ примет значение, принадлежащее интервалу (x_1, x_2) на числовой оси Ox (рис. 4.4).

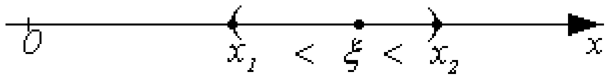

Рис. 4.4. Событие (x_1, x_2) на числовой оси Ox

Согласно формулам (3.3), (4.17) , имеем

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Таким образом вероятность попадания нормальной случайной величины ξ в интервал (x_1, x_2) равна разности значений функции Лапласа:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \qquad (4.20)$$

2. Пусть нормальная случайная величина ξ принимает значение в симметричном интервале относительно математического ожидания $M\xi = a$ (рис. 4.5):

$$a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a - \xi| < \varepsilon .$$

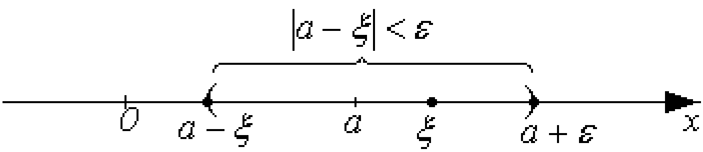

Рис. 4.5. Событие $|a - \xi| < \varepsilon$

Полагая в формуле (4.20) $x_2 = a + \varepsilon$ и $x_1 = a - \varepsilon$, найдем вероятность события $|a - \xi| < \varepsilon$:

$$P(|a-\xi| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \varepsilon < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Итак искомая вероятность равна

$$P(|a-\xi| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \tag{4.21}$$

где ε –радиус симметричного интервала.

Полагая в формуле (4.21) радиус симметричного интервала ε различным значениям, вычислим вероятности событий, которые приведем в табл. 4.3

Таблица 4.3

Вероятности событий симметричных относительно математического ожидания

$\varepsilon = \sigma$	$P(\|a-\xi\| < \sigma = 2\Phi(1)) = 0{,}6827$
$\varepsilon = 2\sigma$	$P(\|a-\xi\| < 2\sigma = 2\Phi(2)) = 0{,}9545$
$\varepsilon = 3\sigma$	$P(\|a-\xi\| < 3\sigma = 2\Phi(3)) = 0{,}9973$

Из анализа табл. 4.3, следует, что почти вся вероятность сосредоточена на интервале с центром в точке a и радиусом 3σ, который представляет собой практически достоверное событие.

Факт сосредоточения почти всей вероятности в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ называется правилом трех сигм.

Исследуем плотность вероятности нормального закона (4.15)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

методами дифференциального исчисления и построим ее график– нормальную или гауссову кривую.

1. Очевидно, функция определена на всей оси Ox, четная, неотрицательная, т.е. нормальная кривая расположена над осью Ox симметрично относительно прямой $x = a$.

2. Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

т.е. ось Ox является горизонтальной асимптотой графика.

3. Найдем производную функции, для определения критических точек и интервалов роста к убыванию:

$$f'_\xi = -\frac{x-a}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Легко видеть, что $f'_\xi(x) = 0$ при $x = a$, $f'_\xi(x) > 0$ при $x < a$, $f'_\xi(x) < 0$ при $x > a$.

Следовательно, функция $f_\xi(x)$ на интервале $(-\infty, a)$ убывает, ана интервале $(a, +\infty)$ возрастает, принимая в точке $x = a$ максимум равный $f_\xi(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

4. Найдем вторую производную для опеределения точек перегиба и интервалов выпуклостей вверх и вниз функции:

$$f''_\xi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

Легко видеть, что $f''_\xi(x)=0$ при $x=a+\sigma$ и $x=a-\sigma$, $f''_\xi(x)>0$ при $x<a-\sigma$ и $x>a+\sigma$, $f''_\xi(x)<0$ при $a-\sigma<x<a+\sigma$.

Следовательно, функция $f_\xi(x)$ на интервалах $(-\infty, a-\sigma)$ и $(a+\sigma, +\infty)$ обращена выпуклостью вниз, а на интервале $(a-\sigma, a+\sigma)$ обращена выпуклостью вверх. Точки $x=a+\sigma$ и $x=a-\sigma$ являются точками перегиба функции $f_\xi(x)$, в которых она принимает значение

$$f_\xi(a-\sigma) = f_\xi(a+\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} .$$

5. Составим таблицу значений функции $f_\xi(x)$ в точке максимума, точках перегиба и пересечения с осью ординат

Таблица 4.4

Таблица значений плотности вероятностей нормального закона

x	0	$a-\sigma$	a	$a+\sigma$
$f_\xi(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\sigma}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\sigma}$

На основе анализа и обобщения полученной информации и данных табл. 4.4 построим график нормальной кривой (рис. 4.6)

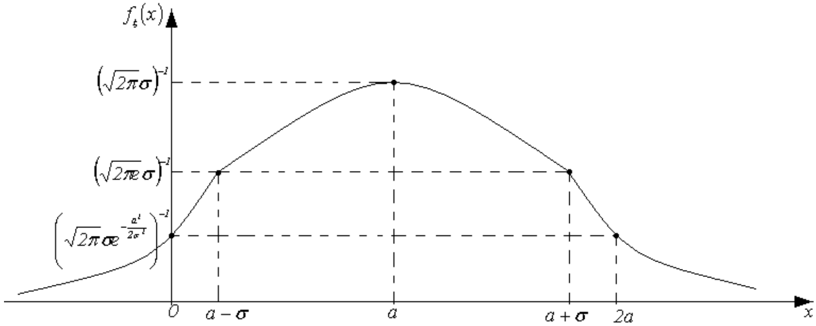

Рис. 4.6. График плотности вероятностей нормального закона

<u>Пример 1.</u> Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a=5, \sigma=1$. Найти вероятность того, что величина ξ примет значения, принадлежащие промежутку $[4;7]$.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (4.20), в которой положим $x_1=4,\ x_2=7,\ a=5,\ \sigma=1$:

$$P(4<\xi<7)=\Phi\left(\frac{7-5}{1}\right)-\Phi\left(\frac{4-5}{1}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=$$
$$=0{,}4772+0{,}3413=0{,}8185$$

<u>Пример 2.</u> Производится взвешиваное некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=20$. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине число 10.

