Федеральное агентство по образованию
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

В. В. Шаптала

# Математические модели в городском кадастре

Учебное пособие

Белгород
2009

Федеральное агентство по образованию
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

В. В. Шаптала

# Математические модели
# в городском кадастре

*Утверждено учёным советом университета в качестве учебного пособия для студентов специальности 120303 – Городской кадастр*

Белгород
2009

УДК 528.45:519.87
ББК 65.32.5:22.18
Ш 24

Рецензенты:
Доктор экономических наук, профессор В. А. Калугин (БелГУ)
Кандидат технических наук, доцент А. С. Горлов (БГТУ им. В. Г. Шухова)

**Шаптала В.В.**
Ш 24 Математические модели в городском кадастре: учебное пособие/ В.В. Шаптала. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2009. – 72 с.

В пособии рассмотрены методы математического моделирования в задачах городского кадастра. Приводятся основные математические и численные методы, используемые при решении задач городского кадастра.

Данное учебное пособие по курсу «Математические модели в городском кадастре» предназначено для студентов специальности 120303 – Городской кадастр.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 528.45:519.87
ББК 65.32.5:22.18

## Оглавление

## Введение

В пособие включены геометрические и экономические задачи городского кадастра, требующие применения методов математического моделирования и представляющие практический интерес. Пособие состоит из трех разделов, в которых на конкретных примерах описываются некоторые возможности математического моделирования в задачах городского кадастра. При решении задач городского кадастра методами математического моделирования целесообразно использовать специализированные пакеты для математических вычислений, одним из которых является пакет MS Excel, что позволяет значительно экономить время, необходимое для расчётов, в пользу анализа результатов решения задач.

Предлагаемые задачи и их математические модели имеют прикладное значение для повышения эффективности:

1) реализации программ жилищного строительства (в том числе массового строительства индивидуального жилья малой этажности) и благоустройства территорий коммерческими организациями и государством;
2) использования земельных ресурсов застроенных и незастроенных территорий коммерческими и государственными организациями;
3) планирования, организации и проведения земельно-устроительных и земельно-кадастровых работ.

# 1.Методы вычисления площадей земельных участков

## 1.1.Общие положения

Важнейшей характеристикой земельного участка является его площадь.

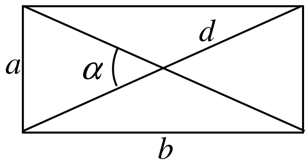
Для вычисления площадей участков, а также площадей, занятых строениями, усадьбами и т.д. применяют формулы геометрии, тригонометрии и аналитической геометрии.

Участки разбивают на простейшие геометрические фигуры: прямоугольники, треугольники, трапеции, круги или их части.

Площади отдельных фигур определяются по результатам измерения длин их сторон и углов. После этого площадь всего участка определяется суммированием площадей его частей.

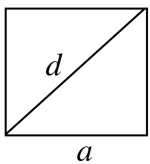
Повторим формулы для вычисления площадей основных геометрических фигур.

1. Прямоугольник




$$S = a \cdot b = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\alpha \qquad (1.1)$$

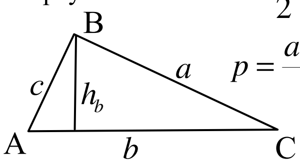
2. Квадрат




$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} \qquad (1.2)$$

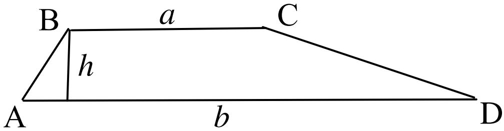
3. Треугольник

$$S = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$




$$p = \frac{a+b+c}{2}$$ - полупериметр (1.3)

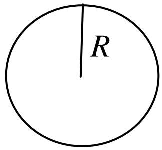
4. Трапеция




$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad (1.4)$$

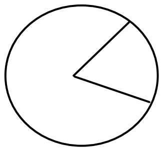
5. Круг и его части

- площадь круга



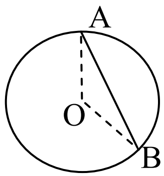

$$S = \pi \cdot R^2 \qquad (1.5)$$

- площадь сектора



$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{360} \cdot \alpha^\circ \qquad (1.6)$$

- площадь сегмента

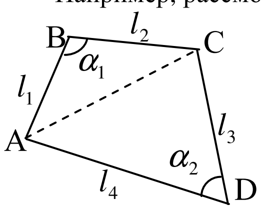



$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{360} \cdot \alpha^\circ \pm S_{\Delta AOB} \qquad (1.7)$$

## 1.2.Вычисление площади по результатам измерения линий и углов на местности

Если по границам участка проложен теодолитный ход, т.е. измерены длины сторон участка и углы между ними, то площадь участка может быть найдена путём суммирования площадей его частей или с помощью дополнительных построений.

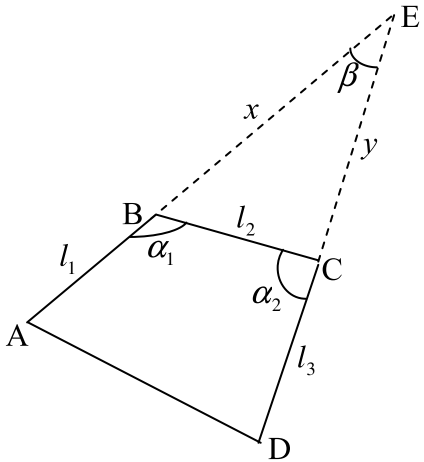
Например, рассмотрим четырёхугольник ABCD.




$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} =$$

$$= \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\alpha_1 + \frac{1}{2} l_3 \cdot l_4 \cdot \sin\alpha_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\alpha_1 + l_3 \cdot l_4 \cdot \sin\alpha_2) \qquad (1.8)$$




$$S_{ABCD} = S_{AED} - S_{BEC} =$$

$$= \frac{1}{2}(l_1 + x)(l_3 + y)\sin\beta -$$

$$- \frac{1}{2} xy\sin\beta$$

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 180$$

По теореме синусов можно записать:

$$\frac{x}{\sin(180 - \alpha_2)} = \frac{l_2}{\sin\beta}$$

$$\frac{y}{\sin(180 - \alpha_1)} = \frac{l_2}{\sin\beta}$$

Отсюда выразим *x* и *y*

$$x = l_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta} \qquad y = l_2 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}$$

$$S = \frac{1}{2}(l_1 l_3 \sin\beta + x l_3 \sin\beta + l_1 y \sin\beta) =$$

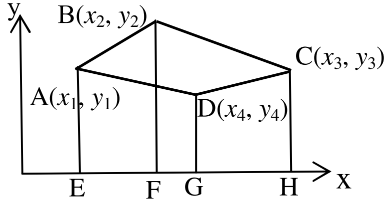
$$= \frac{1}{2}(l_1 l_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - 180) + l_2 l_3 \sin\alpha_2 + l_1 l_2 \sin\alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(l_2 l_3 \sin\alpha_2 + l_1 l_2 \sin\alpha_1 - l_1 l_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \qquad (1.9)$$

Аналогичные формулы можно вывести для пятиугольника, шестиугольника и других многоугольников.

