Федеральное агентство по образованию
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов всех специальностей

Белгород
2010

Федеральное агентство по образованию
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Кафедра прикладной математики

Утверждено
научно-методическим советом
университета

Теория вероятностей
и математическая статистика

Методические указания к выполнению индивидуальных
домашних заданий для студентов всех специальностей

Белгород
2010

УДК 519.21 (07)
ББК 22.17 я 7
Т33

Составитель
канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Ю. Некрасов

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. В. М. Никифоров

Т33 **Теория** вероятностей и математическая статистика: методические указания к выполнению индивидуальных домашний заданий для студентов всех специальностей / сост. Ю.Ю. Некрасов. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. – 50 с.

Данные индивидуальные домашние задания соответствуют разделу высшей математики «Теория вероятностей и математическая статистика» и охватывают все основополагающие вопросы этого раздела.

Индивидуальные домашние задания являются одним из эффективных способов организации самостоятельной работы студентов и помогают осуществлять контроль над уровнем подготовки каждого студента индивидуально.

Издание предназначено для студентов всех специальностей.

Методические указания публикуются в авторской редакции.

УДК 519.21. (07)
ББК 22.17 я 7

Введение

Выполнение студентами ИДЗ по различным разделам высшей математики способствует более глубокому освоению учебного материала. С другой стороны, ИДЗ является одним из эффективных способов организации самостоятельной работы студентов и помогает осуществлять контроль над уровнем подготовки каждого студента индивидуально.

Данные ИДЗ соответствуют разделу высшей математики «Теория вероятностей и математическая статистика» и охватывает все основополагающие вопросы этого раздела. Выполнение ИДЗ должно осуществляться по мере освоения соответствующего теоретического материала на лекциях и закрепления его на практических занятиях. Таким образом, выполнение ИДЗ растягивается на все время изучения данного раздела математики. Контроль над выполнением ИДЗ также должен быть постоянным, например, при проверке домашних заданий во время практических занятий. В связи с этим, задания студентам желательно выдать как можно раньше, не позднее третьего практического занятия по данной дисциплине. Такой подход позволяет избежать импульсивных нагрузок на студентов и, с другой стороны, способствует улучшению обратной связи между преподавателем и студентами. Защиту ИДЗ целесообразно проводить в два этапа. На первом этапе рассмотреть материал, касающийся непосредственно случайных событий (задания 1-6), на втором этапе – весь остальной материал.

При составлении заданий авторы стремились избежать излишне головоломных задач, мало способствующих освоению теоретического материала. Ставилась цель охватить различные простые логические схемы, без освоения которых невозможно ставить и решать более сложные задачи.

Порядок выполнения индивидуальных домашних заданий

Работа студентов над ИДЗ должна начинаться с первых занятий по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика». Прежде чем выполнить конкретное задание, необходимо тщательно разобраться с теоретическим материалом, акцентируя внимание на постановку задачи в общем виде. Не следует запоминать формулы, если не понятен их смысл. В первую очередь нужно осмыслить те условия, при которых эти формулы возникают. После освоения теоретического материала необходимо разобрать примеры, решенные на лекционных и практических занятиях, и сравнить их с тем заданием, которое предстоит выполнить. Само задание выполняется с подробным описанием всех этапов решения. Начинать решение нужно с описания обозначений тех событий, которые фигурируют в задаче. Например, «Пусть А – событие, состоящее в том, что будет одно попадание в цель при одном выстреле» и т.п. Следует помнить, что решение ИДЗ не является самоцелью. Это лишь средство освоения материала изучаемой дисциплины. Подробное описание этапов решения задачи, мотивация применения тех или иных формул, с познавательной точки зрения имеет большее значение, чем сами вычисления и ответ задачи. Таким образом, описание этапов решения задачи является определенным показателем уровня освоения материала студентом.

Рассмотренный пример выполнения ИДЗ может, в определенной мере помочь выполнению студентом своего задания. Однако, этот пример нельзя интерпретировать как некий шаблон, который справедлив в любом случае. Все задания индивидуальны не только по содержанию, но и по логической схеме. Таким образом, в разных вариантах одного (по номеру) задания могут встретиться разные формулы. Некоторые задачи допускают различные подходы к решению, приводящие к правильному результату. В таком случае можно выбрать любой из них, если только в формулировке задания нет специальных оговорок по этому вопросу.

Приведенный далее справочный материал охватывает всю тематику предлагаемых заданий. Но его не следует считать основным материалом при подготовке к выполнению заданий и к защите ИДЗ. Этот материал полезен лишь тогда, когда теоретические истоки тех или иных формул уже освоены. Кроме того, этот материал схематично отображает тот объем, который нужно знать студенту при защите ИДЗ. Защищая ИДЗ, студент должен знать теоретические положения и уметь объяснить все свои действия по решению любого ИДЗ.

Необходимые для решения заданий табличные данные приведены в конце данных методических указаний.

Основные справочные формулы
Случайные события

Обозначения: V - невозможное событие, U - достоверное событие. Случайные события обозначаются большими латинскими буквами без индексов или с нижними индексами (A, B, A_1, B_3, H и т.д.).

Операции. Суммой двух событий A и B называется такое событие C, которое выполняется тогда и только тогда, когда выполняется или A или B или оба эти события одновременно. Записывается так: $C = A + B$. Произведением двух событий A и B называется такое событие C, которое выполняется тогда и только тогда, когда выполняется и A и B одновременно. Обозначается: $C = AB$. Говорят, что событие A влечет за собой событие B, если при осуществлении события A событие обязательно происходит. Этот факт отражается записью: $A \subset B$. Очевидно, что если $A \subset B$, то $AB = A$ и $A + B = B$. События $A_1, A_2, ..., A_n$ составляют полную группу событий, если их сумма равна достоверному событию. Если $AB = V$, то события A и B называются несовместными. Событие $\overline{A}$ называется противоположным событием по отношению к A, если оно происходит, когда A не происходит и которое не происходит, когда A происходит.

Тождества: $A + A = A$ $\quad A \cdot A = A$ $\quad A + \overline{A} = U$ $\quad A \cdot \overline{A} = V$

$A + V = A$ $\quad A \cdot V = V$ $\quad A + U = U$ $\quad A \cdot U = A$

Вероятность события. Классическое определение. Вероятностью $P(A)$ события A называют отношение числа исходов опыта N_A, приводящих к осуществлению события A, к общему числу исходов опыта N в предположении, что все исходы опыта являются равновозможными, т.е. $P(A) = \frac{N_A}{N}$. Предположение о равной возможности исходов опыта вносит определенный субъективизм в это определение, что и является его недостатком.

Статистическое определение. Пусть некоторый опыт, с которым связано событие A, повторяется n раз, а событие A осуществляется при этом k раз $(0 \le k \le n)$. Тогда отношение k к n с увеличением числа повторений опыта стремится в определенном смысле к некоторому постоянному числу, которое и принимается за вероятность события A.

На самом деле n всегда конечно. Поэтому при достаточно больших n считают, что $P(A) \approx \frac{k}{n}$.

Геометрическое определение. Если исходы опыта в совокупности представляют непрерывное множество, то
$$P(A) = \frac{mes\{\Omega_A\}}{mes\{\Omega\}},$$
где Ω - множество всех исходов опыта, Ω_A - множество исходов, приводящих к осуществлению события A, mes - мера множества. В качестве меры множества может быть длина, площадь, объем. Это определение охватывает и классическое определение. Действительно, в случае дискретных множеств в качестве меры множества следует взять число его элементов.

В любом случае $0 \le P(A) \le 1$, причем $P(V) = 0$, $P(U) = 1$. Если осуществление события A влечет за собой осуществление события B, т.е. $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

Формула сложения вероятностей:
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$
Если A и B - несовместные события, то $P(A \cdot B) = 0$ и $P(A+B) = P(A) + P(B)$. Из этого следует, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Формула умножения вероятностей:
$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B)$$
где $P(A|B)$ - условная вероятность, т.е. вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло. Если A и B - статистически независимые события, то
$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Формула полной вероятности. Если $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная группа попарно несовместных событий, т.е. $H_1 + H_2 + ... + H_n = U$ и $H_i \cdot H_k = V$, когда $i \ne k$, и A некоторое событие, то
$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k) \cdot P(H_k).$$
При этом предполагается, что вероятности $P(A|H_k)$ и $P(H_k)$ либо заданы, либо определяются из условия конкретной задачи.

Формула Байеса. Если $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная группа попарно несовместных событий, т.е. $H_1 + H_2 + ... + H_n = U$ и $H_i \cdot H_k = V$, когда $i \ne k$, и A некоторое событие, то

$$P\left(H_k|A\right)=\frac{P\left(A|H_k\right)\cdot P\left(H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(A|H_i\right)\cdot P\left(H_i\right)}.$$

Формула Бернулли. Если некоторое испытание повторяется n раз, а вероятность появления события A при каждом повторении испытания сохраняется постоянной и равна p, то вероятность появления события A равно k раз определяется формулой: $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k q^{n-k}$, где $q=1-p$, $0\le k\le n$, а $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, есть число сочетаний из n элементов (объектов) по k. Наивероятнейшее число k_0 наступлений события A в n независимых испытаниях определяется неравенством: $np-q\le k_0\le np+p$.

Вероятность того, что событие A произойдет не менее чем i раз, равна

$$P\{k\ge i\}=\sum_{k=i}^{n}C_n^k\cdot p^k q^{n-k}=1-\sum_{k=0}^{i-1}C_n^k\cdot p^k q^{n-k}.$$

В частности, вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз в n независимых испытаниях, можно определить по формуле:

$$P\{k\ge 1\}=1-q^n.$$

Если выбрать такое n, что

$$n\ge\frac{\left|\ln(1-P)\right|}{\left|\ln(1-p)\right|},$$

то с вероятностью, не меньшей P, событие A произойдет в n испытаниях хотя бы один раз.