Решение. Так как по условию систематические ошибки отсутсвуют, то $M\xi=a=0;\ \sigma=20;\ \varepsilon=10$.

Для искомой вероятности попадания в симметричный интервал используем формулу (4.21)

$$P(|\xi| \le 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{20}\right) = 2 \cdot \Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383\,.$$

§ 4.5. Теоремы Муавра–Лапласа

Наряду с законом Пуассона, нормальный закон также является предельным для биномиального, но при несколько других условиях. Итак, в схеме повторных независимых испытаний Бернули, когда вероятность появления некоторого события A в одном испытании равна $P(A) = p$, справедливы следующие локальные и интегральные теоремы Муавра–Лапласа.

Теоремы Муавра–Лапласа (локальная и интегральная).

Пусть последовательность распределенных по биномиальному закону случайных величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ удовлетворяет условиям

$$P(A) = p = const \text{ и } n \to \infty\,.$$

Тогда эта последовательность по вероятности стремится к случайной величине ξ, распределенной по нормальному закону и справедливы утверждения:

1) локальное для вероятнотси появления события A ровно m раз

$$\lim_{n\to\infty} P(\mu_n = m) = P(\xi = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m-a)^2}{2\sigma^2}}\,;$$

2) интегральное для вероятности появления события A не менее m_1 и не более m_2 раз

$$\lim_{n\to\infty} P(m_1 \le \mu_n \le m_2) = P(m_1 \le \xi \le m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ –функция Лапласа (4.16).

Следствие 1. Пусть $P(A) = p = const$ и $n >> 1$ велико. Тогда справедливо локальное приближение Муавра–Лапласа:

$$a = M\xi = n \cdot p,\ \sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq}$$

и

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (4.22)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, значения которой протабулированны и широко представлены в справочной литературе.

Следствие 2. При $n >> 1$ большом и $P(A) = p = const$ справедливо интегральное приближение Муавра–Лапласа:

$$a = M\xi = np,\ \sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq},$$

$$P(m_1 \le \mu_n \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (4.23)$$

Замечание. Из теорем Пуассона и Муввра–Лапласа следует, что биномиальный закон занимает центральное место среди основополагающих классических законов: биномиального, Пуассона и нормального.

Пример. С целью определения уровня подготовки первокурсников на факультете ежегодно проводятся контрольные работы. Вероятность написать такую работу на «отлично» составляет 0,3. Какова вероятность того, что из 120 студентов получат за эту работу оценку «отлично»: а) ровно 50 студентов; б) не менее 25 и не более 45 студентов?

Решение. Пусть событие A –студент написал контрольную работу на «отлично», а случайная величина μ_n –число студентов, написавших на «отлично» контрольную работу. Тогда по условию задачи $P(A) = p = 0,3$; $q = 1 - p = 0,7;$ $n = 120;$ $m = 50;$ $m_1 = 25;$ $m_2 = 45$.

Вычислим параметры приближений Муавра–Лапласа:

$$a = M\xi = np = 120 \cdot 0,3 = 36;$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{25,2} \approx 5,02.$$

В решении вопроса а) используем локальное приближение Муавра–Лапласа (4.22):

$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 36}{5,02} = 2,79; \ \varphi(2,79) = 0,0081;$$

$$P(\mu_{120} = 50) = \frac{1}{5,02} \cdot 0,0081 = 0,0016,$$

а при решении вопроса б) применим интегральное приближение Муавра–Лапласа (4.23):

$$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 36}{5,02} \approx -2,19; \ \Phi(-2,19) = -0,4858;$$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{45 - 36}{5,02} \approx 1,79; \ \Phi(1,79) = 0,4633;$$

$$P(25 \le \mu_{120} \le 45) = \Phi(1,79) - \Phi(-2,19) = 0,4633 + 0,4858 = 0,9491.$$

Таким образом, вероятность того, что из 120 студентов 50 получат за контрольную работу «отлично» равна $P(\mu_{120} = 50) = 0,0016$, а вероятнотсь того, что «отлично» получат не менее 25 и не более 45 равна $P(25 \le \mu_{120} \le 45) = 0,9491$.

§ 4.6. Равномерное распределение на отрезке

Определение. Непрерывная случайная величина ξ называется равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности на этом отрезке сохраняет постоянное значение:

$$f(x)=\begin{cases} C, \text{ если } a \le x \le b, \\ 0, \text{ если } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Из условия нормировки (30) определим значение C :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b Cdx = Cx\Big|_a^b = C(b-a) = 1,$$

откуда получим $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Значит, плотность вероятнотси равномерного распределения определяется формулой:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a \le x \le b, \\ 0, \text{ если } x < a,\ x > b, \end{cases} \qquad (4.24)$$

а график ее приведен на рис. 4.7.