### 1.3.Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин

Рассмотрим сначала четырёхугольник ABCD для которого известны координаты его вершин: A($x_1$, $y_1$), B($x_2$, $y_2$), C($x_3$, $y_3$), D($x_4$, $y_4$)



$$S_{ABCD} = S_{EABF} + S_{FBCH} - S_{EADG} - S_{GDCH} =$$
$$= \frac{1}{2}((y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) -$$
$$-(y_1 + y_4)(x_4 - x_1) - (y_4 + y_3)(x_3 - x_4)) =$$
$$= \frac{1}{2}(y_1x_2 + y_2x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_2x_3 + y_3x_3 -$$
$$- y_2x_2 - y_3x_2 - y_1x_4 - y_4x_4 + y_1x_1 + y_4x_1 -$$
$$- y_4x_3 - y_3x_3 + y_4x_4 + y_3x_4) = \frac{1}{2}(y_1(x_2 - x_4) +$$
$$+ y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_1 - x_3)) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{1.10}$$
$$x_0 \equiv x_4,\ x_5 \equiv x_1$$

В общем случае

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{1.11}$$
$$i = 1,2,3,4,....,n; x_0 \equiv x_n,\ x_{n+1} = x_1$$

Слагаемые формулы (1.10) можно перегруппировать так, чтобы общими множителями были абсциссы точек A, B, C и D.

$$S = \frac{1}{2}(x_1(y_4 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) +$$
$$+ x_4(y_3 - y_1)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} x_i(y_{i-1} - y_{i+1})$$

В общем случае

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i-1} - y_{i+1}) \tag{1.12}$$

Для контроля площадь многоугольника участка следует вычислять дважды: по формуле (1.11) и по формуле (1.12).

# 2.Применение методов линейного программирования для решения задач городского кадастра

## 2.1.Введение в линейное программирование

### 2.1.1.Понятие о математическом моделировании и оптимальном решении экономических задач городского кадастра

Экономические задачи городского кадастра обычно имеют несколько решений. Как выбрать из них наилучшее (оптимальное)? Для этого составляется математическая модель задачи – система формул, уравнений и неравенств, отражающих основные особенности изучаемой задачи.

Важнейшим элементом модели является критерий эффективности или целевая функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные задачи, образующие числовой вектор X , который может быть записан в виде столбца или строки. Задача оптимизации сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения критерия эффективности в заданной области D:

$$F(X) \rightarrow \max (\min) \text{ при } X \in D \qquad (2.1)$$

В задачах на max в качестве целевой функции может фигурировать выручка, доход, рентабельность. В задачах на min – затраты на единицу продукции, себестоимость, налоговые отчисления и т.д. Область допустимых решений D определяется системой уравнений или неравенств, которая называется системой ограничений:

$$\begin{cases} g_1(X)\begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(X)\begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Здесь $g_1, g_2.g_3,....g_m$ - заданные функции. Соотношения (2.2) включают в себя потребности в ресурсах и выражают ограниченность их запасов.

Разработка методов оптимизации является предметом специальной математической дисциплины – математического программирования (имеется в виду не компьютерное программирование, а разработка программы действий по отысканию оптимального решения)

Различают несколько видов математического программирования: линейное, нелинейное, стохастическое (т.е. учитывающее случайный характер некоторых параметров), динамическое, геометрическое и др.

В линейном программировании рассматриваются задачи, в которых целевая функция и ограничения линейны, т.е. первой степени по переменной $x_1$ , $x_2$ , …. , $x_n$ .

В настоящее время более 80% оптимизационных задач в экономике, управлении и в земельном кадастре решаются методами линейного программирования.

В частности это следующие задачи:

- определение видов и объёмов продаж недвижимого имущества;
- определение площадей различных видов городской застройки;
- определение видов и объёмов землеустроительных и земельно-кадастровых работ и т.д.

### 2.1.2.Постановка задач линейного программирования

В наиболее общем виде задача линейного программирования формулируется так: найти наибольшее (наименьшее) значение линейной целевой функции

$$F=C_0+C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+\ldots\ldots+C_nx_n \to \max (\min) \qquad (2.3)$$

при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}\ x_n \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} b_m \end{cases} \qquad (2.4)$$

и дополнительном требовании неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad (2.5)$$

В матричном виде система ограничений (1.17) и (1.16) может быть записана так:

$$AX \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} B \qquad (2.6)$$

$$x_i \geq 0$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}.\cdots.a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}.\cdots.a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Частными формами задачи линейного программирования являются:

- стандартная форма

$$\begin{aligned} &F \rightarrow \max \\ &AX \leq B \\ &x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

т.е. это задача на max целевой функции при ограничениях в виде неравенств вида $\leq$ и переменными $x_i \geq 0$.

- каноническая форма

$$\begin{aligned} &F \rightarrow \max \\ &AX = B \\ &x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Каноническая форма отличается от стандартной только тем, что ограничения задаются только в виде уравнений. От стандартной формы задачи линейного программирования можно перейти к канонической и наоборот. Задачу на min можно преобразовать в задачу на max путём введения новой целевой функции $F_1 = -F$.

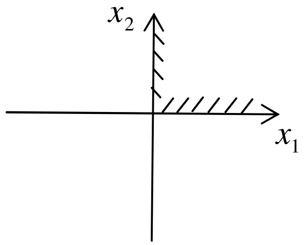
### 2.1.3.Графический метод решения стандартной задачи линейного программирования

Этот метод применим лишь в случае двух переменных $x_1$ и $x_2$.

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 \rightarrow \max \qquad (2.9)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2_n} \le b_m \end{cases} \quad (2.10)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

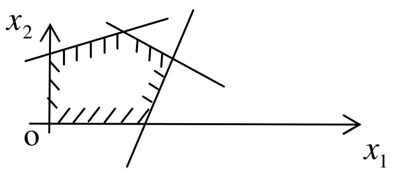



Двум последним неравенствам соответствует первая четверть координатной плоскости ($x_1$; $x_2$).