При больших n можно пользоваться приближенными формулами:

$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, а $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ - локальная теорема Муавра-Лапласа;

$P\{k_1\le k\le k_2\}\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, где $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(z)$ - функция Лапласа,

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt,$$

- интегральная теорема Муавра-Лапласа. Эти формулы дают наибольшую точность при $p=q=0,5$. Фрагмент таблицы функции $\Phi(z)$ приведен на стр. 38. При малых значениях p, когда np составляет величину порядка единиц или менее, рекомендуется пользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\exp\{-\lambda\}, \text{ где } \lambda = np .$$

Случайные величины

Обозначения. Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами без индексов или с нижними индексами (X, Y, Z), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x, y, z).

Определение. Классификация. Случайной величиной называется величина, которая в результате некоторого опыта может принять одно из своих возможных значений, причем заранее не известно, какое именно значение они примет. Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая имеет конечное или бесконечное, но счетное, число возможных значений. Непрерывная случайная величина – это величина, возможные значения которой составляют непрерывное множество.

Закон распределения вероятностей. Совокупность всех возможных значений случайной величины с соответствующими им вероятностями называется законом распределения вероятностей этой случайной величины. перечислить возможные значения и указать их вероятности можно таблично, графически или с помощью некоторой математической формулы, связывающей возможные значения с соответствующими вероятностями. Если $p_k = P\{X = x_k\}$ - есть вероятность того, что случайная величина X примет значение x_k, $k = 1, 2, ..., n$, то таблица из двух строк представляет табличное задание величины X (рис.1). Если связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями задана с помощью математической формулы, то говорят, что случайная величина задана аналитически. Например,

$$P\{X = k\} = p_k = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

здесь $x_k = k$. Если эта связь задана с помощью графика, то говорят, что случайная величина задана графически (рис.2).

x_k	x_1	x_2	…	x_n
p_k	p_1	p_2	…	p_n

Рис.1 Табличное задание дискретной случайной величины

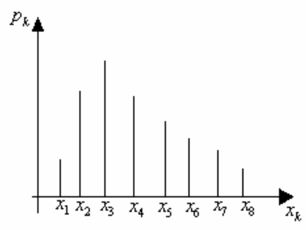


Рис.2 Графическое задание дискретной случайной величины

В любом случае, если общее число возможных значений случайной величины равно n, то $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ -условие нормировки вероятностей.

Функция распределения вероятностей. Функцией распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X в точке x называется вероятность того, что в результате опыта случайная величина примет значение меньшее, чем x, т.е. $F(x) = P\{X < x\}$. Из этого определения вытекают следующие свойства функции распределения вероятностей:

1. $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1;$ 2. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;

3. $P\{\alpha \leq X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$.

Последнее равенство определяет вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha;\beta)$.

Плотность распределения вероятностей. Для непрерывных случайных величин кроме функции распределения вероятностей применяется плотность распределения вероятностей $f(x) = F'(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$; 2. $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)$; 3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$; 4. $P\{\alpha \leq X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ ·

Математическое ожидание функции случайной величины. Математическим ожиданием функции $\varphi(X)$ случайной величины X называется величина m_φ, которая имеет символичное обозначение $M\{\varphi(X)\}$ и определяется по формулам:

$$m_\varphi = M\{\varphi(X)\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, p_i, \ \textit{если} \ \ X - \textit{дискр. случайная величина}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx, \ \textit{если} \ \ X - \textit{непрер. случайная величина}. \end{cases}$$

Здесь $x_i,\ (i = 1, 2, ..., n)$ - возможные значения дискретной случайной величины, p_i - вероятности этих значений, n - общее число возможных значений, $f(x)$ - плотность распределения непрерывной случайной величины.

Моменты случайной величины. Начальным моментом v_k порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$v_k = M\left\{X^k\right\} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \ \textit{если} \ \ X - \textit{дискр. случайная величина}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \ \textit{если} \ \ X - \textit{непрер. случайная величина.} \end{cases}$$

Центральным моментом μ_k порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - v_1)^k$:

$$\mu_k = M\left\{(X - v_1)^k\right\} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - v_1)^k \ p_i, \ \textit{если} \ \ X - \textit{дискр. случайная величина}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - v_1)^k \ f(x)dx, \ \textit{если} \ \ X - \textit{непрер. случайная величина.} \end{cases}$$

Формулы связи между начальными и центральными моментами:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2; \quad \mu_3 = v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3; \quad \mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.$$

Математическое ожидание случайной величины. Первый начальный момент v_1 является математическим ожиданием случайной величины X и обозначается m_x:

$$m_x = M\left\{X\right\} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i, \ \textit{если} \ \ X - \textit{дискр. случайная величина}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \ \textit{если} \ \ X - \textit{непрер. случайная величина.} \end{cases}$$

Математическое ожидание является основной характеристикой положения случайной величины на числовой оси, т.е. указывает некоторую точку, вокруг которой группируются возможные значения случайной величины. Оно обладает следующими свойствами:

1. $M\{C\} = C$; 2. $M\{C \cdot X\} = C \cdot M\{X\}$; 3. $M\{X + Y\} = M\{X\} + M\{Y\}$,

где С – постоянная величина.

Дисперсия случайной величины. Дисперсия D_x-это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания. В соответствии с этим определением дисперсия является вторым центральным моментом μ_2:

$$D_x = M\left\{\left(X - m_x\right)^2\right\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i, \; \textit{если} \;\; X - \textit{дискр. случайная величина}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^2 f(x)\,dx, \; \textit{если} \;\; X - \textit{непрер. случайная величина}. \end{cases}$$

Дисперсия характеризует расстояние случайной величины около своего математического ожидания и обладает следующими свойствами:

1. $D\{X\} \ge 0$; 2. $D\{C \cdot X\} = C^2 D\{X\}$; 3. $D\{X + Y\} = D\{X\} + D\{Y\}$,

если X и Y - независимые случайные величины. Часто вместо дисперсии в качестве меры рассеяния применяют среднее квадратическое отклонение случайной величины σ_x, которое равно $\sqrt{D_x}$. Оно удобно тем, что его единица измерения совпадает с единицей измерения самой случайной величины.

Асимметрия и эксцесс закона распределения. Асимметрия, или скошенность, - это мера отклонения формы закона распределения вероятностей от симметричной, обозначаемая через Sk_x. Эксцесс обозначается через Ex_x и является мерой островершинности закона распределения. Эти характеристики определяются по формулам:

$$Sk_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}, \;\; Ex_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \cdot$$

Математическая статистика

Выборка. Вариационный ряд. Совокупность измерений $x_1, x_2, ..., x_n$ называется выборкой случайной величины X, а число измерений n - объемом выборки. Разность R между наибольшим и наименьшим значениями измерений называют широтой распределения или размахом варьирования. Выборка, элементы которой расположены в порядке возрастания, называется простым вариационным рядом. Если одинаковые по значению элементы объединить в группы, то получается сгруппированный вариационный ряд, который записывается в виде таблицы:

x_k	x_1	x_2	…	x_ℓ
n_k	n_1	n_2	…	n_ℓ

здесь $x_k \left(k = 1, 2, ..., \ell\right)$ - различающиеся значения элементов, n_k - число элементов со значением x_k, ℓ - число различных значений в выборке, так что $n_1 + n_2 + ... + n_\ell = n$. Такой же таблицей представляется интервальный вариационный ряд, который строится следующим образом. Вся широта распределения разбивается на ℓ частичных интервалов, затем подсчитывается число элементов n_k, попавших в k-тый интервал $(k = 1, 2, ..., \ell)$. В первой строке таблицы указывается середины $\overline{x_k}$ соответствующих интервалов.

Эмпирические законы распределения вероятностей. Эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ определяется как отношение числа $\alpha(x)$ элементов выборки, меньших, чем x, к общему числу элементов n: $F^*(x) = \dfrac{\alpha(x)}{n}$. Очевидно, что эта функция будет иметь ступенчатый график, причем, чем больше объем выборки n, тем мельче будут ступеньки. Для наглядного представления о форме плотности распределения случайной величины X используются понятия полигона и гистограммы распределения, которые строятся на основе интервального вариационного ряда. Для построения полигона нужно из середины каждого частичного интервала восстановить перпендикуляр длиной $p_k^* = \dfrac{n_k}{n}$ и соединить отрезками прямых вершины этих перпендикуляров. Вершины крайних перпендикуляров соединяются с концами крайних частичных интервалов. Чтобы построить гистограмму, нужно на каждом частичном интервале как на основании построить прямоугольник высотой p_k^* (Рис.3).

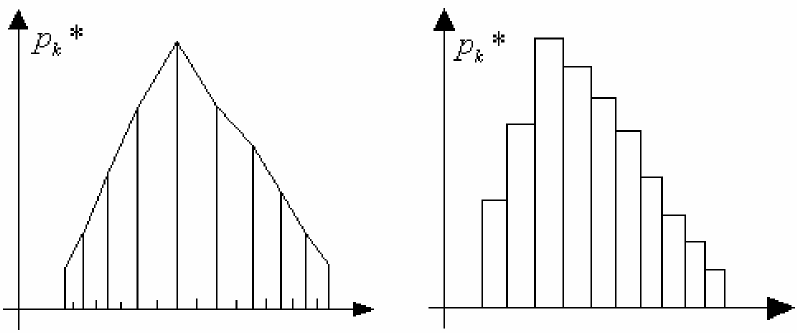


Рис.3 Полигон и гистограмма распределения (по горизонтальной оси отложены частичные интервалы).

Если длины частичных интервалов не одинаковы, то по оси следует откладывать не вероятности p_k*, а отношения $\frac{p_k*}{\Delta_k}$, где Δ_k - длины частичных интервалов. В этом случае полигон и гистограмма являются различными формами представления эмпирической плотности распределения исследуемой случайной величины.

