Федеральное агентство по образованию
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Кафедра прикладной математики

Утверждено
научно-методическим советом
университета

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов всех специальностей

Белгород
2010

УДК 512.7 (07)
ББК 22.147 я7
Л59

Составитель
канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Ю. Некрасов

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, проф. Б.З. Федоренко

Л59 **Линейная** алгебра и аналитическая геометрия: методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов всех специальностей /сост. Ю.Ю. Некрасов. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. – 25 с.

Предлагаемые методические указания предназначены для облегчения работы по самостоятельному выполнению индивидуального домашнего задания по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия». В методических указаниях даны краткие теоретические сведения, приводится образец решения одного варианта.

Издание предназначено для студентов всех специальностей. Публикуется в авторской редакции.

УДК 512.7 (07)
ББК 22.147. я7

ВВЕДЕНИЕ

Изучение высшей математики в техническом вузе позволяет студенту ознакомиться с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических инженерных задач, развить логическое мышление, вырабатывать умение самостоятельно изучать научную литературу по математике и ее приложениям, повысить общий уровень математической культуры. Без фундаментальной подготовки (в первую очередь математической) нельзя сделать качественный скачок в образовании современного инженера.

Предлагаемые методические указания предназначены для облегчения работы по самостоятельному выполнению индивидуального домашнего задания по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия». В методических указаниях даны краткие теоретические сведения, приводится образец решения одного варианта.

При выполнении данного индивидуального домашнего задания студент должен письменно ответить на теоретические вопросы, решить теоретические упражнения и индивидуальные контрольные задания.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке А, а конец – в точке В, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Через $\overrightarrow{BA}$ обозначается вектор, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Векторы называются *коллинеарными,* если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Свободный вектор может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Здесь X, Y, Z проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат (их называют координатами вектора), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты этих осей. Модуль (длина) вектора определяется по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Сумма, разность векторов и произведение вектора на скалярный множитель, определяются соответствующими формулами:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(X_a + \overrightarrow{X_b}\right)\vec{i} + \left(Y_a + Y_b\right)\vec{j} + \left(Z_a + Z_b\right)\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(X_a - \overrightarrow{X_b}\right)\vec{i} + \left(Y_a - Y_b\right)\vec{j} + \left(Z_a - Z_b\right)\vec{k}$$

$$m\vec{a} = mX_a\vec{i} + mY_a\vec{j} + mZ_a\vec{k}$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет начало в точке $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и конец в точке $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, то разложение по ортам имеет вид:

$$\overrightarrow{AB} = \left(X_2 - X_1\right)\vec{i} + \left(Y_2 - Y_1\right)\vec{j} + \left(Z_2 - Z_1\right)\vec{k}$$

Пусть даны вектора $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Любой вектор вида: $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$,

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ некоторые действительные числа, Называется линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются коэффициентами линейной комбинации. Если

$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

Любая пара неколлинеарных векторов плоскости, взятых в определенном порядке, называется *базисом на плоскости.*

Любая тройка неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке, называется *базисом в пространстве.*

Справедливы утверждения:

а) любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть разложен по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ базиса этой плоскости, причем это разложение единственно;

б) любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть разложен по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ базиса пространства, причем это разложение единственно.

1.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения:

а) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$;

б) $\left(\left(\lambda\vec{a}\right) \cdot \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(\lambda\vec{b}\right)$;

в) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)$;

г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$;

д) $\left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2$;

е) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0$

если $\vec{a} = 0$, либо $\vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами и

$$\vec{a} = X_{\vec{a}}\vec{i} + Y_{\vec{a}}\vec{j} + Z_{\vec{a}}\vec{k}$$
$$\vec{b} = X_{\vec{b}}\vec{i} + Y_{\vec{b}}\vec{j} + Z_{\vec{b}}\vec{k},$$

то скалярное произведение этих векторов находятся по формуле:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right) = X_{\vec{a}} X_{\vec{b}} + Y_{\vec{a}} Y_{\vec{b}} + Z_{\vec{a}} Z_{\vec{b}} .$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$X_{\vec{a}} X_{\vec{b}} + Y_{\vec{a}} Y_{\vec{b}} + Z_{\vec{a}} Z_{\vec{b}} = 0 .$$

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ наблюдается из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против движения часовой стрелки.