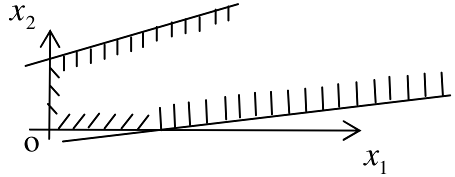
Каждому неравенству вида $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ соответствует одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 = 0$ делит плоскость ($x_1$; $x_2$). Найти нужную полуплоскость можно подставив в неравенство координаты точки О (0;0).

Всей системе ограничений может соответствовать:

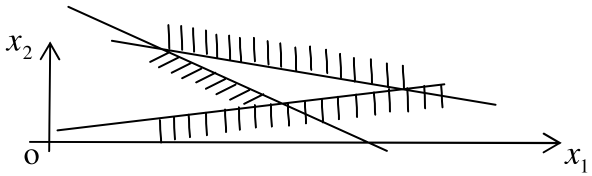
- многоугольник допустимых решений;




- неограниченная область;



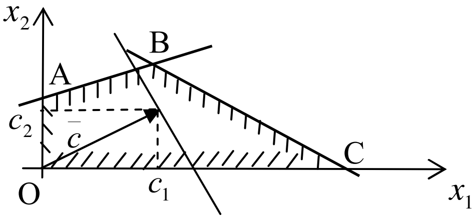

- пустая область (если неравенства противоречивы)




Градиент целевой функции представляет собой вектор, показывающий направление наискорейшего её возрастания.

$$grad\ F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \bar{j} = (c_1; c_2) = \bar{c} \qquad (2.11)$$

Положим $F = a$. Тогда $c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$. Этому уравнению соответствует линия уровня целевой функции. Это прямая, в каждой точке которой целевая функция равна $a$. Прямая уровня целевой функции $\perp$ вектору $\bar{c}$.




Будем перемещать линию уровня параллельно самой себе, т.е. $\perp$ вектору $\bar{c}$ и в направлении этого вектора. Тогда точка касания линии уровня с допустимым многогранником будет точка min $F_{min}$ =F(O), а точка отрыва – точка max: $F_{max}$=F(B).

Если допустимая область неограниченна – задача на max не имеет решения. Если отрыв происходит по всей стороне допустимого многоугольника, то max достигается в любой точке этого отрезка – альтернативный max.

## 2.2.Симплекс-метод линейного программирования

### 2.2.1.Общие понятия. Фундаментальная теорема симплекс-метода

Сущность линейного программирования состоит в отыскании наибольшего значения некоторой линейной целевой функции (критерия эффективности) при определённой системе линейных ограничений на аргументы этой целевой функции. Эти ограничения могут быть заданы в виде неравенств (стандартная задача линейного программирования) или уравнений (каноническая задача линейного программирования). От стандартной задачи всегда можно перейти к канонической задаче, добавляя к левым частям неравенств новые выравнивающие переменные.

Графический метод решения задачи линейного программирования годится только в том случае, если целевая функция зависит только от двух переменных $x_1$ и $x_2$. В этом случае область допустимых решений представляет собой многоугольник. В случае трёх переменных: $x_1$, $x_2$ , $x_3$ необходимо пространственное рассмотрение. Область допустимых решений будет представлять многогранник. При большем числе переменных геометрическое рассмотрение вообще теряет смысл (гиперплоскости четырёхмерные и более). Задачи линейного программирования с размерностью больше двух решаются с помощью симплекс-метода. Рассмотрим сущность этого метода.

Симплекс-метод применяется только для решения канонических задач линейного программирования. В этом случае ограничения представляют собой систему $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.12)$$

где $n > m$, т.е. неизвестных больше чем уравнений. Такие системы называют недоопределёнными. Они, как правило, имеют бесчисленное множество решений.

Вспомним, что решением системы линейных уравнений называется набор $n$ чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, которые при подстановке в уравнения обращают каждое из них в тождество. Как найти эти решения?

Для этого из всех неизвестных выбирают $m$ неизвестных (по числу уравнений) так чтобы определитель составленный из коэффициентов при этих неизвестных не равнялся нулю. Такие переменные называются базисными. А все остальные $n - m$ неизвестных называют свободными. Слагаемые содержащие свободные неизвестные переносят в правую часть. В результате получается укороченная система в которой будет $m$ уравнений и столько же ($m$) неизвестных. Решив эту систему одним из способов (правило Крамера, метод Гаусса) выразим каждую базисную неизвестную через свободную. Давая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы ограничений. Если все свободные неизвестные положить равными нулю, то получим базисное решение. Выбор $m$ базисных неизвестных неоднозначен. Это может быть сделано числом способов равным числу сочетаний из $n$ по $m$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2.13}$$

Например, для двух уравнений с четырьмя неизвестными $m = 2$, $n = 4$ это может быть сделано шестью способами.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ (способов)}$$

Каждому из этих способов соответствует своё базисное решение (т.е. базисных решений будет столько же $C_n^m$). Те из базисных решений, в которых все значения неизвестных положительны, называются опорными.

Фундаментальная теорема симплекс-метода гласит: если оптимальное решение задачи линейного программирования существует и единственно, то оно обязательно совпадает с одним из опорных решений. Таким образом, каноническую задачу линейного программирования можно было бы решить путём прямого перебора всех опорных решений. Для реальных многомерных задач линейного программирования этот способ практически неосуществим (например, 3 ограничения и 20 переменных дают $C_{20}^3$ =1140 базисных решений). Симплекс-метод представляет собой процедуру не беспорядочного, а направленного перебора опорных решений для которых целевая функция возрастает (т.е. переход к новому опорному решению приводит к возрастанию целевой функции – выбираются только те опорные решения, которые приводят к возрастанию целевой функции). В результате число действий резко сокращается.

Вычисления по симплекс-методу организуются в виде симплекс таблиц, представляющих сокращённую форму записи канонической задачи линейного программирования. Для составления первой симплекс таблицы система ограничений приводится к какому-нибудь базисному виду (уравнения представляют собой выражения базисных переменных через свободные). С помощью этих выражений из целевой функции базисные переменные исключаются.