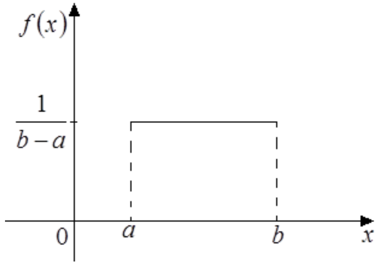

Рис. 4.7. график плотности вероятности равномерного распределения на отрезке

Плотность вероятности (4.24) является полной характеристикой случайной величины ξ, с ее помощью по формулам (3.29), (4.24) можно определить вероятнотис любых событий.

Найдем по формулами (3.27)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

и (4.24) функцию распределения этой случайной величины ξ, которая также является ее полной характеристикой:

1) если $x < a$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0\,;$$

2) если $a \le x \le b$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}\,;$$

3) если $b < x$,

$$\text{то } F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int_{b}^{x} 0dt = \frac{t}{b-a}\Big|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1\,.$$

Таким образом, функция распределения определяется выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a \le x \le b, \\ 1, \text{ если } b < x, \end{cases} \tag{4.25}$$

а ее график представлени на рис. 4.8.

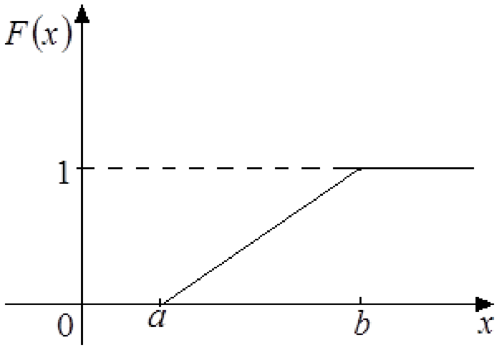

Рис. 4.8. График функции распределения равномерно распределенной случайной величины

Найдем теперь математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины, котрая согласно определениям (3.32), (4.24) будет равна:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x dx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_{a}^{b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

которое характеризует положение центра данного закона, или окончательно:

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \tag{4.26}$$

математическое ожидание равно полусумме значений концов интервала возможных значений случайной величины.

Меру рассеяния относительно математического ожидания (4.26) характеризует дисперсия, которую вычислим на основе выражений (3.15), (4.24), (4.26)

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M\xi)^2 = \int_{a}^{b} \frac{x^2 dx}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (4.27)$$

или среднее квадратическое отклонение (стандарт)

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (4.28)$$

Вероятность попадания равномерно распределнной на отрезке $[a,b]$ случайной величины ξ в интервал $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, содержащийся внутри отрезка, определим по формулам (3.3) и (4.24):

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \quad (4.29)$$

<u>Пример.</u> Троллейбусы отходят от остановки регулярно с интервалом 10 мин. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Найти аероятноть того, что ему придется ждать не более 2 мин., а также математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Случайная величина ξ –время ожидания троллейбуса, равномерно распределна на временном отрезке $[0;10]$. Ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{если } 0 \le \xi \le 10, \\ 0, & \text{если } \xi \,\overline{\in}\, [0;10]. \end{cases}$$

По формуле (4.29) определим вероятность того, что пассажиру придется ждать троллейбус не более 2 мин.: $P(0 < \xi < 2) = \frac{2-0}{10} = 0{,}2$,

а по формулам (4.26), (4.27), (4.28), соотвественно:

математическое ожидание $M\xi = \frac{10}{2} = 5$;

дисперсию $D\xi = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3}$;

стандарт $\sigma = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

§ 4.7. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина распределена по показательному (экспоненциальному) закону, если ее плотность вероятности задается выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } 0 \le x, \end{cases} \tag{4.30}$$

где параметр λ –положительное число.

Параметром непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока (см. §4.8).

Убедимся, что плотность вероятнотсти (4.30) удовлетворяет условию нормировки (3.30):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\lim_{N \to +\infty} e^{-\lambda x}\Big|_0^N =$$

$$= -\lim_{N \to +\infty} e^{-\lambda N} + \lim_{N \to \infty} e^0 = 1 - 0 = 1.$$

Найдем по формулам (3.27) и (4.30) функцию распределения показательного закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dt = -\int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x =$$

$$= -e^{-\lambda x} + e^{0} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ если } 0 \le x. \end{cases} \tag{4.31}$$

Графики плотности и функии распределения показательного закона изображены на рис. 4.9.

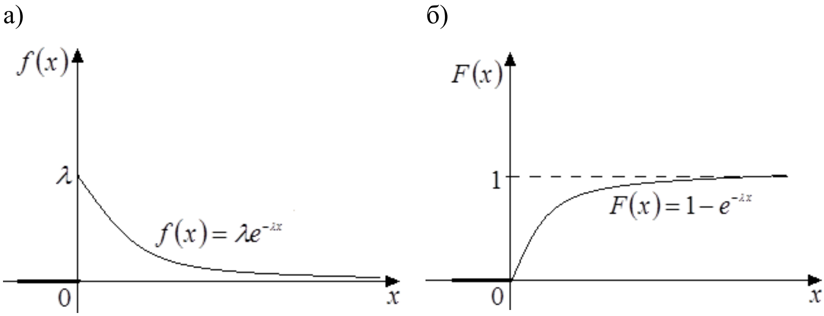

Рис. 4.9. Графики функций: а) плотности вероятности, б) функции распределения показательного закона

Найдем вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины ξ, распределенной по показательному закону. Согласно формулам (3.3) и (4.31) получим:

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \tag{4.32}$$

Функция распределения (4.31) является полной характеристикой случайной величины ξ (4.30) потому, что на основе формулы (4.32) можно определять вероятности любых событий.