В противном случае данная тройка называется левой.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

а) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}\right)$;

б) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

в) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая.

Свойства векторного произведения:

а) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;

б) $\left(\left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$;

в) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

г) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} = 0$, либо $\vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

д) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало в точке O.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то векторное произведение этих векторов находится по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix} \right\} .$$

Признаком коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{X_a}{X_b}=\frac{Y_a}{Y_b}=\frac{Z_a}{Z_b}.$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

а) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

б) $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right)=\left(\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right)=-\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right)=-\left(\vec{c}\vec{b}\vec{a}\right)=-\left(\vec{a}\vec{c}\vec{b}\right)$;

в) геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\pm V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+», если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая, или со знаком «-» , если она левая4

г) $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0$, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны. Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы своими координатами

$$\vec{a}=X_{\vec{a}}\vec{i}+Y_{\vec{a}}\vec{j}+Z_{\vec{a}}\vec{k}$$
$$\vec{b}=X_{\vec{b}}\vec{i}+Y_{\vec{b}}\vec{j}+Z_{\vec{b}}\vec{k}$$
$$\vec{c}=X_{\vec{c}}\vec{i}+Y_{\vec{c}}\vec{j}+Z_{\vec{c}}\vec{k},$$

то смешанное произведение определяется по формуле:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\\ X_c & Y_c & Z_c\end{vmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

$$\begin{vmatrix}X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\\ X_c & Y_c & Z_c\end{vmatrix}=0.$$

1.3. Уравнение плоскости и прямой в пространстве

В декартовых прямоугольных координатах любой плоскости приводится к виду: $Ax+By+Cz+D=0$.

Это уравнение называется общим уравнением плоскости. Коэффициенты A, B,C являются координатами нормального вектора $\vec{n}$.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

а) уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору (нормальному):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,;$$

б) уравнение плоскости в «отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,,$$

$a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$;

в) уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Величина угла φ между плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{n_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Условие перпендикулярности данных плоскостей $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}=0$ или $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Условие параллельности рассматриваемых плоскостей $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Существуют следующие виды уравнений прямой в пространстве:

а) Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ пересекающихся по этой, прямой;

б) Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ и $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ имеют вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

в) Канонические уравнения: $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{p}$ определяют прямую, проходящую через точку $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ и параллельную вектору $\vec{s}=l\vec{i}+m\vec{j}+p\vec{k}$;

г) Параметрические уравнения, где t -параметр, имеет вид:

$$x=lt+x_1$$
$$y=mt+y_1$$
$$z=pt+z_1$$

Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Определяется по формуле: $\cos\varphi=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}$.

Условие параллельности двух прямых: $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$.

Углом между прямой $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{p}$ и плоскостью: $Ax+By+Cz+D=0$ называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость (рис.1). Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\left|\cos\left(\vec{n}\wedge\vec{s}\right)\right|=\sin\varphi=\frac{\left|Al+Bm+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}} .$$

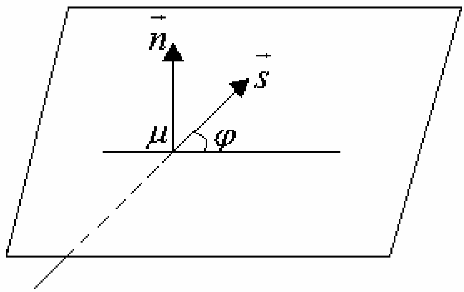

Рис.1

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1.

Даны четыре точки A, B, C, D не лежащие в одной плоскости. Найти:

а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$;

б) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$;

в) площадь треугольника ABC;

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) уравнение плоскости ABC;

е) канонические уравнения высоты OD пирамиды $ABCD$;

ж) точку O пересечения высоты OD с плоскостью ABC;

з) разложение вектора $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$;

и) синус угла между прямой OD и плоскостью ABD;

к) кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD $A(1;-1;2)$; $B(2;1;2)$; $C(1;1;4)$; $D(6;-3;8)$.

Решение:

а) найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \{1;2;0\}, \overrightarrow{AC} = \{0;2;2\}$.