### 2.2.2.Составление первой симплекс-таблицы

Рассмотрим составление первой симплекс-таблицы на примере

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

Это двухмерная задача и она может быть решена графически. Решим теперь её симплекс-методом. Для этого сначала перейдём от стандартной задачи к канонической, т.е. неравенства преобразуем в уравнения. К левой части первого неравенства прибавляем $x_3$ - новую неизвестную. А к левой части второго неравенства прибавляем ещё одну неизвестную $x_4$.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Приведём полученную каноническую систему ограничений к базисному виду. Всего может быть $C_4^2 = 6$ способов выбора базисных неизвестных. Пусть базисными переменными будут переменные $x_3$ и $x_4$, а свободными $x_1$ и $x_2$. Система будет иметь следующий базисный вид:

$$\begin{cases} x_3 = 7 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 6 - 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

Получим базисное решение $x_1$=0; $x_2$=0; $x_3$=7; $x_4$=6. На этом решении целевая функция принимает неотрицательное значение F=0 следовательно полученное базисное решение является опорным.

Пусть базисными переменными буду переменные $x_2$ и $x_4$, а свободными $x_1$ и $x_3$. Система будет иметь следующий базисный вид:

$$\begin{cases} 2x_2 = 7 - 3x_1 - x_3 \\ x_2 + x_4 = 6 - 4x_1 \end{cases}$$

Получим базисное решение $x_1$ , $x_3 = 0$ , $x_2$=3,5 и $x_4$=9,5. На этом решении целевая функция принимает неотрицательное значение F=3,5 следовательно полученное базисное решение является опорным. Если это проделать для всех 6 способов выбора базисных неизвестных и выбрать для всех опорных решений наибольшее значение F, то это и будет решение задачи. Для ускорения расчётов составляют симплекс таблицу. Для этого новые неизвестные $x_3$ и $x_4$ принимают как базисные. Целевую функцию записывают в виде: $F - 2x_1 - x_2 = 0$

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |

### 2.2.3.Порядок работы с симплекс-таблицами

Исходная симплекс-таблица подвергается преобразованию суть которого заключается в переходе к новым опорным решениям.

А) Просматривается последняя строка таблицы и среди её коэффициентов (исключая свободные члены) выбирается отрицательное число (их может быть несколько). Если таковых нет, то исходное опорное решение является оптимальным и первая симплекс-таблица является и последней.

Б) Просматривается столбец таблицы соответствующий выбранному отрицательному коэффициенту и в этом столбце выбирается положительный коэффициент. Если таковых нет, то задача решения не имеет, т.е. целевая функция в области допустимых значений неограниченно возрастает (ОДЗ незамкнута).

В) Среди положительных коэффициентов столбца выбирается тот для которого отношение свободного члена к нему минимально. Этот коэффициент называется разрешающим или генеральным элементом таблиц. Дальше (т.е. в следующей симплекс-таблице) соответствующие этому элементу свободная и базисная переменная должны поменяться местами.

Г) Строится новая таблица, содержащая новый набор базисных переменных. Строка разрешающего элемента делится на него и полученная строка записывается в новую таблицу на то же место. С помощью полученной строки старая таблица преобразуется так, чтобы путём сложения строк превратить в нули все элементы столбца разрешающего элемента (как в определителях), кроме его самого – равного единице. Новая таблица отвечает новому опорному решению.

Д) Дальше снова просматривается последняя строка новой таблицы и всё повторяется. Составление новых симплекс-таблиц повторяется до тех пор пока все элементы последней строки (кроме свободного члена) не станут ≥ 0. После этого задача поиска $F_{max}$ считается решённой. $F_{max}$ стоит на месте свободного члена целевой функции. Другие свободные члены дают значение базисных переменных соответствующих $F_{max}$ . Остальные (свободные) переменные равны нулю.

Исходная (первая) симплекс - таблица

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |

Последняя строка симплекс таблицы содержит отрицательные элементы, значит решение ещё не найдено. Произвольно выберем в последней строке этой таблицы отрицательное число, например, возьмём (-1). Просмотрим столбец в котором находится выбранное число. Берём в качестве разрешающего элемента число 2, так как оно положительное и отношение соответствующего свободного члена к нему наименьшее(7/2 < 6/1).Отметим каким-нибудь образом разрешающий элемент в исходной таблице - обведём его.

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 3 | $\boxed{2}$ | 1 | 0 |
| $x_4$ | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |

Теперь все элементы строки в которой находится разрешающий элемент разделим на него. Получим

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7/2 | 3/2 | $\boxed{1}$ | 1/2 | 0 |
| $x_4$ | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |

В столбце разрешающего элемента сделаем нули кроме его самого теперь равного единице. Для этого подбираем соответствующие дополнительные множители к разрешающему элементу = 1, умножаем строку разрешающего элемента на подобранный множитель и складываем её соответственно с другой строкой. Чтобы сделать ноль в столбце разрешающего элемента во второй строки берём дополнительный множитель для первой строки (-1), чтобы сделать ноль в столбце разрешающего элемента в третьей строке берём дополнительный множитель (1) для первой строки. В базисную переменную записываем переменную соответствующую столбцу разрешающего элемента. Получим вторую симплекс таблицу теперь с базисными переменными $x_2$ и $x_4$.

Вторая симплекс-таблица

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 7/2 | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 |
| $x_4$ | 5/2 | 5/2 | 0 | -1/2 | 1 |
| F | 7/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | 0 |

Снова просматриваем последнюю строку новой симплекс-таблицы. Последняя строка содержит отрицательные элементы. Это означает, что решение ещё не найдено. Выберем в этой таблице отрицательное число (-1/2). Просмотрим столбец в котором находится выбранное число. Берём в качестве разрешающего элемента число 5/2, так как оно положительное и отношение соответствующего свободного члена к нему наименьшее (5/2:5/2 < 7/2:3/2).Отметим разрешающий элемент.

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 7/2 | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 |
| $x_4$ | 5/2 | $\boxed{5/2}$ | 0 | -1/2 | 1 |
| F | 7/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | 0 |

Теперь все элементы строки в которой находится разрешающий элемент разделим на него. Получим

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 7/2 | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 |
| $x_4$ | 1 | $\boxed{1}$ | 0 | -1/5 | 2/5 |
| F | 7/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | 0 |

В столбце разрешающего элемента сделаем нули кроме его самого теперь равного единице. Для этого подбираем соответствующие дополнительные множители к разрешающему элементу = 1, умножаем строку разрешающего элемента на подобранный множитель и складываем её соответственно с другой строкой. Чтобы сделать ноль в столбце разрешающего элемента в первой строке берём дополнительный множитель для второй строки (-3/2), чтобы сделать ноль в столбце разрешающего элемента в третьей строке берём дополнительный множитель (1/2) для второй строки. В базисную переменную записываем переменную соответствующую столбцу разрешающего элемента. Получим третью симплекс-таблицу теперь с базисными переменными $x_1$ и $x_2$.