Точечные оценки числовых характеристик случайных величин. Числовые характеристики случайных величин, найденные на основе экспериментальных данных, называются точечными оценками этих характеристик или эмпирическими характеристиками. Эмпирические моменты случайной величины определяется формулами:

$$v_k^* = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} x_i^k n_i, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} \overline{x_i}^k n_i, \end{cases} \qquad \mu_k^* = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - v_1^*\right)^k, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell}\left(x_i - v_1^*\right)^k n_i, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\overline{x_i} - v_1^*\right)^k n_i, \; k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

В этих формулах первая строка соответствует простому вариационному ряду, вторая – сгруппированному, третья – интервальному вариационному ряду. Структура формул связи между центральными и начальными моментами не изменяется. Формулы, определяющие основные характеристики случайной величины также сохраняют свою структуру. В них достаточно заменить теоретические моменты v_k и μ_k на эмпирические v_k^* и μ_k^*. При малых значениях n вместо оценки дисперсии $D^* = \mu_2^*$ применяется несмещенная оценка дисперсии S^2, которая определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^* \cdot$$

Доверительные интервалы. Интервал, в котором с вероятностью γ находится значение неизвестного параметра β, называется $100 \cdot \gamma$ - процентным доверительным интервалом для этого параметра. Равенство $P\{\beta_1 < \beta < \beta_2\} = \gamma$ означает, что значение неизвестного параметра β находится между значениями β_1 и β_2 с вероятностью γ. Значения β_1 и β_2 называют соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала, а γ - доверительной вероятностью или коэффициентом доверия. Если m_x^* - эмпирическое математическое ожидание нормально распределенной случайной величины с неизвестным истинным математическим ожиданием m_x и известной дисперсией σ^2, то

$$m_x \in \left(m_x^* - \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m_x^* + \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

с вероятностью γ. Величина ε_γ находится по таблицам нормального распределения, как решение уравнения $\Phi(\varepsilon_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. Если при указанных условиях дисперсия σ^2 неизвестна, то используется ее оценка S^2. Таким образом,

$$m_x \in \left(m_x^* - \varepsilon_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; m_x^* + \varepsilon_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

с вероятностью γ. Величина ε_γ находится по таблицам распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, как решение уравнения $P\{|t| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma$.

Проверка гипотез о законе распределения. Эмпирические законы распределения вероятностей случайной величины имеют дискретный характер независимо от того, является ли эта величина дискретной или непрерывной. Кроме того, использование такого закона в различных расчетах оказывается не всегда удобным. В связи с этим возникает задача замены его некоторым теоретическим (аналитическим) законом распределения, который был бы в определенном смысле близким к эмпирическому закону. Эта задача решается с помощью проверки статистической гипотезы следующим образом. По виду гистограммы, полигона или графика эмпирической функции распределения, полученных по данной выборке, по справочникам выбирается подходящий теоретический закон распределения и выдвигается гипотеза о том, что именно этот выбранный закон является истинным законом распределения изучаемой величины. Затем по определенному критерию близости теоретического и эмпирического законов распределений выдвинутая гипотеза принимается или отвергается. Сами критерии близости могут быть различными, поэтому истинность выдвинутой гипотезы можно проверить различным образом.

Одним из наиболее распространенных критериев является критерий χ^2-Пирсона. Вся широта эмпирического распределения разбивается на ℓ частичных интервалов и сравниваются вероятности попадания измеренных значений случайной величины в эти интервалы для случая эмпирического распределения и для случая теоретического распределения. В качестве меры отклонения берется величина

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\left(n_k - np_k\right)^2}{np_k},$$

где n-объем выборки, n_k-число элементов, попавших в k-тый интервал, p_k-вероятность попадания в k-тый интервал, вычисленная на основе теоретического распределения. Вероятности p_k вычисляются по теоретической (гипотетической) функции распределения $F(x)$ или по соответствующей плотности $f(x)$:

$$p_k = F(z_k) - F(z_{k-1}) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,dt,$$

где z_{k-1} и z_k - соответственно левая и правая границы k-ого интервала.

Оказывается, что если гипотеза верна, то величина χ^2 распределена по закону χ^2 с $r = \ell - 1$ степенями свободы. По таблицам этого распределения решается уравнение относительно критического значения χ^2_α величины χ^2:

$$P\left\{\chi^2 > \chi^2_\alpha\right\} = \alpha,$$

где α - малая величина, выбираемая в пределах $0.01 \div 0.1$. Эта величина называется уровнем значимости по смыслу является вероятностью отвергнуть истинную гипотезу. Правило принятия решения основывается на сравнении вычисленного значения величины χ^2 с критическим значением χ^2_α: если $\chi^2 < \chi^2_\alpha$, то гипотеза о соответствии эмпирического и теоретического законов распределения принимается, в противном случае эта гипотеза отвергается.

Если теоретическое распределение содержит неизвестные параметры, то перед вычислением вероятностей p_k, эти параметры (например, математическое ожидание, дисперсия и т.п.) оцениваются по той же самой выборке. В таком случае число степеней свободы r распределения χ^2 уменьшается: $r = \ell - s - 1$, где s - число оцененных параметров. Число частичных интервалов следует брать не менее 8, однако, если для некоторых интервалов при вычислениях оказывается $np_k < 5$, то их нужно объединять с соседними интервалами, чтобы было $np_k \geq 5$ (в ответственных случаях не допускается $np_k < 10$). Общее число интервалов при этом, естественно, сокращается.

Задания для индивидуальных домашних заданий

Задание 1. Выполнить действия, указанные в задаче, пользуясь операциями над событиями и их свойствами.

1. Доказать тождество: $(B+C)\left(B+\overline{C}\right)\left(\overline{B}+C\right)=BC$.

2. Монета бросается до первого появления герба. A_k - событие, состоящее в том, что герб появится при k том броске, B -событие, состоящее в том, что до первого появления герба придется сделать не менее 3 бросков. Выразить событие B через события A_k.

3. Сделано 3 выстрела по мишени. Событие A_k - попадание при k-том выстреле, событие B-две пули попали в мишень. Выразить событие B через события A_k.

4. Упростить выражение: $A\left(\overline{B}+C\right)(A+B)\left(A+\overline{C}\right)$.

5. Брошены две игральные кости. Событие A_i - на 1-ой кости выпало i очков, событие B_k- на 2-ой кости выпало k очков $(i,k=1,2,...,6)$, событие C-сумма выпавших очков равно 10. Выразить событие C через события A_i и B_k.

6. Четверо студентов сдают экзамен по математике. Событие A_k - k-тый студент успешно сдает экзамен, событие B-только три студента смогли успешно сдать экзамен. Выразить событие B через события A_k.

7. Известно, что события A и B несовместны. Чему равно в таком случае выражение $(A+B)(A+C)\left(A+\overline{C}\right)$?

8. Три детали случайным образом размещаются по трем ящикам. Событие A_{ik}- i-тая деталь попадает в k-тый ящик, событие B- 3-ий ящик после размещения деталей оказывается пустым. Выразить событие B через события A_{ik}.

9. Известно, что события A,B,C составляют полную группу событий. Чему в таком случае равно выражение $A+AB+AC+BC+B\overline{A}+C\overline{A}$?

10. Упростить выражение: $\left(\overline{A}+B\right)(A+B)\left(A+\overline{B}\right)$.

11. В коробке находятся красные, синие и желтые шары. Из ящика наудачу извлекают 3 шара. Пусть A_k,B_k,C_k события, состоящие в том, что k-тый извлеченный шар имеет соответственно красный, синий и желтый цвет, а событие D- в числе извлеченных шаров только один красный. Выразить событие D через события A_k,B_k,C_k $(k=1,2,3,4)$.

12. Известно, что $A\subset B$. Чему равно выражение $(AC+A)(BC+A)(C+B)$?

13. Шахматист играет в шахматы со своим партнером 4 партии. Событие A_k-он выигрывает k-тую партию, событие B-всего он

выигрывает 2 партии. Выразить событие B через события A_k $(k=1,2,3,4)$.

14. Доказать тождество: $(B+A)(B+\overline{A})(\overline{B}+A)=AB$.

15. В составе установки 2 блока одного типа и 3 блока второго типа. Событие A_i - исправлен i-тый блок 1-ого типа $(i=1,2)$, B_k-исправлен k-тый блок 2-ого типа $(k=1,2,3)$, событие D- установка работоспособна. Выразить событие D через A_i и B_k, если установка работоспособна в случае исправности хотя бы одного блока первого типа и хотя бы двух – второго типа.

16. Упростить выражение: $C(\overline{B}+C)(A+B)(B+\overline{C})$.

17. Монета бросается 4 раза. A_k - событие, состоящее в том, что герб появится при k-том броске, B- событие, состоящее в том, что герб появится 3 раза. Выразить событие B через события A_k.

18. Известно, что события A и B несовместны. Чему равно в таком случае выражение $(A+\overline{B})(A+C)(A+C)$?

19. Брошены 2 игральные кости. Событие A_i-на 1-ой кости выпало i очков, событие B_k-на 2-ой кости выпало k очков $(i,k=1,2,...,6)$, событие C-произведение выпавших очков равно 12. Выразить событие C через события A_i и B_k.

20. В коробке находятся красные, синие и желтые шары. Из ящика наудачу извлекают 3 шара. Пусть A_k, B_k, C_k события, состоящие в том, что k-тый извлеченный шар имеет соответственно красный, синий и желтый цвет, а событие D- в числе извлеченных шаров только один красный. Выразить событие D через события A_k, B_k, C_k $(k=1,2,3,4)$.

21. Известно, что события A,B,C составляют полную группу событий. Чему в таком случае равно выражение $B+AB+AC+BC+A\overline{B}+C\overline{B}$?

22. Шахматист играет в шахматы со своим партнером 3 партии. Событие A_k-он выигрывает k-тую партию, событие B-всего он выигрывает одну партию. Выразить событие B через события A_k $(k=1,2,3)$.

23. Известно, что $A\subset B$. Чему равно выражение $(AB+B)(AC+B)(A+C)$?

24. Трое студентов сдают экзамен по математике. Событие A_k - k-тый студент успешно сдает экзамен, событие B-только один студент

сможет успешно сдать экзамен. Выразить событие B через события A_k.

25. Доказать тождество: $(B+C)(B+\overline{C})(\overline{B}+C)=BC$.

Задание 2. Вычислить вероятности событий, указанных в тексте.

1. За круглым столом сидят 5 мужчин и 5 женщин. Какова вероятность того, что два лица одинакового пола не сидят рядом, если места занимались случайно?

2. На столе лежат 20 экзаменационных билетов с номерами 1,2,…,20. Преподаватель берет 3 любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырех?

3. Имеется 6 отрезков, длины которых равны соответственно 2,4,6,8,10,12 единицам. Найти вероятность того, что с помощью взятых наугад трех отрезков можно построить треугольник.