Косинус угла между векторами находим по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\cdot AC\right|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 2}{\sqrt{1+2^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

б) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD}=\{5;-2;6\}$, вектор $\overrightarrow{AB}=\{1;2;0\}$.

Для нахождения проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$ используем формулу: $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}$, отсюда

$$np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{1\cdot5+2\cdot(2)+0\cdot6}{\sqrt{5^2+(2)^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{65}} \ .$$

в) Площадь треугольника ABC находим, используя свойства векторного произведения.

$$S_{парал}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Где x_1, y_1, z_1 - координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; x_2, y_2, z_2 - координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, тогда: $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2}=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$

$$S_{\vartriangle ABC}=\frac{S_{парал}}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6} \ .$$

г) Объем пирамиды $ABCD$ находим, используя свойства смешанного произведения.

$$V_{параллелепипеда}=\left|\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

$$V_{пирамиды}=\frac{1}{6}V_{параллелепипеда}$$

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}=36$$

$$V_{пир}=\frac{36}{6}=6.$$

д) Для нахождения уравнения плоскости ABC, воспользуемся уравнением плоскости проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости $2x - y + z - 5 = 0$.

е) Для нахождения канонических уравнений высоты OD пирамиды $ABCD$, находим направляющий вектор прямой OD. Он совпадает с нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости ABC и имеет координаты: $\vec{s} = \{2;-1;1\}$, прямая OD проходит через точку $D(6;-3;8)$.

Каноническое уравнение прямой OD: $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-8}{1}$.

ж) Для нахождения точки O пересечения высоты OD с плоскостью ABC, запишем параметрические уравнения прямой OD:

$$x = 2t + 6$$

$$y = -t - 3$$

$$z = t + 8$$

Определим значение параметра t, подставляя значения величин x, y, z из параметрических уравнений прямой OD в уравнение плоскости ABC:

$$2(2t+6) - (-t-3) + (t+8) - 5 = 0$$

$$6t + 18 = 0$$

$$t = -3$$

Координаты точки пересечения O определяем из параметрических уравнений прямой OD при $t = -3$:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$z = 5$ или $O(0;0;5)$.

з) Разложение вектора $\overrightarrow{DO}$ по трем некомпланарным векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ представим в виде: $\overrightarrow{DO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$, где α, β, γ - коэффициенты разложения. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{DO} = \{-6; 3; -3\}$. Выражение $\overrightarrow{DO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$ в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} -6 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 5 \\ 3 = \alpha\cdot 2 + \beta\cdot 2 + \gamma\cdot(-2) \\ -3 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 2 + \gamma\cdot 6 \end{cases}$$

Решаем полученную систему любым способом (Крамера, матричным, Гаусса). Решение системы: $\alpha = -1; \beta = \frac{3}{2}; \gamma = -1$. Разложение вектора $\overrightarrow{DO}$ имеет вид: $\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

и) Направляющий вектор прямой OD: $\vec{s} = \{2;-1;1\}$, для нахождения нормального вектора плоскости ABD используем векторное произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

Нормальный вектор плоскости $ABD: \vec{n} = \{2;-1;-2\}$ синус угла φ между прямой OD и плоскостью ABD вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\vec{s}\cdot\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-2)\right|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

к) Канонические уравнения прямых AB и CD имеют вид:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0} \quad (AB)$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-4}{4} \quad (CD)$$

Для определения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми проведем, например, через прямую AB плоскость параллельную второй прямой CD (рис.2).

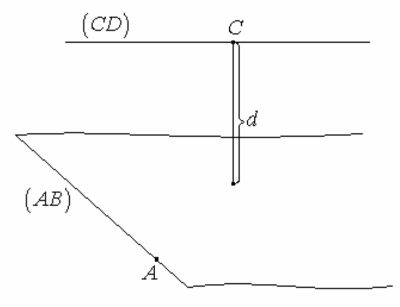

Рис. 2

В качестве нормального вектора этой плоскости можно взять вектор $\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$, где $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ - направляющие векторы прямых AB и CD соответственно.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 4\vec{j} - 14\vec{k} \text{ или } \vec{n} = \{4;-2;-7\} .$$

В качестве точки, через которую проходит плоскость, берем точку $A(1;-1;2)$. Плоскость, проходящая через данную прямую имеет вид: $4(x-1)-2(y+1)-7(z-2)=0$ или $4x-2y-7z+8=0$.