Третья симплекс-таблица

| Базисные переменные | Свободные члены | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 8/10 | -3/5 |
| $x_1$ | 1 | $\boxed{1}$ | 0 | -1/5 | 2/5 |
| F | 4 | 0 | 0 | 4/10 | 2/10 |

Снова просматриваем последнюю строку новой симплекс-таблицы. Последняя строка не содержит отрицательных элементов. Это означает, что решение уже найдено. Максимальное значение целевой функции $F_{max} = 4$ достигается при $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=0$; $x_4=0$.

### 2.2.4. Анализ оптимизационных задач городского кадастра, решаемых с помощью симплекс-метода

Задание 1.

Условие:

Застройщик, получив участок площадью 100 га, планирует его застройку коттеджами, многоэтажными жилыми зданиями, магазинами, АЗС, складами и другими вспомогательными зданиями с целью получения в дальнейшем максимального дохода от сдачи помещений и зданий различного вида в аренду. Определены удельные характеристики (финансовые затраты, тыс.руб./м$^2$; трудовые затраты, чел.дн./м$^2$; чистый доход от аренды, тыс.руб./м$^2$ ) по видам застройки (см. табл. 1) Финансовые ресурсы застройщика составляют 2 000 000 тыс. руб. Трудовые ресурсы застройщика составляют 1 250 000 человеко-дней.

Введены ограничения по площадям земель отводимых под застройку участка различными видами помещений и зданий, так: площадь под коттеджами не должна превышать 30 % площади под многоэтажными жилыми зданиями; площадь под магазинами не должна превышать 10 % площади под многоэтажными жилыми зданиями; площадь складов и других вспомогательных зданий не должна превышать 25 % площади под магазинами; площадь под АЗС не должна превышать 5 % площади под многоэтажными жилыми зданиями.

Необходимо найти оптимальное сочетание различных видов застройки при ограничениях по трудовым, финансовым ресурсам и по площадям земель под застройку участка различными видами помещений и зданий – составить оптимальный план (**оптимизировать структуру**) застройки территории (составить математическую модель задачи линейного программирования (оптимизации использования городской территории) и решить ее с применением пакета MS Excel).

Таблица 2.1

Удельные характеристики по видам застройки

| Виды застройки / Удельные характеристики | Жилые много-этажки | Кот-тед-жи | Мага-зины | Склады | АЗС |
|---|---|---|---|---|---|
| Трудовые затраты, чел.дн./м$^2$ | 1,2 | 1,5 | 1,3 | 1 | 1,1 |
| Финансовые затраты, тыс.руб./м$^2$ | 2 | 2,5 | 1,5 | 1,1 | 1,4 |
| Чистый доход от аренды, тыс.руб./м$^2$ | 1,1 | 0,9 | 2,5 | 3,5 | 6 |

<u>Выполнение задания</u>:

Запишем исходные данные в табличном виде (см. таблица 1.2)

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**

Таблица 2.2

| | Жилые много-этажки | Коттеджи | Мага-зины | Склады | АЗС | Ресурсы застрой-щика |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Пло-щадь выде-лен-ных зе-мель, м$^2$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | 1000000 м$^2$ |
| | | $\leq 0{,}3 * X_1$ | $\leq 0{,}1 * X_1$ | $\leq 0{,}25 * X_3$ | $\leq 0{,}05 * X_1$ | |
| Тру-довые затра-ты | 1,2 чел. дн./м$^2$ | 1,5 чел.дн./м$^2$ | 1,3 чел.дн./м$^2$ | 1 чел.дн./м$^2$ | 1,1 чел.дн./м$^2$ | 1250000 чел. дн. |
| Фи-нан-совые затра-ты | 2 тыс. руб./м$^2$ | 2,5 тыс.руб./м$^2$ | 1,5 тыс. руб./м$^2$ | 1,1 тыс.руб./м$^2$ | 1,4 тыс.руб./м$^2$ | 2000000 тыс. руб. |
| Чис-тый доход от арен-ды | 1,1 тыс. руб./м$^2$ | 0,9 тыс.руб./м$^2$ | 2,5 тыс. руб./м$^2$ | 3,5 тыс.руб./м$^2$ | 6 тыс.руб./м$^2$ | |

Для математической постановки задачи введем следующие условные обозначения:

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

*j* – номер вида застройки участка, $j = (1, \text{n})$ $n = 5$ (столбцы)
$X_j$– площадь выделенных земель под *j* –ый вид застройки участка, м$^2$
*S* – площадь участка, м$^2$
*ФР* – объем финансовых ресурсов застройщика, тыс. руб.
*ТР* – объем трудовых ресурсов застройщика, чел.дн.
$t_j$ – удельные трудовые затраты на *j*-ый вид застройки участка, чел.дн./м$^2$
$f_j$ – удельные финансовые затраты на *j*-ый вид застройки участка, тыс.руб./м$^2$
$d_j$ – удельный доход от сдачи в аренду *j*-ого вида застройки участка, тыс.руб./м$^2$
*Д* – целевая функция (максимальный доход), тыс. руб.

Используя введённые условные обозначения, составим ***математическую модель*** *задачи оптимизации использования городской территории (определения оптимального сочетания видов застройки)*

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возможны три вида записи:

А) Постановка задачи в общем виде

***Целевая функция****:*

$$\ddot{A} = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \rightarrow \max,$$

***Ограничения:***

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \leq \grave{O}\text{Đ}$$ (по трудовым ресурсам)

$$\sum_{j=1}^{n} f_j x_j \leq \hat{O}\text{Đ}$$ (по финансовым ресурсам)

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = S$$ (по площади участка)

$x_2 \leq 0{,}3 \cdot x_1,$ (по площади земель, отводимых под жилые многоэтажки)

$x_3 \le 0{,}1 \cdot x_1$, (по площади земель, отводимых под жилые многоэтажки)

$x_4 \le 0{,}25 \cdot x_3$ (по площади земель, отводимых под магазины)

$x_5 \le 0{,}05 \cdot x_1$ (по площади земель, отводимых под жилые многоэтажки)

$x_j \ge 0,$ (условие неотрицательности переменных)

$j = (1, \mathrm{n})$ (число переменных)