4. Пять студентов из групп изучают английский язык, шесть студентов – немецкий и семь студентов – французский язык. Случайным образом выбрано четыре студента. Какова вероятность того, что двое из них изучают английский язык, один изучает французский и один – немецкий?

5. На семи карточках написаны цифры от 1 до 7. Наудачу извлекают две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет четной?

6. В мастерскую для ремонта поступило 10 телевизоров, из которых 3 нуждаются в общем ремонте. Мастер берет первые попавшие 5 штук. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общем ремонте?

7. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет одинаковое число очков на обеих костях, и вероятность того, что на обеих костях выпадет четное число очков.

8. Из полной колоды карт (52 карты) вынимается наугад три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семерка и туз.

9. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что номер телефона случайно выбранного абонента не содержит одинаковых цифр.

10. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые разбиваются на две группы по 10 человек. Определить вероятность того, что четыре наиболее сильных игрока разделятся между группами поровну.

11. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

12. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе имеет все цифры разные? Какова вероятность того, что все цифры будут одинаковыми?

13. Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что число черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

14. На полке лежат 15 учебников, из них 7 – по математике. Студент наудачу берет три учебника. Какова вероятность того, что все взятые учебники – учебники по математике?

15. Игральная кость бросается два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков будет не менее 7 и не более 10?

16. В урне 2 белых и 4 черных шара. Из урны парами последовательно извлекают все шары. Какова вероятность того, что в последней паре оба шара будут черными?

17. Студент знает 15 из 20 вопросов учебной программы. На экзамене предлагается ответить на 3 вопроса, которые выбираются случайным образом. Какова вероятность того, что студент сможет ответить на предложенные вопросы?

18. Отрезок прямой, длина которого равна 2, делится случайным образом на 3 части. Определить вероятность того, что из полученных частей можно построить треугольник.

19. Спортивная команда состоит из 20 спортсменов, из которых 5 боксеров, 7 штангистов и 8 борцов. Для беседы с журналистом было выбрано случайным образом 3 срорсмена. Определить вероятность того, что выбранные спортсмены представляют различные виды спорта.

20. На восьми карточках написаны цифры от 1 до 8. Наудачу извлекают две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет не менее 12?

21. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет не более чем 10.

22. Какая из цифр 1,3,5,6 и 8 написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что полученное число будет делится на 4?

23. Наугад выбирается двухзначное число. Определить вероятность того, что сумма цифр этого числа является простым числом.

24. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность того, что среди них окажется три кости с шестью очками?

25. Группа, состоящая их 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

Задание 3. Вычислить вероятности событий, указанных в тексте.

1. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров равна 11?

2. В случайный момент времени $X \in [0,T]$ появляется радиосигнал длительностью t_1. В случайный момент времени $Y \in [0,T]$ включается приемник на время $t_2 < t_1$. Найти вероятность обнаружения сигнала, если приемник настраивается мгновенно.

3. Две игральные кости бросаются один раз. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков является простым числом.

4. Моменты времени прихода двух пароходов являются независимыми и равновозможными в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода – четыре часа, а второго – два часа.

5. Даны две концентрические окружности радиусов $r_1 = 2,\ r_2 = 1$. На большей окружности наудачу ставятся две точки A и B. Какова вероятность того, что отрезок AB не пересечет малую окружность?

6. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что произведение номеров вынутых шаров будет не меньше 20?

7. Найти вероятность того, что при случайном размещении 3 шаров по 3 ящикам один ящик останется пустым.

8. Из отрезка $[-1;2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а модуль разности меньше единицы?

9. Два лица условились встретится в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течении 15 минут, после его уходит. Определить вероятность того, что встреча состоится, если каждый может прибыть на место встречи в любой момент в течении указанного часа, а моменты времени их прихода независимы.

10. Бросаются три игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 12.

11. На отрезке длиной d наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет меньше $0,5d$?

12. Два игрока по очереди бросают игральную кость, каждый по одному разу. Выигравшим считается тот, кто получит большее число очков. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

13. Из отрезка $[0;2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма меньше 3, а модуль разности больше единицы?

14. На отрезке длинной $2d$ наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет больше d?

15. Зенитная батарея, состоящая из 4 орудий, производит залп по группе, состоящей из 4 самолетов. Каждое орудие выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Какова вероятность того, что все орудия выстрелят по разным самолетам?

16. Код кодового замка состоит из трех цифр. Некто, не зная кода, стал на удачу пробовать различные комбинации трех цифр. На каждую попытку он тратит по 20 секунд. Какова вероятность того, что замок будет открыт за один час?

17. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся на расстоянии $2d$ друг от друга. На плоскость на удачу бросается монета радиуса $r<d$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной прямой.

18. В группе из 20 студентов 5 являются отличниками, 9 – хорошистами и 6 студентов наудачу выбирает четырех студентов из этой группы. Какова вероятность того, что среди выбранных окажется один отличник, два хорошиста и один студент, обучающийся на оценку удовлетворительно?

19. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

20. На отрезке AB длиной d поставлены наудачу две точки L и M. Найти вероятность того, точка L окажется ближе к точке A, чем к точке M.

21. Колода карт (36 карт) делится пополам. Найти вероятность того, что в одной пачке черных карт будет в 2 раза больше, чем красных.

22. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

23. Из колоды карт (36 карт) вынимается наудачу три карты. Определить вероятность того, что вынутыми картами будут дама, семерка и туз?

24. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата d бросается наудачу монета радиуса r, $2r<d$. Найти вероятность того, что монета целиком попадет внутрь одного квадрата.

25. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (предполагается , что день рождения каждого человека с равными вероятностями может приходится на любой месяц года).

Задание 4. Вычислить вероятность событий, пользуясь формулами сложения и (или) умножения вероятностей.

1. Три стрелка одновременно делают по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена только одной пулей, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6?
2. В классе учатся 10 мальчиков и 8 девочек. По жребию выбирают 5 учеников этого класса. Какова вероятность того, что среди них окажутся не менее трех девочек?
3. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают по одному шару (без возвращения). Найти вероятность вынуть первым белый шар каждому из участников.
4. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны наугад извлекают 4 шара. Какова вероятность того, что среди них будет хотя бы два черных шара?
5. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, который первым в результате получит орла. Какова вероятность того, что игра закончится не позднее, чем после второго бросания монеты вторым игроком?
6. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,9. Вычислить вероятность двух попаданий при одном залпе из всех орудий.
7. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что среди трех наудачу выбранных билетов будет не менее двух выигрышных.
8. Чтобы получить положительную оценку на экзамене студент должен ответить по меньшей мере на три вопроса из предложенных пяти. Какова вероятность того, что студент успешно выдержит экзамен, если он знает 20 из 30 вопросов программы?
9. В ящике 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что хотя бы две детали из взятых будут окрашенными.
10. Автобусный маршрут обслуживается тремя автобусами. Вероятности возникновения неисправностей автобусов на маршруте в течении смены равны соответственно: 0,2; 0,1; 0,08. Определить

вероятность того, что в течении смены неисправность возникнет только у одного автобуса.

11. Три баскетболиста производят по одному броску мяча. Вероятность попадания мяча в корзину для первого, второго и третьего баскетболиста равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что удачными будут только два броска.

12. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его не знает. Какова вероятность того, что он сдаст зачет?

13. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий вызов – 0,4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов.

14. В ящике 12 деталей, среди которых 8 высшего качества. Сборщик последовательно наудачу извлекает из ящика по одной детали до первого появления детали высшего качества. Найти вероятность того, что будет произведено не более трех извлечений.

15. В ящике имеются 10 монет по 20 копеек, 5 монет по 15 копеек и 2 монеты по 10 копеек. Наугад берется 6 монет. Какова вероятность того, что в сумме они составят не более одного рубля?

16. В двух урнах находятся шары, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

17. Вероятность улучшить свой предыдущий результат с одной попытки для данного спортсмена равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

18. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,3. Найти вероятность того, что всего будет сделано 2 или 3 выстрела.

19. В лотерее выпущено 100 билетов, из которых 20 – выигрышные. Куплено 5 билетов. Какова вероятность того, что среди купленных билетов не менее двух являются выигрышными?

20. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью 0,8, а третий судья решения бросает монету. Окончательное решение жюри

принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

21. Пять студентов группы изучают английский язык, шесть студентов – немецкий и семь студентов – французский. Случайным образом выбрано три студента. Какова вероятность того, что два из них изучают один и тот же иностранный язык?

22. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,3, для второго – 0,4, для третьего – 0,6. Для разрушения цели требуется хотя бы два попадания. Какова вероятность того, что при одном залпе из всех орудий цель будет разрушена?

23. Три стрелка одновременно делают по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена не менее, чем двумя пулями, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6, для третьего – 0,8?

24. Для стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,3 а для второго – 0,4. Найти вероятность того, что мишень будет поражена первым стрелком.

25. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, который первым в результате получит орла. Какова вероятность того, что выиграет игрок, бросающий монету первым?

Задание 5. Вычислить вероятности событий, пользуясь формулой полной вероятности и (или) формулой Байеса.

1. На заводе 30 % деталей производится цехом № 1, 45 %-цехом №2 и 25% - цехом №3. Вероятность изготовления бракованной детали для 1-ого цеха равна 0,05, для 2-ого – 0,01, для 3-его – 0,04. Определить вероятность того, что эта деталь была изготовлена 1-ым заводом.

2. Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым охотником, если вероятности попадания для охотников равны соответственно 0,4; 0,35 и 0,3.

3. В урне находится два белых и четыре черных шара. Из урны извлекают два шара, цвет которых остается неизвестным, и откладывают их в сторону, после чего вынимают третий шар. Определить вероятность того, что этот шар белый.

4. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

5. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10% и третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго и 50% - с третьего?

6. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает $\alpha\,\%$ брака, а второй - $\beta\,\%$. Для контроля отобрано n_1 деталей из первого цеха и n_2 из второго. Эти n_1+n_2 деталей смешаны в одну партию, из нее наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

7. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

8. В тире имеется 5 ружей, вероятность попадания из которых равна 0,5, три ружья с вероятностью попадания 0,7 и два ружья с вероятностью попадания 0,8. Определить вероятность попадания в мишень при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

9. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в первой партии 2/3 деталей бракованные, во второй – 1/3, а в третьей – все детали доброкачественные?

10. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

11. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для 1-ого станка составляет 0,03, для 20ого – 0,02. Обработанные детали поступают на общий конвейер. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась без брака. Определить вероятность того, что эта деталь была обработана на первом станке.

12. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, а во второй – 5 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую переложили один шар, после чего из второй урны извлекли один шар, оказавшийся белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар?

13. Группа из 15 спортсменов стрелков включает 3 мастера спорта, 6 кандидатов в мастера и 6 перворазрядников. Вероятности поражения мишени для спортсменов равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Наудачу

выбранный стрелок сделал выстрел и поразил мишень. Какова вероятность того, что этот стрелок является мастером спорта?

14. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок попал в цель, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны 0,6; 0,5 и 0,4.

15. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Вероятность поражения цели при одном попадании равна 0,1, при двух попаданиях – 0,3, при трех попаданиях – 0,6. Произведено три выстрела, в результате которых цель была поражена. Каково наиболее вероятное число попаданий?

16. В партии из 5 изделий количество бракованных изделий может быть любым с одинаковой вероятностью. Из партии взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно, если принять во внимание результат этого опыта?

17. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, а во второй 4 белых и 6 черных. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят одни шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

18. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 3000.

19. В трех одинаковых коробках находится по 10 деталей, включая бракованные. В первой коробке – 2 детали бракованные, а во второй – 3, в третьей – 1. Некто выбирает наугад одну из коробок и наудачу берет из нее деталь. Какова вероятность того, что эта деталь окажется бракованной?

20. В сосуд, содержавший 5 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность, действуя наудачу, вынуть белый шар из этого сосуда? Все предположения о первоначальном составе шаров считаются одинаково возможными.

21. Радиолампа может принадлежать к одно из трех партий с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

22. Определить вероятность того, что из 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число

испорченных лампочек на 1000 штук может быть равным от 0 до 5 с одинаковой вероятностью.

23. В продажу поступают телевизоры трех видов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 8% и третьего – 5%. Приобретенный телевизор оказался без дефектов. какова вероятность того, что этот телевизор был изготовлен на первом заводе, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго и 50% - с третьего?

24. В тире имеется 5 оружий, вероятность попадания из которых равна 0,5, три ружья с вероятностью попадания 0,7 и два ружья с вероятностью попадания 0,8. Сделан выстрел из наудачу взятого ружья, при этом зафиксировано попадание в цель. Определить вероятность того, что это ружье принадлежало первой группе.

25. Известно, что 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,9 и нестандартную – с вероятностью 0,08. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

Задание 6. Вычислить вероятность событий, пользуясь формулой Бернулли, следствиями из нее, или ее асимптотическими приближениями.

1. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью 0,99 получить хотя бы один отказ?

2. Вероятность изготовления детали отличного качества равна 0,8. Какова вероятность того, что среди 10 деталей не менее 9 отличного качества?

3. Если в среднем левши составляют 1%, то какова вероятность того, что среди 200 человек окажется четверо левшей? Какова вероятность среди 200 человек обнаружить не менее 4 левшей?

4. В семье 8 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) имеется 4 мальчика; б) число мальчиков не менее 2 и не более 6. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,5.

5. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых испытаниях равна 0,59. Какова вероятность появления события при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

6. Батарея дала 14 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий и его вероятность. Определить вероятность

разрушения объекта, если для его разрушения требуется не менее 4 попаданий.

7. В некотором обществе имеется 1% дальтоников. Каков должен быть объем случайной выборки (с возвращением), чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одного дальтоника была не менее 0,95?

8. Игральная кость бросается 6 раз. Найти вероятность того, что хотя бы два раза появится число очков, кратное трем.

9. Вероятность попадания в цель равна 0,2. Сбрасывается одиночно 7 бомб. Найти вероятность того, что будет а) не менее 6 попаданий; б) не менее 2 попаданий.

10. На отрезок $[0;10]$ наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в отрезок $[0;2]$, одна – в $[2;3]$, две – в $[3;10]$.

11. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами, если сделано 5000 выстрелов.

12. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 8 точек, брошенных наудачу в круг, три попадут в квадрат, две – в один сегмент, три – в оставшиеся три сегмента?

13. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,02. Найти вероятность того, что среди 100 деталей бракованных окажется не менее 2 и не более 4.

14. Игральная кость бросается 6480 раз. Найти вероятность того, что число выпадений одного очка будет заключено между 1065 и 1140.

15. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой объектов, состоящей 10 единиц. Каждый из объектов может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что не менее двух объектов будут потеряны.

16. Прибор состоит из 8 однотипных элементов, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее 6 из них. Каждый из элементов за время t работы прибора выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что прибор откажет за время t.

17. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0.005. Найти вероятность того, что, имея 100 билетов, можно выиграть по двум из них.

18. Тестовый билет содержит 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается два варианта ответа, из каждых один является правильным. Для получения зачета нужно правильно ответить не менее, чем на три вопроса. Какова вероятность того, что некто, выбирая ответы наудачу, может получить зачет?

19. Вероятность хотя бы одного выигрыша по 5 лотерейным билетам равна 0,1. Какова вероятность выигрыша по одному билету, если предполагать, что для всех билетов эта вероятность одинакова?

20. Доля изделий первого сорта в общем объеме продукции завода составляет 70%. Какова вероятность того, что из отобранных 2100 изделий окажется от 1449 до 1512 изделий первого сорта?

21. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы вероятность появления среди них цифры, кратной трем, была не менее 0,9?

22. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие появится в большинстве из 150 опытов?

23. Вероятность изготовления детали отличного равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 8 деталей не более 6 отличного качества?

24. Батарея дала 10 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,3. Найти а) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность; б) вероятность разрушения объекта, если для его разрушения требуется не менее 3 попаданий.

25. Шахматист играет в шахматы со своим партнером 4 партии. Вероятность выиграть партию равна для этого шахматиста 0,4. Найти вероятность того, что он выиграет не более 2 и не менее 3 партий.

Задание 7. Дискретная случайная величина X задана таблично. Найти математическое ожидание m_x, дисперсию D_x, среднее квадратическое отклонение σ_x.

1

x	10	10,1	10,3	10,6	11
p	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

2

x	10,1	10,2	10,4	10,7	11,1
p	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1

3

x	10,3	20,3	20,7	21,3	22,1
p	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

4

x	10,6	20,6	21	21,6	22,4
p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

5

x	11	21	21,4	22	22,8
p	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

6

x	11,5	21,5	21,9	22,5	23,3
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

7

x	12,1	22,1	22,5	23,1	23,9
p	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

8

x	12,8	22,8	23,2	23,8	24,6
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

9

x	13,6	23,6	24	24,6	25,4
p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

10

x	14,5	24,5	24,9	25,5	26,3
p	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

11

x	15,5	25,5	25,9	26,5	27,3
p	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

12

x	16,6	26,6	27	27,6	28,4
p	0,1	0,5	0,1	0,2	0,1

13

x	17,8	27,8	28,2	28,8	29,6
p	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1

14

x	19,1	29,1	29,5	30,1	30,9
p	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5

15	x	20,5	30,5	30,9	31,5	32,3
	p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

16	x	20,4	30,4	30,8	31,4	32,2
	p	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

17	x	20,2	30,2	30,6	31,2	32
	p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

18	x	19,9	29,9	30,3	30,9	31,7
	p	0,3	0,3	0,2	0,1	01,

19	x	19,5	29,5	29,9	30,5	31,3
	p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

20	x	19	29	29,4	30	30,8
	p	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

21	x	18,4	28,4	28,8	29,4	30,2
	p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

22	x	17,7	27,7	28,1	28,7	29,5
	p	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

23	x	16,9	26,9	27,3	27,9	28,7
	p	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2

24	x	16	26	26,4	27	27,8
	p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

25	x	15	25	25,4	26	26,8
	p	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

Задание 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения (задачи 1 – 14) или плотностью распределения вероятностей (задачи 15 – 25). Требуется: а) найти плотность распределения (1 – 14) или функцию распределения вероятностей (15 – 25); б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, скошенность и экспресс распределения; вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на одну четвертую длины всего интервала возможных значений этой величины; в) построить графики функций распределения и плотности распределения вероятностей.

1. $$F(x)=\begin{cases}0, \ при \ x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \ при \ 0<x\le 2,\\ 1, \ при \ x>2.\end{cases}$$

2. $$F(x)=\begin{cases}0, \ при \ x\le \dfrac{3}{4},\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}, \ при \ \dfrac{3}{4}<x\le 1,\\ 1, \ при \ x>1.\end{cases}$$

3. $$F(x)=\begin{cases}0, \ при \ x\le 1,\\ 2-\dfrac{2}{x}, \ при \ 1<x\le 2,\\ 1, \ при \ x>2.\end{cases}$$

4. $$F(x)=\begin{cases}0, \ при \ x\le 0,\\ 2\sin x, \ при \ 0<x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 1, \ при \ x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

5. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ e^x-1, \ \textit{при} \ 0<x\le \ln 2,\\ 1, \ \textit{при} \ x>\ln 2.\end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \sqrt{x}, \ \textit{при} \ 0<x\le 1,\\ 1, \ \textit{при} \ x>1.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le \dfrac{\pi}{4},\\ -\cos 2x, \ \textit{при} \ \dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, \ \textit{при} \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ 2\sin\dfrac{x}{2}, \ \textit{при} \ 0<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 1, \ \textit{при} \ x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8}, \ \textit{при} \ 0<x\le 2,\\ 1, \ \textit{при} \ x>2.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{27}, \ \textit{при} \ 0<x\le 3,\\ 1, \ \textit{при} \ x>3.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 1,\\ \ln x, \ \textit{при} \ 1<x\le e,\\ 1, \ \textit{при} \ x>e.\end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ e^{2x}-1, \ \textit{при} \ 0<x\le \ln\sqrt{2},\\ 1, \ \textit{при} \ x>\ln\sqrt{2}.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, \ \textit{при} \ 0<x\le 4,\\ 1, \ \textit{при} \ x>4.\end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 2,\\ \ln\dfrac{x}{2}, \ \textit{при} \ 2<x\le 2e,\\ 1, \ \textit{при} \ x>2e.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0 \ \textit{или} \ x>\dfrac{\pi}{4},\\ 2\cos 2x, \ \textit{при} \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0 \ \textit{и} \ x>2,\\ \dfrac{x}{2}, \ \textit{при} \ 0<x\le 2.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0 \ \textit{и} \ x>3,\\ \dfrac{x^2}{9}, \ \textit{при} \ 0<x\le 3.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 1 \ \textit{и} \ x>e,\\ \dfrac{2}{x}, \ \textit{при} \ 1<x\le \sqrt{e}.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0 \ \textit{и} \ x>1,\\ \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, \ \textit{при} \ 0<x\le 1.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при} \ x\le 0 \ \textit{и} \ x>3,\\ \dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{x}{3}\right), \ \textit{при} \ 0<x\le 3.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 0, \ при \ x \le \dfrac{3}{4} \ и \ x>1, \\ \dfrac{6}{x^3}-\dfrac{4}{x^2}, \ при \ \dfrac{3}{4}<x\le 1. \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} 0, \ при \ x \le 0 \ и \ x>\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos\dfrac{x}{2}, \ при \ 0<x\le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} 0, \ при \ x \le 0 \ и \ x>1, \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \ при \ 0<x\le 1. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} 0, \ при \ x \le 0 \ и \ x>\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \ при \ 0<x\le \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 0, \ при \ x \le 0 \ и \ x>4, \\ \dfrac{3x^2}{64}, \ при \ 0<x\le 4. \end{cases}$

Задание 9. По данной выборке случайной величины X (табл.1) вычислить все основные эмпирические характеристики: математическое ожидание m_x^*, дисперсию D^*, несмещенную дисперсию S^2, среднее квадратическое отклонение σ_x^*, построить доверительный интервал для m_x^* (см. прил.).

Задание 10. По представленной выборке построить полигон и гистограмму. Подобрать подходящий теоретический закон распределения вероятностей и проверить гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения выбранному теоретическому при уровне значимости $\alpha = 0,05$ (см. прил.).

Пример выполнения индивидуальных домашних заданий

Задание 1. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, B_k $(k=1,2,3,4)$ - исправность k-ого котла, а $C_j\,(j=1,2)$-исправность j-той турбины. Событие D - судно управляемое, что будет в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и $\overline{D}$ через события $A,\ B_k,\ C_j$.

Решение. Пусть событие E означает исправность хотя бы одного котла, а событие F - исправность хотя бы одной турбины. Тогда, в соответствии с определением операции суммы событий, можно записать:

$$E = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \text{ и } F = C_1 + C_2 .$$

С другой стороны, событие D происходит тогда и только тогда, когда происходят и A и E и F одновременно, что соответствует произведению этих событий, а событие $\overline{D}$ выполняется тогда и только тогда, когда не происходит хотя бы одно из этих событий, что соответствует сумме противоположных событий.

Таким образом,

$$D = A \cdot E \cdot F \text{ и } \overline{D} = \overline{A} + \overline{E} + \overline{F}.$$

Учитывая, что $\overline{E} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \cdot \overline{B_4}$ и $\overline{F} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$, получим окончательно:

$$D = A \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \cdot (C_1 + C_2), \ \overline{D} = \overline{A} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \cdot \overline{B_4} + \overline{C_1} + \overline{C_2}.$$

Задание 2. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2 ,4, 6, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что полученная дробь сократима. Воспользуемся классическим определением вероятности: $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где N - общее число исходов опыта, а N_A - число исходов, которые приводят к осуществлению события A. Так как порядок извлечения карточек в данном случае не имеет значения (например, 2, 7 и 7, 2 являются неразличимыми комбинациями по условиям опыта), то подсчет числа исходов опыта делается по формуле для числа сочетаний. Дробь будет сократимой, если два полученных числа принадлежат множеству из 5 чисел (2, 4, 6, 8, 12), которые имеют хотя бы один общий делитель. Числа 7, 11, 13 являются простыми, и их появление среди выбранных двух не приведет к осуществлению A. Таким образом,

$$N = C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28; \ N_A = C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10; \ P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

Задание 3. На отрезке AB длиной d наудачу поставлены две токи L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

Решение. Пусть x_1 и x_2 есть соответственно координаты точек L и M на числовой оси, при условии, что точка A отрезка совмещена с началом отсчета (рис. 4). Тогда область D возможных исходов опыта будет определяться следующими неравенствами: $0 \le x_1 \le d$ и $0 \le x_2 \le d$. Если по оси абсцисс будем откладывать x_1, а по оси ординат - x_2, то эта область будет представлять собой квадрат со стороной d. Пусть C - событие, состоящее в том, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A. Область D_C значений x_1 и x_2, которые приводят к осуществлению события C, определяется неравенством: $|x_1 - x_2| < x_1$ или, $-x_1 < x_1 - x_2 < x_1$. Из этих неравенств находим границы области D_C, полагая $x_1 - x_2 = -x_1$ и $x_1 - x_2 = x_1$. Эти уравнения определяют прямые линии $x_2 = 2x_1$ и $x_2 = 0$, вторая из которых совпадает с осью абсцисс. Таким образом, событие C осуществится, если $0 < x_2 < 2x_1$.

Воспользуемся геометрическим определением вероятности события. В данном случае мерой множества исходов опыта является площади соответствующих областей.

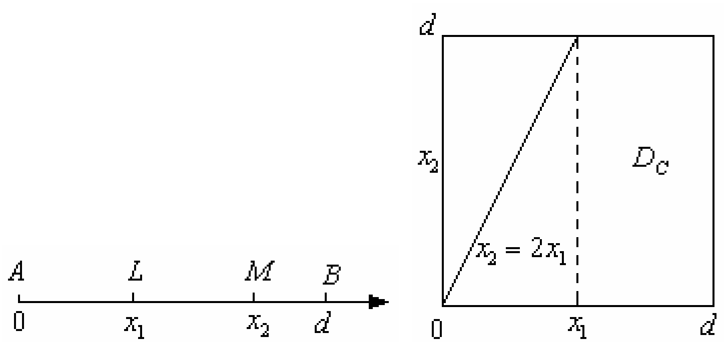


Рис. 4 Иллюстрация к заданию 3.

Из рис. 2 видно, что площадь области D равна d^2, а площадь области D_C составляет величину $0,75d^2$. Следовательно,

$$P(C) = \frac{mes(D_C)}{mes(D)} = \frac{0,75d^2}{d^2} = 0,75 \cdot$$

Задание 4. Двое поочередно стреляют по мишени до первого попадания, причем имеется всего 6 пуль. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,4. Определить вероятность того, что а) мишень будет поражена первым стрелком; б) мишень будет поражена вторым стрелком; с) мишень не будет поражена.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что мишень будет поражена первым стрелком, B - мишень поражена вторым стрелком, C - мишень не будет поражена. Введем дополнительно следующие события: A_k - первый стрелок попадет при своем k-том выстреле, B_k - второй стрелок попадет при k-том выстреле, $k = 1,2,3$ (так как всего можно сделать не более 6 выстрелов). Событие A может произойти в трех возможных ситуациях: или A_1, или $\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2$, или $\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3$.

Это означает, что первый стрелок может поразить мишень или первым выстрелом, или вторым, или третьим. Таким образом,

$$A = A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3 .$$

Слагаемые в этой сумме являются несовместными событиями. Поэтому

$$P(A) = P(A_1) + P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3\right) .$$

Вероятность произведения событий в этом выражении равна произведению вероятностей перемноженных событий, так как результат каждого выстрела не зависит от того, что произошло при других выстрелах. Учитывая, что

$$P(A_k) = 0,3; P(B_k) = 0,4; P\left(\overline{A_k}\right) = 0,7; P\left(\overline{B_k}\right) = 0,6; \quad (k = 1,2,3),$$

получим:

$$P(A) = P(A_1) + P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{B_1}\right) P(A_2) + P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{B_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) P\left(\overline{B_2}\right) P(A_3) =$$

$$= 0,3 \cdot \left[1 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot [1 + 0,7 \cdot 0,6]\right] = 0,3 \cdot [1 + 0,42 \cdot 1,42] \approx 0,479 .$$

Второй стрелок также может поразить мишень или при первом, или при втором, или при третьем выстреле. Однако, он имеет право на очередной выстрел тогда, когда все предыдущие выстрелы были неудачными. Рассуждения, подобные изложенным выше, приводят к следующему результату:

$$P(B) = P\left(\overline{A_1}\right) P(B_1) + P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{B_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) P(B_2) + P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{B_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) P\left(\overline{B_2}\right) P\left(\overline{A_3}\right) P(B_3) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,4 \cdot \left[1 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot [1 + 0,7 \cdot 0,6]\right] \approx 0,447 .$$

Наконец, очевидно, что $C = \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{B_3}$, т.е. все 6 выстрелов были неудачными. Тогда

$$P(C) = P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{B_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) P\left(\overline{B_2}\right) P\left(\overline{A_3}\right) P\left(\overline{B_3}\right) = [0,7 \cdot 0,6]^3 \approx 0,074 .$$

Заметим, что события A, B, C являются несовместными и составляют полную группу событий, т.е. $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Этим можно было воспользоваться при вычислении $P(C)$.