Расстояние от произвольной точки прямой CD до построенной плоскости и будет искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми AB и CD. Определим расстояние от точки $C(1;1;4)$ до плоскости: $d = \dfrac{|4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 7\cdot 4 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 7^2}} = \dfrac{|-18|}{\sqrt{69}} = \dfrac{18}{\sqrt{69}}$

$4x-2y+7z+8=0$.

Задача 2.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 3,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{3\pi}{4} .$$

Решение:

Модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах $s=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Найдем

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(3\vec{p}+2\vec{q}\right)\times\left(2\vec{p}-\vec{q}\right)=6\left(\vec{p}\times\vec{p}\right)+4\left(\vec{q}\times\vec{p}\right)-3\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)-2\left(\vec{q}\times\vec{q}\right)=7\left(\vec{q}\times\vec{p}\right)$$

(поскольку $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{q}\times\vec{q}=0,\ \vec{q}\times\vec{p}=-\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)$),

$$s=7\left|\vec{q}\times\vec{p}\right|=7\left|\vec{q}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\sin\left(\vec{p}\,^\wedge\,\vec{q}\right)=7\cdot3\cdot4\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=42\sqrt{2}\ .$$

Задача 3.

а) Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой $M\left(4;3;10\right)$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

Решение:

Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную данной прямой, нормальный вектор искомой плоскости совпадает с направляющим вектором данной прямой, т.е. $\vec{n}=\vec{s}=\left\{2;4;5\right\}$.

Уравнение плоскости:

$$2\left(x-4\right)+4\left(y-3\right)+5\left(z-10\right)=0$$

$$2x+4y+5z-70=0$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$x=2t+1$$

$$y=4t+2$$

$$z=5t+3$$

Найдем точку M'' пересечения данной прямой и плоскости:

$$2\left(2t+1\right)+4\left(4t+2\right)+5\left(5t+3\right)-70=0$$

$$45t-45=0$$

$$t=1$$

Координаты точки M'': $x=3;\ y=6;\ z=8$.

Точка M'' - середина отрезка MM'. Используя формулы:

$$x_{сер}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y_{сер} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z_{сер} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

где x_1, y_1, z_1 - координаты точки M

x_2, y_2, z_2 - координаты точки M'

$x_{сер}, y_{сер}, z_{сер}$ - координаты точки M'',

Найдем координаты точки M':

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_{сер} - x_1 & \quad & x_2 = 2\cdot 3 - 4 = 2 \\ y_2 &= 2y_{сер} - y_1 & \text{ или } & y_2 = 2\cdot 6 - 3 = 9 \text{ , т.е. } M'(2;9;6). \\ z_2 &= 2z_{сер} - z_1 & & z_2 = 2\cdot 8 - 10 = 6 \end{aligned}$$

б) Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости $M(-3;1;-9)$, $4x - 3y - z - 7 = 0$.

Решение:

Найдем каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно данной плоскости: $\vec{n} = \vec{s} = \{4;-3;-1\}$.

Уравнения прямой: $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+9}{-1}$.

Найдем точку пересечения M'', прямой и плоскости:

$X = 4t - 3$

$Y = -3t + 1$

$Z = -t - 9$

$4(4t-3) - 3(3t+1) - (-t-9) - 7 = 0$

$26t - 13 = 0$

$t = \dfrac{1}{2}$

Координаты точки M'':

$x = 4\dfrac{1}{2} - 3 = -1$

$y = -3\dfrac{1}{2} + 1 = -\dfrac{1}{2}$

$z=-\frac{1}{2}-9=-9\frac{1}{2}$.

То есть $M''\left(-1;-\frac{1}{2};-9\frac{1}{2}\right)$.

Точка M'' - середина отрезка MM'. Координаты M':

$X_2=2(-1)+3=1$

$Y_2=2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-2$

$Z_2=2\left(-9\frac{1}{2}\right)+9=-10$

То есть $M'(1;-2;-10)$.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1.