В качестве целевой функции (критерия оптимизации) взяли суммарный доход от аренды, тыс. руб. равный сумме произведений $d_j$ (удельный доход от аренды $j$-ого вида застройки участка, тыс.руб./м$^2$) на $x_j$ (площадь выделенных земель под $j$-ый вид застройки участка, га.) Целевую функцию (суммарный доход от аренды, тыс. руб.) максимизируем при заданных ограничениях. (Всего $j = (1, \mathrm{n})$ ***n*** видов застройки)

Ограничение по финансовым ресурсам – сумма произведений $f_j$ (удельные финансовые затраты на $j$-ый вид застройки участка, тыс.руб./м$^2$) на $x_j$ ( площадь выделенных земель под $j$ –ый вид застройки участка, га) не должна превышать имеющегося у застройщика финансового ресурса *ФР*, тыс.руб. (Всего $j = (1, \mathrm{n})$ ***n*** видов застройки)

Ограничение по трудовым ресурсам – сумма произведений $t_j$ ( удельные трудовые затраты на $j$-ый вид застройки участка, чел.дн./м$^2$) на $x_j$ ( площадь выделенных земель под $j$-ый вид застройки участка, га) не должна превышать имеющегося у застройщика трудового ресурса *ТР*, чел.дн. (Всего $j = (1, \mathrm{n})$ ***n*** видов застройки)

Ограничение по площади участка – сумма $x_j$ ( площадь выделенных земель под $j$ –ый вид застройки участка, га) должна равняться площади участка *S,* м$^2$. (Всего $j = (1, \mathrm{n})$ ***n*** видов застройки)

Ограничения по переменным – площади выделенных земель $x_j$ , м$^2$ не могут быть отрицательными и должны соответствовать заданным величинам (см. условие).

Б) Конкретная постановка задачи в условных обозначениях

***Целевая функция***:

$$\ddot{A} = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 + d_5x_5 \to \max$$

***Ограничения:***

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 + t_5x_5 \le \grave{O}Đ$$

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 \le \hat{O}Đ$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S$$

$$x_2 \le 0,3 \cdot x_1$$

$$x_3 \le 0,1 \cdot x_1$$

$$x_4 \le 0,25 \cdot x_3$$

$$x_5 \le 0,05 \cdot x_1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

В) Конкретная постановка задачи с числовыми значениями

***Целевая функция***:

$$\ddot{A} = 1,1 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 + 2,5 \cdot x_3 + 3,5 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 \to \max$$

***Ограничения:***

$$1,2 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2 + 1,3 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 1,1 \cdot x_5 \le 1250000$$

$$2 \cdot x_1 + 2,5 \cdot x_2 + 1,5 \cdot x_3 + 1,1 \cdot x_4 + 1,4 \cdot x_5 \le 2000000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000000$$

$$x_2 \le 0,3 \cdot x_1$$

$$x_3 \le 0,1 \cdot x_1$$

$$x_4 \le 0,25 \cdot x_3$$

$$x_5 \le 0,05 \cdot x_1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

## РЕШЕНИЕ

С помощью пакета MS Excel получены следующие решения задачи оптимизации использования территории (**оптимизации структуры застройки территории**):

Условные обозначения

ПВЗ – площадь выделенных земель, м$^2$

ТЗ - трудовые затраты, чел.дней

ФЗ - финансовые затраты, тыс. руб.

ДСА – доход (эффект) от сдачи в аренду, тыс.руб.

Результаты по первому приемлемому варианту (плану)

| | Жилые много-этажки | Кот-тед-жи | Мага-зины | Склады | АЗС | Ресурсы застройщика | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ПВЗ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | Исполь-зовано | Оста-ток | Всего |
| | **888888,8889** | **0** | **88888,88889** | **22222,22222** | **0** | **1000000** | **0** | **1000000** |
| ТЗ | 1066666,667 | 0 | 115555,5556 | 22222,22222 | 0 | 1204444,444 | 45555,55555 | 1250000 |
| ФЗ | 1777777,778 | 0 | 133333,3333 | 24444,44444 | 0 | 1935555,556 | 64444,44444 | 2000000 |
| ДСА | 977777,7778 | 0 | 222222,2222 | 77777,77778 | 0 | ВСЕГО 1277777,778 (абсолютный показатель) | | |
| (Относительный показатель) Эффективность использования ресурсов **при первой приемлемой структуре застройки** | | | | | | | | |
| Трудовых | | | | | | Финансовых | | |
| 1,060885609 | | | | | | 0,660160735 | | |

Результаты по оптимальному варианту (плану)

| | Жилые много-этажки | Кот-тед-жи | Мага-зины | Склады | АЗС | Ресурсы застройщика | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ПВЗ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | Исполь-зовано | Оста-ток | Всего |
| | **851063,8298** | **0** | **85106,38298** | **21276,59574** | **42553,19149** | 1000000 | 0 | 1000000 |
| ТЗ | 1021276,596 | 0 | 110638,2979 | 21276,59574 | 46808,51064 | 1200000 | 50000 | 1250000 |
| ФЗ | 1702127,66 | 0 | 127659,5745 | 23404,25532 | 59574,46809 | 1912765,957 | 87234,04255 | 2000000 |
| ДСА | 936170,2128 | 0 | 212765,9574 | 74468,08511 | 255319,1489 | ВСЕГО 1478723,404 (абсолютный показатель) | | |
| (Относительный показатель) Эффективность использования ресурсов **при оптимальной структуре застройки** | | | | | | | | |
| Трудовых | | | | | | Финансовых | | |
| 1,232269504 | | | | | | 0,773081201 | | |

При заданных ограничениях и целевой функции найдено оптимальное решение, которое показывает оптимальную структуру застройки городской территории (см. таблицу 2.3)

Таблица 2.3

**Оптимальная структура застройки городской территории**

| Структура застройки | Жилые многоэтажки | Кот-тед-жи | Магазины | Склады | АЗС |
|---|---|---|---|---|---|
| Площадь выделенных земель, **м**$^2$ | **$X_1$** | **$X_2$** | **$X_3$** | **$X_4$** | **$X_5$** |
| | **851063,8298** | **0** | **85106,38298** | **21276,59574** | **42553,19149** |

Значение целевой функции - доход по первому приемлемому варианту меньше чем по оптимальному варианту (плану) на 1478723,404 - 1277777,778 = 200945,6262 тыс. руб. Составленный **оптимальный план застройки участка** имеет максимально возможное значение целевой функции - дохода при заданных ограничениях задачи. Сравнение первого приемлемого и оптимального вариантов по абсолютному показателю эффект (доход, результат, эффект) - по целевой функции, рассчитанной в задаче и относительному показателю эффективность (результат/затраты = эффективность) рассчитанному дополнительно (см. табл. РЕЗУЛЬТАТЫ) показывает б**о**льшую выгодность (привлекательность) оптимального варианта по сравнению с первым приемлемым.