Однако, наряду с полными характеристиками (4.30), (4.31), в теории и практике важны и частные числовые характеристики случайной величины ξ.

Это математическое ожидание, которое характеризует центр закона распределения и дисперсия, характеризующая рассеяние значений случайной величины относительно центра.

Установим математическое ожидание распределенной по показательному закону случайной величины ξ.

На основе формул (3.32) и (4.30) имеем:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx .$$

Интегрируя по частям, получим:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} . \tag{4.33}$$

По формулам (3.34), (4.30), (4.33) найдем дисперсию:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2 = \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} .$$

Интегрируя по частям, получим $\lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$.

Значит

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2} , \tag{4.34}$$

а среднее квадратическое отклонение (стандарт)

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda} . \tag{4.35}$$

Таким образом, математическое ожидание показательного распределения (4.33) и стандарт (4.35) равны между собой и равны обратной величине параметра λ.

<u>Пример.</u> Непрерывная случайная ξ распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ 3e^{-3x}, \text{ при } 0\le x.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины ξ; б) вероятность ее попадания в интервал $(0{,}13;0{,}7)$; в) математическое ожидание; г)дисперсию и стандарт этой величины.

Решение. учитывая, что согласно условию, $a=0{,}13$, $b=0{,}7$, $\lambda=3$, по формулам (4.31)–(4.35) соотвественно получим:

а) функцию распределения $F(x)=1-e^{-3x}$;

б) вероятность попадания в интегрвал $(0{,}13;0{,}7)$

$$P(0{,}13<\xi<0{,}7)=e^{-3\cdot 0{,}13}-e^{-3\cdot 0{,}7}=0{,}677-0{,}122=0{,}555;$$

в) математическое ожидание $M\xi=\dfrac{1}{3}$;

г) дисперсию и стандарт $D\xi=\dfrac{1}{9}$, $\sigma=\dfrac{1}{3}$.

§ 4.8. Функция и показательный закон надежности

Определение 1. Элементом называют некоторое устройство, независимо от того «простое» оно или «сложное».

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а в момент t следует отказ.

Обозначим через T непрерывную случайную величину– длительность времени безотказной работы элемента.

Тогда функцией распределения случайной величины T будет вероятность отказа за время длительностью t:

$$F(t) = P(T < t).$$

Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t равна вероятности противоположного события:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{4.36}$$

Определение 2. Функцией надежности называют функцию $R(t)$ (4.36), определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t.

Зачастую длительность времени безотказной работы подчиняется показательному распределению (4.30), функция распределения которого (4.31) при $\xi = T$ и $x = t$ имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{4.37}$$

Следовательно, в силу соотношения (4.36) и в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента (4.37), получим функцию надежности:

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

Определение 3. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \tag{4.38}$$

где параметр интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

<u>Пример.</u> Время T работы электроприбора имеет показательное распределение, причем его среднее время работы равно 40000 часов. Определить вероятность того, что за время $t = 60000$ часов: а) электроприбор откажет; б) электроприбор не откажет.

Решение. поскольку математическое ожидание равно среднему значению случайной величины T (среднему времени работы прибора), то по формуле (4.33) имеем: $MT = \frac{1}{\lambda} = 40000$. Откуда $\lambda = \frac{1}{40000}$.

а) так как функция распределения (4.37) определяет вероятность отказа элемента (электроприбора) за время длительностью t, то, подставив $t = 60000$ в функцию распределения (4.37), получим вероятность отказа: $F(60000) = 1 - e^{-\frac{60000}{40000}} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 1 - 0{,}2231 = 0{,}7769$.

б) вероятность того, что электроприбор не откажет можно получить, пользуясь функцией надежности (4.38), которая выражается через функцию распределения (4.36):

$$R(60000) = 1 - F(60000) = 1 - 0{,}7769 = 0{,}2231$$

либо непосредственно по формуле (4.38) $R(60000) = e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}2231$.

§ 4.9. Геометрическое распределение

Пусть в схеме повторных независимых испытаний Бернули (см. §4.1) выполняется дополнительное условие, заключающееся в том, что испытания проводятся до первого появления события A. Например, из орудия производится стрельба до первого попадания.

Напомним, что в каждом испытании любое событие A либо появляется с вероятностью $P(A)=p$, либо не появляется с вероятностью $P(\overline{A})=q=1-p$, где событие $\overline{A}$ –противоположное событию A (см. §1.4).

Обозначим через A_k –событие заключающееся в том, что событие A первый раз появилось в k-ом испытании. Полагая возможные значения $k=1,2,3,\ldots$, получим последовательность событий A_k:

$$A_1=A;\ A_2=\overline{A}\cap A;\ A_3=\overline{A}\cap\overline{A}\cap A;\ldots;A_k=\underbrace{\overline{A}\cap\overline{A}\cap\ldots\cap\overline{A}}_{k-1}\cap A;\ldots.$$

Найдем вероятности событий A_k. Из независимости испытаний в силу третьей аксиомы определения вероятности событий (1.3) получим:

$$P(A_k)=\underbrace{P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A})}_{k-1}\cdot P(A)=q^{k-1}\cdot p.$$

Обозначим через ξ дискретную случайную величину–число испытаний до первого появления события A.