Даны четыре точки A,B,C,D, не лежащие в одной плоскости. Найти:

а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

б) Проекцию век5тора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$;

в) площадь треугольника ABC;

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) уравнение плоскости ABC;

е) канонические уравнения высоты QD пирамиды $ABCD$;

ж) точку Q пересечения высоты QD с плоскостью ABC;

з) разложение вектора $\overrightarrow{DQ}$ по векторам $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$;

и) синус угла между прямой QD и плоскостью ABD;

к) кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

1.1. $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$.

1.2. $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$.

1.3. $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$.

1.4. $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$.

1.5. $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$.

1.6. $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$.

1.7. $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$.

1.8. $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$.

1.9. $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$.

1.10. $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$.

1.11. $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$.

1.12. $A(7,4,9)$, $B(1,-2,3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$.

1.13. $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,-7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$.

1.14. $A(-4,-5,3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$.

1.15. $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$.

1.16. $A(-6,4,5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$.

1.17. $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,1)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$.

1.18. $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$.

1.19. $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$.

1.20. $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$.

1.21. $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$.

1.22. $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$.

1.23. $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$.

1.24. $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$.

1.25. $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$.

1.26. $A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$.

1.27. $A(-9,-7,4)$, $B(-4,3,-1)$, $C(5,-4,2)$, $D(3,4,4)$.

1.28. $A(3,5,3)$, $B(-3,2,8)$, $C(-3,-2,6)$, $D(7,8,-2)$.

1.29. $A(4,2,3)$, $B(-5,-4,2)$, $C(5,7,-4)$, $D(6,4,-7)$.

1.30. $A(-4,-2,-3)$, $B(2,5,7)$, $C(6,3,-1)$, $D(6,-4,1)$.

Задача 2.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.1. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q};\ \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=1;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

2.2. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\ |\vec{p}|=4;\ |\vec{q}|=1;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

2.3. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\ |\vec{p}|=\dfrac{1}{5};\ |\vec{q}|=1;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

2.4. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}+5\vec{q};\ |\vec{p}|=4;\ |\vec{q}|=\dfrac{1}{2};\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{5\pi}{6}.$

2.5. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q};\ \vec{b}=2\vec{p}+\vec{q};\ |\vec{p}|=2;\ |\vec{q}|=3;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{3\pi}{4}.$

2.6. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\ |\vec{p}|=2;\ |\vec{q}|=3;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

2.7. $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q};\ |\vec{p}|=3;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

2.8. $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=7;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

2.9. $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q};\ \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q};\ |\vec{p}|=1;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

2.10. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q};\ \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=7;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

2.11. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=10;\ |\vec{q}|=1;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

2.12. $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\ |\vec{p}|=5;\ |\vec{q}|=4;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

2.13. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\ |\vec{p}|=6;\ |\vec{q}|=7;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

2.14. $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q};\ |\vec{p}|=3;\ |\vec{q}|=4;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

2.15. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=2;\ |\vec{q}|=3;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

2.16. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q};\ \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q};\ |\vec{p}|=4;\ |\vec{q}|=1;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

2.17. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q};\ \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q};\ |\vec{p}|=1;\ |\vec{q}|=2;\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

2.18. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q};\ |\vec{p}| = \dfrac{1}{2};\ |\vec{q}| = 2;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

2.19. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q};\ |\vec{p}| = 3;\ |\vec{q}| = 4;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

2.20. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q};\ \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q};\ |\vec{p}| = 4;\ |\vec{q}| = 1;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

2.21. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};\ |\vec{p}| = 8;\ |\vec{q}| = \dfrac{1}{2};\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

2.22. $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q};\ |\vec{p}| = 2,5;\ |\vec{q}| = 2;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

2.23. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q};\ |\vec{p}| = 3;\ |\vec{q}| = 1;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi 46.$

2.24. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q};\ \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q};\ |\vec{p}| = 3;\ |\vec{q}| = 5;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

2.25. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q};\ |\vec{p}| = 7;\ |\vec{q}| = 2;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

2.26. $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q};\ |\vec{p}| = 5;\ |\vec{q}| = 3;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

2.27. $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q};\ |\vec{p}| = 2;\ |\vec{q}| = 3;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

2.28. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q};\ |\vec{p}| = \dfrac{1}{2};\ |\vec{q}| = 4;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

2.29. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q};\ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q};\ |\vec{p}| = 2;\ |\vec{q}| = 1;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

2.30. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q};\ \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q};\ |\vec{p}| = 2;\ |\vec{q}| = 3;\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}..$

Задача 3.

Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1-15) или плоскости (для вариантов 16-30).

3.1. $M(0,-3,-2);\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1,5}{-1} = \dfrac{z}{1}.$

3.2. $M(2,-1,1);\ \dfrac{x-4,5}{1} = \dfrac{y+3}{-0,5} = \dfrac{z-2}{1}.$

3.3. $M(1,1,1);\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1,5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}.$

3.4. $M(1,2,3)$; $\dfrac{x-0,5}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1,5}{1}$.

3.5. $M(1,0,-1)$; $\dfrac{x-3,5}{2}=\dfrac{y-1,5}{2}=\dfrac{z}{0}$.

3.6. $M(2,1,0)$; $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z+0,5}{1}$.

3.7. $M(2,1,0)$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z+0,5}{1}$.

3.8. $M(-2,-3,0)$; $\dfrac{x+0,5}{2}=\dfrac{y+1,5}{0}=\dfrac{z-0,5}{1}$.

3.9. $M(0,2,1)$; $\dfrac{x-1,5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

3.10. $M(3,-3,1)$; $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3,5}{4}=\dfrac{z+0,5}{0}$.

3.11. $M(3,3,3)$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.

3.12. $M(-1,2,0)$; $\dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+0,7}{-0,2}=\dfrac{z-2}{2}$.

3.13. $M(2,-2,-3)$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0,5}{0}=\dfrac{z+1,5}{0}$.

3.14. $M(-1,0,1)$; $\dfrac{x+0,5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

3.15. $M(0,-3,-2)$; $\dfrac{x-0,5}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1,5}{1}$.

3.16. $M(1,0,1)$; $4x+6y+4z-25=0$.

3.17. $M(-1,0,-1)$; $2x+6y-2z+11=0$.

3.18. $M(0,2,1)$; $2x+4y-3=0$.

3.19. $M(2,1,0)$; $y+z+2=0$.

3.20. $M(-1,2,0)$; $4x-5y-z-7=0$.

3.21. $M(2,-1,1)$; $x-y+2z-2=0$.

3.22. $M(1,1,1)$; $x+4y+3z+5=0$.

3.23. $M(1,2,3)$; $2x+10y+10z-1=0$.

3.24. $M\left(0,-3,-2\right)$; $2x+10y+10z-1=0.$

3.25. $M\left(1,0,-1\right)$; $2y+4z-1=0.$

3.26. $M\left(3,-3,-1\right)$; $2x-4y-4z-13=0.$

3.27. $M\left(-2,3,0\right)$; $x+5y+4=0.$

3.28. $M\left(2,-2,-3\right)$; $y+z+2=0.$

3.29. $M\left(-1,0,-1\right)$; $2x+4y-3=0.$

3.30. $M\left(3,3,3\right)$; $8x+6y+8z-25=0.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕМЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.
3. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.
4. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое условие компланарности трех векторов.
5. Плоскость. Уравнения плоскости.
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. Уравнение прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложить вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$; $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

2. Найти угол между единичными векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, если известно, что векторы $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$ и $\vec{b}=5\overrightarrow{e_1}-4\overrightarrow{e_2}$ взаимно перпендикулярны.

3. Доказать комплонарность векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ зная, что

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0 .$$

4. Доказать, что уравнение прямой, проходящей через точку $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ параллельно плоскостям $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$ можно записать в виде:

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

5. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\vec{s}$ определяется формулой: $d = \dfrac{\left|\left[\vec{s} \times \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{s}\right|}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В трех частях. Под общей редакцией доктора физ.-мат. Наук, профессора А.П. Рябушко. Минск «Высшая школа» 1990.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кошевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть – 1. Москва «Высшая школа» 1980.

3. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. ТР. Москва «Высшая школа» 1983.

4. Задачник – практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре. Под общей редакцией Волкова В.А. Изд. Ленинградского университета, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Линейная алгебра
и аналитическая геометрия

Методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов всех специальностей

Составитель **Некрасов** Юрий Юрьевич

Подписано в печать 26.10.10. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,6
Тираж 100 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46