Задание 2.

Комитет по градостроительству принял решение построить в течение трёх месяцев в трёх районах города 8000 м$^2$ муниципального социального жилья. Для застройки приглашены три строительные организации. Стоимость 1 м$^2$ социального жилья по районам у каждой строительной организации составляет

| | I район | II район | III район |
|---|---|---|---|
| I организация | 12 000 руб./м$^2$ | 12 900 руб./м$^2$ | 13 500 руб./м$^2$ |
| II организация | 11 200 руб./м$^2$ | 13 000 руб./м$^2$ | 14 000 руб./м$^2$ |
| III организация | 13 000 руб./м$^2$ | 12 500 руб./м$^2$ | 12 000 руб./м$^2$ |

Первая строительная организация за три месяца может построить 1000 м$^2$ жилья, вторая организация – 3 200 м$^2$ жилья, третья организация – 4300 м$^2$ жилья. На сколько м$^2$ жилья выдать заказ каждой организации, чтобы общая стоимость застройки для города была минимальной.

Задание 3.

Городское хозяйство имеет в собственности 3 участка земли, находящиеся в сельскохозяйственном обороте. Из городского бюджета выделяется 4,44 млн.руб. для перевода земель сельскохозяйственного назначения в городской кадастр в течение 3-х лет. В I-ый год планируется провести земельно-кадастровые работы по переводу земель сельскохозяйственного назначения в городской кадастр на сумму 1,85 млн. руб., во II-ой – на сумму 1,65 млн. руб. и в III на оставшиеся средства. Определить оптимальную структуру выводимых из с/х оборота земель в течение $1^{\underline{го}}$ и $2^{\underline{го}}$ года, если:

а) площадь первого участка составляет 10 га, площадь второго – 8 га, площадь третьего – 15 га;

б) стоимость проведения земельно-кадастровых работ на 1 га земли на первом участке составит 100 тыс. руб., на втором – 130 тыс. руб., на третьем – 160 тыс. руб.;

в) Доходы по участкам до и после перевода земель в городской кадастр следующие

| | Доход с гектара в год тыс. руб. **до** перевода земель в городской кадастр | Доход с м$^2$ в год рублей **после** перевода земель в городской кадастр |
|---|---|---|
| I участок | 180 тыс. руб./га | 32 руб./год |
| II участок | 190 тыс. руб./га | 33 руб./год |
| III участок | 170 тыс. руб./га | 33 руб./год |

Задание 4

Площадь территории выделенной для застройки составляет 15 000 м$^2$ (1,5 га). По нормативам не менее 10 % территории должно быть засажено деревьями. Имеется 2 типа деревьев. Стоимость саженца дерева 1-го типа – 14 руб., дерева 2-го типа - 10 руб. Известно, что 1-й тип дерева выделяет на 5 % больше кислорода, чем 2-й тип дерева. На одно дерево по нормативам отводится 2 м$^2$. На озеленение территории выделяется 7500 руб. Составить оптимальный план (оптимизировать план) землеустроительных работ по озеленению территории выделенной для застройки. Определить сколько деревьев первого и/или второго типа нужно посадить (какую площадь территории выделенной для застройки нужно засадить деревьями первого и/или второго типа), чтобы объем кислорода, выделяемого деревьями, был максимальным (оптимизировать структуру озеленения территории).

Задание 5.

Площадь территории выделенной для застройки составляет 100 000 м$^2$ (10 га). Застройка территории планируется жилыми многоэтажными зданиями и жилыми коттеджами. Стоимость землеустроительных и земельно-кадастровых работ на участках под жилые многоэтажные здания 125 руб./м$^2$. Стоимость земельно-устроительных и земельно-кадастровых работ на участках под жилые коттеджи 113 руб./м$^2$. Для землеустроительных и земельно-кадастровых работ на участках территории выделено 11 300 000 руб. Налоговые поступления в год с 1 м$^2$ участков под жилые многоэтажные здания 1 руб., а с 1 м$^2$ участков под жилые коттеджи 0,5 руб. Предполагаемый спрос на выделенной для застройки территории на участки под жилые коттеджи составит не менее 15 000 м$^2$. Предполагаемый спрос на выделенной для застройки территории на участки под жилые многоэтажные здания составит не более 65 000 м$^2$. Составить оптимальный план распределения площади земли территории под застройку жилыми многоэтажными зданиями и жилыми коттеджами. Определить какие площади земли (сколько м$^2$) выделенной территории следует отдать под застройку жилыми многоэтажными зданиями и жилыми коттеджами, чтобы объем налоговых поступлений за год был максимальным (оптимизировать структуру застройки территории).

Задание 6.

На территории дворов жилого микрорайона имеется 6 га свободной земли. На благоустройство свободных дворовых земель микрорайона выделено 6 млн. руб. Жилищное управление свободные участки земли предлагает благоустроить

А) Детскими площадками

Б) Площадками для сушки белья

В) Зелёными насаждениями (деревья, кустарники, цветы, газоны)

Г) Площадками для выгула домашних животных

Д) Пешеходным плиточным покрытием

Е) Министадионами

Ж) Площадками для отдыха молодёжи и взрослого населения

По результатам анализа нормативной документации, опроса экспертов и населения установлены коэффициенты важности (ценности, привлекательности) предлагаемых вариантов благоустройства.

| | |
|---|---|
| Детская площадка | 1,6 |
| Площадка для сушки белья | 1,4 |
| Зелёные насаждения | 1,5 |

| | |
|---|---|
| Площадка для выгула домашних животных | 1,1 |
| Пешеходное плиточное покрытие | 1,8 |
| Министадион | 1,3 |
| Площадка для отдыха молодёжи и взрослого населения | 1,7 |

Потребности в финансовых средствах на 1 м$^2$ по вариантам благоустройства составляют

| | |
|---|---|
| Детская площадка | 500 руб./м$^2$ |
| Площадка для сушки белья | 100 руб./м$^2$ |
| Зелёные насаждения | 25 руб./м$^2$ |
| Площадка для выгула домашних животных | 130 руб./м$^2$ |
| Пешеходное плиточное покрытие | 275 руб./м$^2$ |
| Министадион | 900 руб./м$^2$ |
| Площадка для отдыха молодёжи и взрослого населения | 250 руб./м$^2$ |

Потребности в площадях земли на проектную единицу по вариантам благоустройства составляют

| | |
|---|---|
| Детская площадка | 65 м$^2$ |
| Площадка для сушки белья | 15 м$^2$ |
| Зелёные насаждения | 65 м$^2$ |
| Площадка для выгула домашних животных | 35 м$^2$ |
| Пешеходное плиточное покрытие | 200 м$^2$ |
| Министадион | 140 м$^2$ |
| Площадка для отдыха молодёжи и взрослого населения | 45 м$^2$ |

Определить оптимальную структуру вариантов благоустройства дворовой территории (определить оптимальное количество проектных единиц каждого варианта благоустройства – оптимизировать структуру мероприятий по благоустройству дворовой территории).