Тогда вероятность события $\xi=k$ будет равна

$$P(\xi=k)=P(A_k)=q^{k-1}p \tag{4.39}$$

и получим заданный аналитически геометрический закон распределения вероятностей случайной величины ξ.

Полагая в формуле (4.39) $k = 1,2,3,\ldots$, получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $0 < q < 1$

$$p,\ pq,\ pq^2, \ldots, pq^{k-1}.$$

По этой причине распределение (4.39) называется геометрическим.

Покажем, что закон (4.39) удовлетворяет условию нормировки (3.19)

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Действительно, положим распределение (4.39) в условие (3.19):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{k-1} + \ldots.$$

Имеем геометрический ряд, членами которого являются члены геометричсекой прогрессии, который при $|q| < 1$ сходится к сумме

$$S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Центр геометрического закона (4.39) и рассеяния относительно него определяются следующей теоремой.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ, распределенной по геометричсекому закону определяется соотвественно равенствами:

$$M\xi = \frac{1}{p}, \tag{4.40}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}. \tag{4.41}$$

Доказательство. По определению математического ожидания (3.23) и с учетом закона (4.39) имеем:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' =$$

$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

В проведенных преобразованиях были использованы возможность почленного дифференцирования и формула суммы геометрического ряда в его области сходимости $|q| < 1$.

Аналогично, на основе выражений (3.25), (4.40), получим формулу для дисперсии

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

где $M\xi$ определено равенством (4.40).

Вначале найдем

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k} q^k\right)' =$$

$$= p\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)q^k\right)' - \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'\right] = p\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}\right)'' - \left(\frac{q}{1-q}\right)'\right] =$$

$$= p\left[\frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2}\right] = p\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Окончательно

$$D\xi = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

<u>Пример.</u> Из орудия производится стрельба до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти математическое

ожидание и дисперсию числа выстрелов, а также вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. Обозначим через случайную величину ξ –число выстрелов до первого попадания.

По условию задачи имеем $p = 0{,}6$, а $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Поэтому

$$M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67\,;\ D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}4}{0{,}36} \approx 1{,}11\,;$$

а вероятность события $P(\xi = 3)$ будет равна

$$P(\xi = 3) = q^{k-1} \cdot p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096\,.$$

Глава 5. Предельные теоремы последовательностей случайных величин

В предельных теоремах законами больших чисел называют утверждения, в которых рассматриваются последовательности случайных величин, стремящихся к постоянным величинам. К ним относятся простейшая и исторически первая теорема Бернули и ее обобщение–теорема Чебышева. Имеются и другие теоремы, которые здесь не приводятся. Для доказательства подобных теорем используют неравенство Чебышева.

§ 5.1. Неравенство Чебышева

Теорема. Для любой случайной величины ξ с ограниченной дисперсией $D\xi < \infty$ и сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ вероятность того, что ее отклонение от математического ожидания по абсолютной величине больше ε, меньше, чем $\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ (см. рис. 5.1):

$$P\left(\left|x - M\xi\right| > \varepsilon\right) < \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Выразим вероятность события $\left|x - M\xi\right| > \varepsilon$ через плотность вероятности (3.29):

$$P\left(\left|x - M\xi\right| > \varepsilon\right) = \int\limits_{\left|x - M\xi\right| > \varepsilon} f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} f_\xi(x)dx + \int\limits_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty} f_\xi(x)dx. \tag{5.2}$$

Рассмотрим равенство $|x - M\xi| > \varepsilon$. Так как его обе части борльше нуля, то знак неравенства не изменится, если эти части возведем в квадрат, разделим на ε^2 и, получим $\frac{(x - M\xi)^2}{\varepsilon^2} > 1$.

Кроме того, из протиивоположности событий $|x - M\xi| > \varepsilon$ и $|x - M\xi| \le \varepsilon$ (см. рис. 5.1) следует равенство их суммы всему выборочному пространству $R = (-\infty; +\infty)$ (числовая ось Ox)

$$(|x - M\xi| > \varepsilon) \cup (|x - M\xi| \le \varepsilon) = R\,. \tag{5.3}$$

Учитывая приведенные соотношения, оценим вероятность события $|x - M\xi| > \varepsilon$, выраженную равенством (5.2):

$$P(|x - M\xi| > \varepsilon) < \int\limits_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} \frac{(x - M\xi)^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x)dx + \int\limits_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty} \frac{(x - M\xi)^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} \frac{(x - M\xi)^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{-\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx = \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

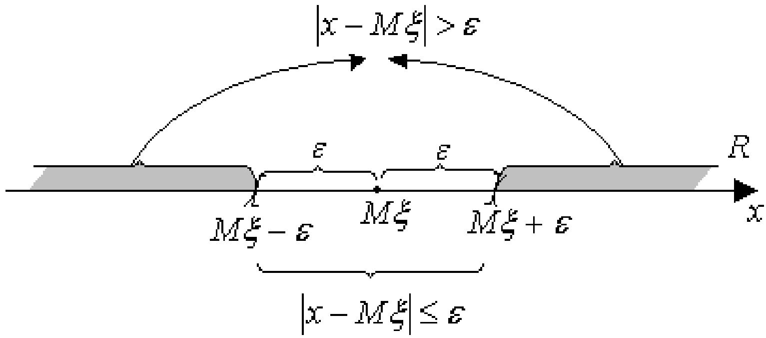

Рис. 5.1. Противоположные события $|x - M\xi| > \varepsilon$ и $|x - M\xi| \le \varepsilon$

Неравенство Чебышева можно выразить и в другой эквивалентной форме.