Задание 5. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что было два попадания, событие B - первый стрелок попал в цель, событие C - второй стрелок попал в цель. Событие A может произойти при двух предположениях: третий стрелок попал в цель – гипотеза H_1 или третий стрелок промахнулся – гипотеза H_2. Априорные вероятности (до опыта) этих гипотез известны: $P(H_1)=\frac{2}{3}$ и $P(H_2)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Если верна гипотеза H_1, то событие A может произойти только тогда, когда один из двух стрелков промахнется. Если же верна гипотеза H_2, то событие A произойдет лишь в том случае, когда будет попадание у первого и второго стрелков. Следовательно,

$$P(A\mid H_1)=P\left(B\overline{C}+\overline{B}C\right)=P\left(B\overline{C}\right)+P\left(\overline{B}C\right)=P(B)P\left(\overline{C}\right)+P\left(\overline{B}\right)P(C),$$

$$P(A\mid H_1)=P(BC)=P(B)P(C),$$

так как события $B\overline{C}$ и $\overline{B}C$ несовместны, а события B и C являются статистически не зависимыми. Воспользуемся исходными данными, получим:

$$P(A\mid H_1)=\frac{4}{5}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{3}{4}=\frac{7}{20},\ P(A\mid H_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{20}.$$

Вычислим $P(A)$ по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(A\mid H_1)P(H_1)+P(A\mid H_2)P(H_2)=\frac{7}{20}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{20}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{30}.$$

Наконец, вычислим искомую вероятность $P(H_2\mid A)$:

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(A\mid H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{12}{20}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{13}=\frac{6}{13}.$$

Заметим, что эту задачу можно решить другим образом. Так как было только два попадания, то кто-то один промахнулся. Это может быть первый стрелок – гипотеза H_1, второй – гипотеза H_2 или третий – гипотеза H_3. Рекомендуется разобрать эту задачу, исходя из указанных гипотез. Естественно, ответ должен получиться тот же самый.

Задание 6. Проводится 6 испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью $p=0,4$. Найти вероятности того, что событие A произойдет: а) два раза; б) – хотя бы два раза. Определить, сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей, чем 0,98, событие произошло хотя бы один раз.

Решение. Пусть B - событие, состоящее в том, что A произошло два раза, событие C - A произойдет хотя бы два раза. Очевидно, имеет место схема независимых последовательных испытаний при $n=6,\ p=0,4,\ q=0,6$. Тогда вероятность события B определяется непосредственно формулой Бернулли:

$$P(B)=P\{k=2\}=p_n(2)=C_6^2p^2q^4=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 0,4^2\cdot 0,6^4=15\cdot 0,16\cdot 0,1296\approx 0,311\cdot$$

Вероятность события C удобнее, очевидно, вычислять через вероятность противоположного события:

$$P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-P\{k<2\}=1-P\{k=0\}-P\{k=1\}=1-C_6^0p^0q^6-C_6^1p^1q^5=$$

$$=1-0,6^6-6\cdot0,4\cdot0,6^5\approx1-0,047-0,187=0,766\,.$$

Для ответа на последний вопрос задачи достаточно воспользоваться известной формулой:

$$n\geq\frac{\left|\ln(1-P)\right|}{\left|\ln(1-P)\right|}=\frac{\left|\ln(1-0,98)\right|}{\left|\ln(1-0,4)\right|}=\frac{\left|\ln(0,02)\right|}{\left|\ln(0,6)\right|}\approx\frac{\left|-3,912\right|}{\left|-0,511\right|}\approx7,656\,\cdot$$

Так как n должно быть целым числом, то следует взять $n=8$. Таким образом, если испытание провести 8 раз, то с вероятностью $P=0,98$ событие A произойдет хотя бы один раз.

Задание 7. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения вероятностей случайной величины.

Таблица 2

x	9,2	9,8	10,2	10,8	11,6
p	0,1	0,2	0,4	0.2	0,1

Решение. Найдем сначала начальные моменты v_k случайной величины X:

$$v_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i=9,2\cdot0,1+9,8\cdot0,2+10,2\cdot0,4+10,8\cdot0,2+11,6\cdot0,1=10,28\,;$$

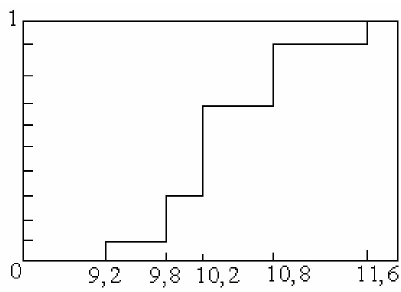
$$v_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i=9,2^2\cdot0,1+9,8^2\cdot0,2+10,2^2\cdot0,4+10,8^2\cdot0,2+11,6^2\cdot0,1=106,072\,\cdot$$

Таким образом, математическое ожидание равно $m_x=v_1=10,28$. Дисперсию определим через начальные моменты:

$$D_x=v_2-v_1^2=106,072-10,28^2=106,072-105,6784=0,3936\,.$$

Среднее квадратическое отклонение равно: $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{0,3936}\approx0,627$.

График функции распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет горизонтальные участки между точками ее возможных значений. Изменение значения функции происходит скачком в точках возможных значений. График функции и ее аналитическое выражение представлена на рис. 5.



$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{когда}\ x\le 9,2;\\ 0,1,\ \text{когда}\ 9,2<x\le 9,8;\\ 0,3,\ \text{когда}\ 9,8<x\le 10,2;\\ 0,7,\ \text{когда}\ 10,2<x\le 10,8;\\ 0,9,\ \text{когда}\ 10,8<x\le 11,6;\\ 1,0,\ \text{когда}\ x>11,6.\end{cases}$$

Рис. 5 График и аналитическое выражение функции распределения вероятности

Задание 8. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей. Требуется: а) найти функцию распределения вероятностей; б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, скошенность и экспресс распределения, вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на 0,5; в) построить функции распределения и плотности распределения вероятностей.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ x\le 2,\\ 4x\cdot e^{-2x},\ \text{при}\ x>0.\end{cases}$$

Решение. Найдем функцию распределения $F(x)$. Если $x\le 0$, то $f(t)=0$ для $t\in(-\infty<t\le x)$. Следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$. Если $x>0$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int\limits_{0}^{x}4t\cdot e^{-2t}dt=\left|z=2t,\ dz=2dt\right|=\int\limits_{0}^{2x} z\cdot e^{-z}dz=$$

$$=\begin{vmatrix}u=z & dv=e^{-z}dz\\ du=dz & v=-e^{-z}\end{vmatrix}=-z\cdot e^{-z}\,\Big|_0^{2x}+\int\limits_{0}^{2x}e^{-z}dz=-2x\cdot e^{-2x}-e^{-z}\,\Big|_0^{2x}=1-(1+2x)e^{-2x}.$$

Здесь сначала сделана замена переменной, затем применен метод интегрирования по частям. Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ x\le 0,\\ 1-(1+2x)\cdot e^{-2x},\ \text{при}\ x>0.\end{cases}$$

Найдем начальные моменты случайной величины:

$$v_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{\infty}x^k\cdot 4x\cdot e^{-2x}dx=\left|z=2x, dz=2dx\right|=\frac{1}{2^k}\int\limits_{0}^{\infty}z^{k+1}\cdot e^{-z}dz=\frac{(k+1)!}{2^k}.$$

Последний интеграл берется путем последовательного интегрирования по частям $(k+1)$ раз. Значение этого интеграла можно также найти в справочниках по определенным интегралам. Таким образом,

$$v_1 = 1,\ v_2 = \frac{3}{2},\ v_3 = 3,\ v_4 = \frac{15}{2}.$$

Вычислим центральные моменты (заметим, что $\mu_1 = 0$ всегда):

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},\ \mu_3 = v_3 - 3v_2v_1^2 + 2v_1^3 = 3 - 3\cdot\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2},$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4 = \frac{15}{2} - 4\cdot 3 + 6\cdot\frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Теперь можно определить все числовые характеристики: математическое ожидание $m_x = v_1 = 1$; дисперсия $D_x = \mu_2 = \frac{1}{2}$; среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; скошенность $Sk_x = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} = \sqrt{2}$; эксцесс $Ex_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} - 3 = 3$.

В пункте б) требуется найти вероятность $P\{|X - m_x| \le 0,5\}$. Преобразуем неравенство, стоящее под символом вероятности:

$$P\{|X - m_x| \le 0,5\} = P\{-0,5 \le X - m_x \le 0,5\} = P\{m_x - 0,5 \le X \le m_x + 0,5\}.$$

Подставляя сюда $m_x = 1$ и применяя функции распределения вероятностей, получим:

$$P\{0,5 \le X \le 1,5\} = F(1,5) - F(0,5) = 1 - (1 + 2\cdot 1,5)\cdot e^{-2\cdot 1,5} - \left[1 - (1 + 2\cdot 0,5)\cdot e^{-2\cdot 0,5}\right] =$$

$$= 2\cdot e^{-1} - 4\cdot e^{-3} \approx 2\cdot 0,368 - 4\cdot 0,05 = 0,536.$$

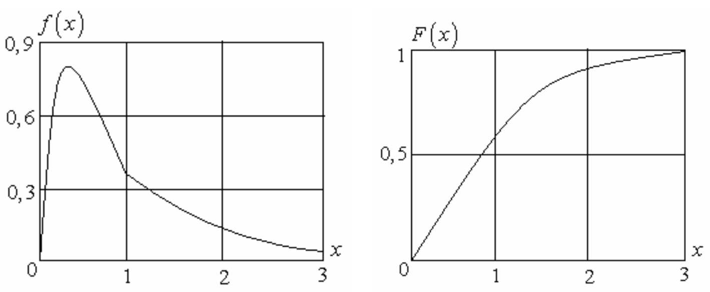


Рис. 6 Графики плотности и функции распределения вероятностей.

Графики плотности и функции распределения вероятностей можно строить по отдельным точкам, проводя через эти точки плавную кривую. Процесс построения графиков не отличается от обычного процесса, применяемого по отношению к любой функции при ее исследованию. Графики представлены на рис.6.

Задание 9. По данной выборке случайной величины X вычислить все основные эмпирические характеристики: математическое ожидание m_x^*, дисперсию D^*, несмещенную дисперсию S^2, среднее квадратическое отклонение σ_x^*, построить доверительный интервал для m_x^*.