Следствие. Вероятность того, что в условиях неравенства Чебышева отклонение случайной величины ξ от математического ожидания по абсолютной величине не больше ε, больше, чем $1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$:

$$P(|x-M\xi| \le \varepsilon) > 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Найдем вероятности от левой и правой частей равенства (5.3). Поскольку в левой части события несовместные, то вероятность от суммы событий равна сумме их вероятностей

$$P(|x-M\xi| \le \varepsilon) + P(|x-M\xi| > \varepsilon) = P(R) = 1 .$$

Откуда с учетом неравенства Чебышева (5.1), получим:

$$P(|x-M\xi| \le \varepsilon) = 1 - P(|x-M\xi| > \varepsilon) > 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Замечание. Из следствия (5.4) вытекает, что меньшей дисперсии отвечает большее сосредоточение вероятности в окрестности математического ожидания.

<u>Пример 1.</u> В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) не больше трех; б) больше трех.

Решение. Обозначим через случайную величину μ_n –число включенных ламп за время T. Тогда эта случайная величина распределена по биномиальному закону, по условию задачи $n = 20$,

$p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $\varepsilon = 3$ и ее характеристики определим соответственно по формулам (4.5) и (4.6):

$$M_{\mu_{20}} = np = 20 \cdot 0{,}8 = 16,$$

$$D_{\mu_{20}} = npq = 20 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3{,}2.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева, для решения вопросов а) и б) соответственно в формах (5.1) и (5.4):

$$\text{а) } P\left(\left|\mu_{20} - 16\right| \le 3\right) > 1 - \frac{3{,}2}{9} = 0{,}64;$$

$$\text{б) } P\left(\left|\mu_{20} - 16\right| > 3\right) < \frac{3{,}2}{9} = 0{,}36.$$

<u>Пример 2.</u> Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения

$\xi = x_k$	0,1	0,4	0,6
p_k	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|x_k - M\xi\right| \le \sqrt{0{,}4}$.

Решение. Вычислим математическое ожидание и дисперсию величины соответственно по формулам (3.23) и (3.25):

$$M\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k \cdot p_k = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}44;$$

$$D\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \cdot p_k - (M\xi)^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}3 + 0{,}36 \cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме (5.4)

$$P\left(\left|x_k - M\xi\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя в неравенство $M\xi = 0{,}44$, $D\xi = 0{,}0364$, $\varepsilon = \sqrt{0{,}4}$, окончательно получим:

$$P\left(\left|x_k - 0{,}44\right| \le \sqrt{0{,}4}\right) > 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 1 - 0{,}091 = 0{,}909 .$$

§ 5.2. Теорема Бернули

Рассмотрим схему повторных независимых испытаний Брнулли (см. §1.5), в которой вероятность появления события A равна $P(A) = p$, а вероятность его появления $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Тогда справедлив исторически первый закон больших чисел.

Теорема Бернулли. Пусть случайная величина μ_n –число появлений события A в серии n независимых испытаний. Тогда последовательность частоты $\dfrac{\mu_n}{n}$ появления события A стремится при $n \to \infty$ по вероятности к вероятности события A в одном испытании

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0 . \qquad (5.5)$$

Доказательство. Математическое ожидание и дисперсия распределенной по биномиальному закону случайной величины μ_n определяются соотвественно теоремами (4.5) и (4.6): $M_{\mu_n} = np$ и $D_{\mu_n} = npq$.

На основе данных теорем и свойств математического ожидания (3.6) и дисперсии (3.7) найдем соотвественно математическое ожидание и дисперсию частоты $\dfrac{\mu_n}{n}$ появления события A:

$$M\,\frac{\mu_n}{n} = \frac{1}{n} M_{\mu_n} = \frac{np}{n} = p\,,$$

$$D_{\frac{\mu_n}{n}} = \frac{1}{n^2} D_{\mu_n} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}\,.$$

Теперь, с помощью неравенства Чебышева (5.1) оценим вероятность события:

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - M\,\frac{\mu_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \frac{D\,\frac{\mu_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}\,.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в левой и правой частях последнего неравенства:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{\varepsilon^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема Бернулли обосновывает статистическое толкование вероятности события A как предела частоты появления этого события в серии из n независимых испытаний.

§ 5.3. Теорема Чебышева

Данная теорема носит значительно более общий характер, чем теорема Бернулли.

Теорема Чебышева. Пусть члены последовательности случайных величин $\{\xi_k; k \ge 1\}$ удовлетворяют условиям:

1) величины ξ_k взаимно независимые;

2) имеют конечные математические ожидания:

$$M\xi_k < \infty, k = 1,2,...;$$

3) их дисперсии равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C) при всех k:

$$D\xi_k < C, k = 1,2,....$$

Тогда последовательность средних арифметических этих случайных величин $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ будет стремиться при $n \to \infty$ по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| > \varepsilon\right) = 0 . \tag{5.6}$$

Доказательство. По свойствам 2, 4 математических ожиданий случайных величин (см. §3.6). Найдем математическое ожидание случайной величины S_n:

$$MS_n = M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k .$$

На основе свойств 3, 4 дисперсии случайных величин (см. 3.7) и первым двум условиям теоремы, оценим дисперсию случайной величины S_n:

$$DS_n = D\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n^2} D\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k < \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n} .$$

С помощью неравенства Чебышева оценим вероятность события:

$$P\left(\left|S_n-\frac{1}{n}\sum M\xi_k\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|S_n-MS_n\right|>\varepsilon\right)<\frac{DS_n}{\varepsilon^2}<\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|S_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|>\varepsilon\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{C}{n\varepsilon^2}=\frac{C}{\varepsilon^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

что и требовалось доказать.

Сущность теоремы Чебышева заключается в следующем: независимые случайные величины могут быть по разному распределены и их отклонения от собственных математических как положительные, так и отрицательные, а в среднем арифметическом эти отклонения взаимно погашаются и рассеяние уменьшается.

Поэтому, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины, вследствие стремления дисперсии к нулю.

Следствие. Теорема Бернулли является частным случаем теоремы Чебышева, если частоту $\frac{\mu_n}{n}$ появления события A представить в виде средних арифметических независимых величин ξ_k $\frac{\mu_n}{n}=S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,

где

$$\xi_k=\begin{cases}1, \text{ если событие } A \text{ произошло в } k-\text{ом испытании,}\\ 0, \text{ если событие } A \text{ не произошло в } k-\text{ом испытании.}\end{cases}$$

Действительно:

$$M\xi_k=1\cdot p+0\cdot q=p;$$

$$M\xi_k^2=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p;$$

$$D\xi_k = M\xi_k^2 - \left(M\xi_k\right)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq\,;$$

$$M\frac{\mu_n}{n} = MS_n = M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = \frac{np}{n} = p\,;$$

$$D\frac{\mu_n}{n} = DS_n = D\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}\,.$$

На основе проведенных вычислений из неравенства Чебышева (5.1) следует при $a = p$ совпадение утверждений теорем Чебышева (5.6) и Бернулли (5.5):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - p\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{pq}{n\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{pq}{\varepsilon^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,.$$

Пример. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_n	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Поскольку случайные величины независимые, то первое условие теоремы Чебышева выполняется.

По формуле (3.23) найдем математическое ожидание случайных величин ξ_n

$$M\xi_n = -n\alpha\cdot\frac{1}{2^n} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + n\alpha\frac{1}{2^n} = 0\,,$$

т.е. второе условие конечности математических ожиданий выполняется.

Остается проверить выполнение третьего условия равномерной ограниченности дисперсий. По формуле (3.15) $D\xi_n = M\xi_n^2 - \left(M\xi_n\right)^2$, учитывая, что $M\xi_n = 0$, найдем

$$D\xi_n = \frac{n^2\alpha^2}{2^n} + \frac{n^2\alpha^2}{2^n} = \frac{n^2\alpha^2}{2^{n-1}}.$$

Считая $n = x$ непрерывной величиной исследуем на экстремум функцию $\varphi(x) = \dfrac{\alpha^2 x^2}{2^{x-1}}$.

Согласно необходимому условию экстремума, найдем стационарные точки. Для этого приравняем производную функции к нулю

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha^2 x 2^{x-1}\left(2 - x\ln 2\right)}{2^{2(x-1)}} = 0$$

и получим стационарные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{2}{\ln 2}$, но $x_1 = 0$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. n не принимает значения, равного нулю.

Т.к. $\varphi''\left(x_2\right) < 0$, то, согласно достаточному условию экстремума, функция $\varphi(x)$ принимает в точке $x_2 = \dfrac{2}{\ln 2} \approx 2{,}9$ максимум. Учитывая что n –целое положительное число, вычислим дисперсию $D\xi_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\alpha^2$ для ближайших к числу 2,9 (слева и справа) целых чисел, т.е. для $n = 2$ и $n = 3$.

При $n=2$ дисперсия $D\xi_2 = 2\alpha^2$, при $n=3$ дисперсия $D\xi_3 = \frac{9}{4}\alpha^2$.

Из неравенства $\frac{9}{4}\alpha^2 > 2\alpha^2$ следует, что наибольшая возможная дисперсия равна $\frac{9}{4}\alpha^2$ и дисперсии случайных величин ξ_n равномерно ограничены этим числом.

Итак, все условия теоремы Чебышева выполняются, следовательно, к рассматриваемой последовательности эта теорема применама.

§ 5.4. Применение теоремы Чебышева к решению практических задач

Рассмотрим следствие теоремы Чебышева в котором выражен ее частный случай, использованный при измерении физических величин, и заключающиеся в том, что конечные математичсекие ожидания случайных величин равны между собой.

Следствие. Пусть члены последовательности случайных величин $\{\xi_k; k \geq 1\}$ удовлетворяют условиям:

1) величины ξ_k, $k = 1,2,\ldots$ взаимно независимые;

2) имеют одно и то же математическое ожидание $M\xi_k = a, k = 1,2,\ldots;$

3) дисперсии величин равномерно ограничены постоянной величиной $D\xi_k < C, k = 1,2,\ldots.$

Тогда последовательность средних арифметических этих случайных величин $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ будет стремится при $n \to \infty$ по вероятности к математическому ожиданию a

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - a\right| > \varepsilon\right) = a\,. \tag{5.7}$$

Доказательство. Исходя из второго условия следствия, найдем математическое ожидание случайной величины S_n:

$$MS_n = M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = \frac{na}{n} = a\,.$$

Далее, полагая в доказательстве теоремы Чебышева $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = a$, получим утверждение следствия (5.7).