1,8	1,3	2,3	2,7	4,7	3,4	1,0	0,1	0,2	2,7	0,3	2,1	0,7	3,3	8,0	0,8	4,0
3,0	3,5	4,6	0,5	0,6	4,1	2,7	0,3	0,4	1,2	4,5	1,6	1,5	9,6	4,0	0,3	0,7
3,7	0,1	0,9	4,9	0,1	1,2	0,5	0,0	1,3	2,8	0,6	1,4	0,8	1,1	0,9	0,4	1,2

Решение. Наибольший элемент выборки равен 9,6, наименьший – 0, размах выборки равен 9,6. Разобьем весь интервал значений элементов выборки на 8 частичных интервалов шириной 1,2, так что $1,2\cdot 8=9,6$. Составим интервальный вариационный ряд, подсчитав число элементов выборки, попавших в каждый частичный интервал. Если значение элемента совпадает с левой границей частичного интервала, то его следует относить к данному интервалу. Если значение совпадает с правой границей, то оно не включается в данный интервал. Исключение составляет последний интервал, в который включается и то значение, которое является его правой границей. Все вычисления удобно проводить в таблице, которая содержит не только полученный таким образом вариационный ряд, но и строки, необходимые для вычисления требуемых начальных моментов.

k	1	2	3	4	5	6	7	Сумма
$\alpha_{k-1}\div\alpha_k$	$0\div 0,6$	$0,6\div 1,2$	$1,2\div 1,8$	$1,8\div 2,4$	$2,4\div 3,0$	$3,0\div 4,2$	$4,2\div 5,4$	
$\bar{x}_k$	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7	3,6	4,8	
n_k	16	12	8	4	5	8	4	60
$\bar{x}_k n_k$	4,8	10,8	12	8,4	13,5	28,8	19,2	122
$\bar{x}_k^2 n_k$	1,44	9,72	18	17,64	36,45	103,68	92,16	462,84

В этой таблице используются следующие обозначения: k- номер частичного интервала, $\alpha_{k-1}\div\alpha_k$ - границы k-того интервала, $\bar{x}_k$ - середина k-того интервала, n_k-число элементов выборки, попавших в k-тый интервал. Пользуясь результатами вычислений, получим:

$$m_x^*=\nu_1^*=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{\ell}\bar{x}_k n_k=\frac{1}{60}\cdot 122=2,033,\quad \nu_2^*=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{\ell}\bar{x}_k^2 n_k=\frac{1}{60}\cdot 462,84=7,714,$$

$$D_x^*=\mu_2^*=\nu_2^*-\nu_1^{*2}=7,714-(2,033)^2=3,581,\quad \sigma=\sqrt{D_x^*}=1,892,\quad S^2=\frac{n}{n-1}D_x^*=3,642\cdot$$

Построим доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m_x. Так как дисперсия случайной величины неизвестна, то используем ее несмещенную оценку S^2. Рассмотрим уравнение $P\{|t| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma$ при $\gamma = 0,95$. По таблицам распределения Стьюдента с 59 степенями свободы из равенства $P\{|t| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma$ находим $\varepsilon_\gamma = 2$. Подставляя все полученные данные в соотношение

$$m_x \in \left(m_x^* - \varepsilon_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; m_x^* + \varepsilon_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right),$$

получим

$$m_x \in \left(2,033 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3,642}}{\sqrt{60}}; 2,033 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3,642}}{\sqrt{60}} \right), \text{ или } m_x \in (1,54; 2,53).$$

Таким образом, неизвестное значение математического ожидания находится в указанных пределах с вероятностью 0,95. Однако этот вывод будет полностью справедлив только в случае, когда исследуемая величина имеет нормальное распределение.

Задание 10. По представленной выше выборке построить полигон и гистограмму. Подобрать подходящий теоретический закон распределения вероятностей и проверить гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения выбранному теоретическому при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
$\alpha_{k-1} \div \alpha_k$	$0 \div 0,6$	$0,6 \div 1,2$	$1,2 \div 1,8$	$1,8 \div 2,4$	$2,4 \div 3,0$	$3,0 \div 4,2$	$4,2 \div 5,4$	$5,4 \div 9,6$	
$\bar{x}_k$	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7	3,6	4,8	7,5	
n_k	16	12	8	4	5	8	4	3	60
Δ_k	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	1,2	1,2	4,2	
p_k^*	0,267	0,2	0,133	0,067	0,083	0,133	0,067	0,05	1
p_k^*/Δ_k	0,445	0,333	0,222	0,112	0,138	0,111	0,056	0,012	

В этой таблице используются следующие обозначения: Δ_k -ширина k-того интервала, p_k^*- эмпирическая вероятность попадания в k-тый интервал. В последней строке представлено значения эмпирической плотности распределения вероятностей для частичных интервалов.

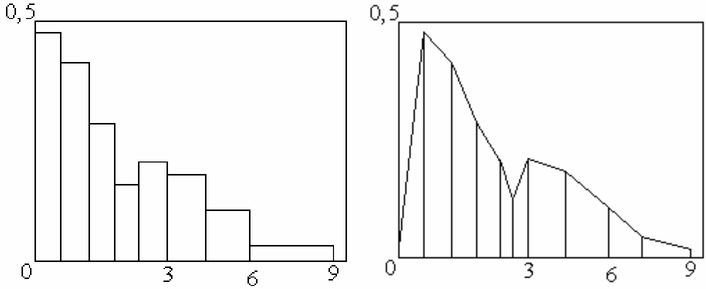


Рис.7 Гистограмма и полигон распределения

По данным этой строки строим гистограмму и полигон распределения, которые в данном случае являются двумя различными графическими представлениями эмпирической плотности распределения вероятностей изучаемой величины (рис.7). Из графиков видно, что эмпирическое распределение очень похоже на теоретическое экспоненциальное распределение. В пользу выбора экспоненциального распределения в качестве гипотетического говорит и тот факт что оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения достаточно близки. Известно, что в случае экспоненциального распределения эти параметры равны.

Для экспоненциального распределения

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},\ f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0, \lambda>0.$$

Для оценки неизвестного параметра λ воспользуемся соотношением $m_x=1/\lambda$, заменив математическое ожидание m_x его оценкой m_x^*, вычисленной в задании 9: $\lambda^*=1/m_x^*=1/2,033=0,492\approx 0,5$. Таким образом, гипотетическое распределение имеет вид:

$$F(x)=1-e^{-0,5x},\ f(x)=0,5\cdot e^{-0,5x},\ x\geq 0.$$

Теоретические вероятности попадания случайной величины в частичные интервалы вычисляются по формуле: $p_k=F(\alpha_k)-F(\alpha_{k-1})$, $k=1,2,...,8$. Например, $p_1=F(0,6)-F(0)=\left(1-e^{-0,5\cdot 0,6}\right)-\left(1-e^{-0,5\cdot 0}\right)=1-0,741=$ $=0,259$.

Тогда $np_1=60\cdot 0,259=15,54$. Выполняя аналогичные вычисления для всех интегралов, внесем полученные результаты в таблицу:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
$\alpha_{k-1}\div\alpha$	$0\div 0,6$	$0,6\div 1,2$	$1,2\div 1,8$	$1,8\div 2,4$	$2,4\div 3,$	$3,0\div 4,$	$4,2\div 5,4$	$5,4\div 9,6$	
$F(\alpha_k)$	0,25	0,451	0,593	0,699	0,77	0,87	0,933	1	

	9				7	8			
$F(\alpha_{k-1})$	0	0,259	0,451	0,593	0,699	0,777	0,878	0,933	
p_k	0,259	0,192	0,142	0,106	0,078	0,101	0,055	0,067	1
np_k	15,54	11,52	8,52	6,36	4,68	6,06	3,3	4,02	60

Правая граница последнего интервала принята равной ∞, так как в соответствии с гипотетическим распределением случайная величина может принимать значения в интервале $(0;\infty)$.

В соответствии с теорией проверки гипотез о соответствии распределений по критерию χ^2-Пирсона значения np_k не должны быть меньше пяти. Объединим 5-ый интервал с 6-йм, а 7-ой – с 8-ым. С учетом этого построим новую таблицу, в которой проведем все вычисления, связанные с определением величину χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$, где ℓ-число частичных интервалов.

k	1	2	3	4	5	6	Сумма
$\alpha_{k-1} \div \alpha_k$	$0 \div 0,6$	$0,6 \div 1,2$	$1,2 \div 1,8$	$1,8 \div 2,4$	$2,4 \div 4,2$	$4,2 \div 9,6$	
$F(\alpha_k)$	0,259	0,451	0,593	0,699	0,878	1	
$F(\alpha_{k-1})$	0	0,259	0,451	0,593	0,699	0,878	
p_k	0,259	0,192	0,142	0,106	0,179	0,122	1
np_k	15,54	11,52	8,52	6,36	10,74	7,32	60
n_k	16	12	8	4	13	7	60
$n_k - np_k$	0,46	0,48	-0,52	-2,36	2,26	-0,32	0
$(n_k - np_k)^2$	0,2116	0,2304	0,2704	5,5696	5,1076	0,1024	
$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$	0,0136	0,02	0,0317	0,8757	0,4756	0,0146	1,4312

Таким образом, вычисленное значение равно 1,4312. По таблицам распределения χ^2 с $r = \ell - s - 1 = 6 - 2 = 4$ степенями свободы (s-число оцененных параметров гипотетического распределения) и с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ находим критическое значение $\chi^2_\alpha = 9,5$. Вычисленное значение χ^2 меньше критического. Следовательно, гипотеза о соответствии эмпирического и теоретического (гипотетического) распределения принимается. Это означает, что можно приближенно рассматривать исследуемую величину как величину, распределенную по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0,5$.

Некоторые табличные данные

Фрагмент таблицы функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$\Phi(x)$	0,1915	0,3413	0,4332	0,4772	0,4938

Критические точки распределения χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0,05$

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение χ^2_α	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
2. Володин Б.Г., Ганин Н.П., Динер И.Я, Комаров Л.Б., Свешников А.А., Старобин К.Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике. – М.: Советское радио, 1970.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961.
5. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г, Тихонов В.И. /Под общей редакцией проф. Тихонова В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. – М.: Советское радио, 1970.
6. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. Учеб. Пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1971.
7. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. Ленинградского университета, 1967.
8. Лозинский С.Н. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Статистика, 1967.
9. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1970.
10. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистьики для технических приложений. – М.: Наука, 1969.
11. Феллер В. введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1964.
12. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978.

Содержание

Учебное издание

Теория вероятностей
и математическая статистика

Методические указания к выполнению индивидуальных
домашних заданий для студентов всех специальностей

Составитель **Некрасов** Юрий Юрьевич

Подписано в печать 14.10.10. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 2,9. Уч.-изд. л. 3,1
Тираж 100 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46