Покажем, что дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно-независимых случайных величин $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ в n раз меньше дисперсии $D\xi_k = \sigma^2$, $k = 1,2,..,n$ каждой из них:

$$\sigma_a^2 = DS_n = D\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}\,,$$

где $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k$ –среднее арифметическое значение.

Откуда получим формулу для определения стандарта среднего арифметического n случайных величин

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \tag{5.8}$$

равную отношению среднего квадратического значения величин к квадратному корню из n.

При измерении физических величин зачастую производят несколько измерений, и их среднее значение принимаю в качестве искомого размера. Однако, возникает вопрос. При каких условиях этот способ измерения правомерен? Ответ на этот вопрос дает следствие Чебышева, которое обосновывает процедуру определения среднего значения при многократном измерении физической величины a.

Действительно, результаты каждого измерения будем интерпритировать как случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. К этим величинам применим следствие теоремы Чебышева.

Первое условие выполняется, если результат каждого измерения не зависит от результатов остальных и, поэтому, не содержит систематических (одного знака) ошибок.

Второе условие выполняется автоматически вследствиие того, что измеряется одна и та же физическая величина a. В этом случае математическое ожидание всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру a.

Третье условие выполняется так же автоматически потому, что прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их ограничено.

Тогда, согласно следствию (5.7), при количестве измерений, определяемых по формуле (5.8) среднее арифметическое результатов измерений как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Таким образом, увеличивая число измерений по формуле (5.8), можно достичь сколь угодно большой точности, даже, превышающей точность измерительного прибора. Для этого достаточно обеспечить первое условие следствия–независимость измерений, исключающих систематические ошибки, а второе и третье условия выполняются автоматически.

Следствие теоремы Чебышева широко применяют, в частности, при геодезических и маркшейдерских измерениях.

§ 5.5. Центральная предельная теорема

В законах больших чисел (см. §5.2–§5.4) рассмотрены последовательности случайных величин, удовлетворяющие условиям, при которых они стремятся к постоянной величине. В этом случае дисперсия членов последовательности является бесконечно малой величиной и в пределе равна нулю.

В настоящем параграфе рассмотрим поледовательности независимых случайных величин с весьма произвольными законами распределения вероятностей и одним только требованием конечности их дисперсий. Из данных членов последовательности составим суммы случайных величин, нормированные таким образом, чтобы дисперсии этих сумм были равны единице. Ясно, что в таком случае сходимость к константе исключается. В доказанной Ляпуновым центральной предельной теореме утверждается, что предельным законом распределения нормироваaых сумм случайных величин является нормальный закон с математическим ожиданием $a=0$ и средне квадратическим отклонением $\sigma=1$.

Пусть $\{\xi_k; k \geq 1\}$–последовательность независимых чайных величин.

Обозначим через

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \,;\; \sigma_k^2 = D\xi_k \,;\; b_n^2 = DS_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \,;\; \hat{S}_n = \frac{S_n - MS_n}{b_n},$$

где $\hat{S}_n$ называют нормированной суммой n независимых слагаемых.

Теорема Ляпунова. Если случайные величины ξ_k, $k = 1,2,\ldots$ независимые и удовлетворяет условию Ляпунова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - M\xi_k\right|^{2+\delta},$$

где $\delta > 0$, то последовательность случайных нормированных величин $\hat{S}_n$ при $n \to \infty$ стремится по вероятности к нормированной нормальной величине

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\hat{S}_n < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{v^2}{2}} dv .$$

Приведенная теорема русского математика А.М. Ляпунова является существенным обощением теоремы Муавра-Лапласа (см. §4.5). Она объясняет почему сумма очень большого числа взаимно незаивсимых величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, имеет близкое к нормальному распределение. Это обстоятельство способствует широкому распространению нормального закона распределения случайных величин.

Теорема А.М. Ляпунова–наиболее важная теорема теории вероятностей и математической статистики и вообще она одна из самых замечательных математических теорем.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229

Окончание прил. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0138
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,004	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	075	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790

Продолжение прил. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	058	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4088
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292
1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,84	0,4977

Окончание прил. 2							
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,42	0,4922	2,90	0,4981
1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,48	0,4934	3,00	0,4987
1,65	0,4505	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,20	0,4993
1,70	0,4554	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,40	0,4997
1,75	0,4593	2,18	0,4854	2,66	0,4961	3,60	0,4998
1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,72	0,4967	3,80	0,4992
1,85	0,4678	2,30	0,4893	2,78	0,4973	4,00	0,4999

Библиографический список

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие .–12-е изд., перераб.–М.:Высшее образование, Юрайт-Издат, 2009.–479с.
2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров.–4-е изд., стер.–М.: Высшая школа, 2007.–491с.
3. Тутубалин, В.Н. Теория вероятнотсей: учеб. пособие.–М.: Академия, 2008.–368с.
4. Гусак, А.А. Теория вероятностей: справ. пособие к решению задач/ А.А. Гусак, Е.А. Бричикова.–6-е изд.–Минск: ТетраСистемс, 2007.–286с.
5. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Теория вероятностей: лекции и практикум: учеб.пособие/ ред. И.М. Петрушко.–2-е изд., стер.–М.; СПб; Краснодар: Лань, 2008.–346с.
6. Орлов, А.И. Вероятность и прикладная статистика: основные факты: справочник.–М.: КНОРУС, 2010.–190с.

Учебное издание

Редькин Геннадий Михайлович
Горлов Александр Семенович
Толмачева Елена Игоревна

Теория вероятностей

Учебное пособие

Подписано в печать .17 Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,8
Тираж 100 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46