Для всех предлагаемых задач математическая модель в общем виде составляется аналогично математической модели составленной для задания 1 (определяется *max* или *min* целевой функции при заданных ограничениях).

Для решения каждой из предлагаемых задач необходимо сделать конкретную математическую постановку задачи с числовыми значениями, заданными в условии решаемой задачи.

## 2.3.Распределительный метод решения задач линейного программирования

### 2.3.1.Постановка задачи. Основные понятия

Предположим, что имеется $m$ источников финансирования, которые обозначим $a_1$, $a_2$, $a_3$,…. $a_m$ и $n$ программ нуждающихся в финансировании, их обозначим $b_1$, $b_2$, $b_3$,….,$b_n$ . Общий объём средств А = $a_1$+ $a_2$+ $a_3$+…. +$a_m$ , а общие потребности В = $b_1$+ $b_2$+ +$b_3$+….+$b_n$.

Если А = В, тогда имеет место закрытая модель распределительной задачи. Если А ≠ В, то это открытая модель (открытая модель чаще встречается так как средств как правило не хватает, в этих случаях выделяются приоритетные программы).

Вложенные средства коммерческих проектов должны окупаться, естественно сроки окупаемости различны – ожидаемые прибыли различны.

Для количественной оценки этих характеристик вводится матрица рискованности капиталовложений (риск невозврата, неокупаемости кредита, инвестиции, вложения).

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \; c_{12} \; c_{13} \cdots c_{1n} \\ c_{21} \; c_{22} \; c_{23} \cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} \; c_{m2} \; c_{m3} \cdots c_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

Нужно найти такое распределение средств чтобы их общая рискованность была минимальной.

В случае закрытой задачи при этом должны выполняться два условия:

1) Все средства должны быть использованы;

2) Все потребности должны быть удовлетворены

Переменными задачи являются:

$x_{ij}$ –сумма перечисленная из $i$-го источника $j$-му потребителю

Эти переменные образуют матрицу вложений (инвестиций) (2.15)

Целевой функцией задачи является общая рискованность финансирования, которую необходимо минимизировать (2.16)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots x_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots x_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

$$F = \sum_{(ij)} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \qquad (2.16)$$

Слагаемые этой суммы (функции (2.16)) это суммы возможных безвозвратных потерь.

Система линейных ограничений задачи получается из условий 1 и 2.

1)Все средства должны быть истрачены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (2.17)$$

Это система горизонтальных ограничений, которые обеспечивают ограничение первого условия - все средства должны быть истрачены

2)Все потребности должны быть удовлетворены:

Система вертикальных ограничений, которые обеспечивают выполнение второго ограничения – все потребности должны быть удовлетворены, имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (2.18)$$

Видно, что целевая функция и ограничения линейны, т.е. содержат в задаче переменные первой степени. Ещё одна особенность все ограничения записаны в виде равенств, т.е. мы имеем каноническую задачу линейного программирования с $n{\times}m$ переменными и $n{+}m$ ограничений в виде равенств. Для решения этой задачи можно использовать симплекс-метод, но обычно используется другой метод, учитывающий специфику задачи (метод потенциалов) и приводящий к менее громоздким, более быстрым вычислениям (без использования симплекс-таблиц).

### 2.3.2.Таблица закрытой распределительной задачи. Отыскание первого опорного плана.

В этой таблице совмещаются матрица вложений X, матрица рискованности C и обе подсистемы ограничений вертикальных и горизонтальных.

Таблица закрытой распределительной задачи

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{11}$ | ………….. | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | ………….. | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| ………….. | …………… | …………… | …………… | …………… |
| $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | …………… | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| $b_1$ | $b_2$ | …………… | $b_n$ | A B |

Как и в общем случае решения задачи линейного программирования оптимальное решение совпадает с одним из опорных решений системы ограничений (фундаментальное решение – когда все свободные переменные равны нулю, которые перенесены направо для выравнивания числа уравнений и числа неизвестных)

Из $n+m$ ограничений независимыми являются $n+m-1$. Поэтому базисных переменных будет тоже $n+m-1$. Остальные переменные (неизвестные) – свободные. Их будет $n\times m-(n+m-1)=$
$=(m\ -1)(n\ -1)$. Этим свободным переменным в базисном решении соответствуют нули, а в таблице пустые клетки. Следует в решении $n+m-1$ клеток заполнить значениями базисных переменных – это будет первый опорный план. Этот план строится так:

- берётся клетка таблицы произвольно и пусть её индексы $k,l$;
сравниваются числа $a_k$ и $b_l$, выбирается меньшее из них и вписывается в клетку, а вместо другого большего числа сбоку или снизу пишется их разность;

- таблица при этом сокращается на строку или столбец из которых взято меньшее число;
- из оставшейся таблицы снова выбирается клетка и всё повторяется.

Как же выбирается заполняемая клетка? Есть два способа:

1) Метод Северо-Западного (верхнего-левого) угла;
2) Метод наименьшего риска

Пример:

Рассмотрим метод верхнего - левого угла на примере:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

0,02 - коэффициент рискованности, записанный в верхнем - левом углу клетки

число инвесторов $m$ = 3; число потребителей $n$ = 3; число базисных переменных $m + n - 1 = 5$

Нужно заполнить 5 клеток так, чтобы все деньги были истрачены, все потребности были удовлетворены (крайние строка и столбец – потребности и источники соответственно)

В данной таблице выберем верхнюю-левую клетку. Сравним числа 10 и 40, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 < 40

→ в верхнюю-левую клетку записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. Число 10 взято из крайнего столбца, следовательно, возьмём крайнюю строку, выберем в ней столбец с индексом столбца выбранной клетки и запишем разность взятых чисел 40-10=30 в клетку крайней строки и выбранного в ней столбца.

В верхнюю-левую клетку было записано число взятое из крайнего столбца, следовательно, со строкой в которой находится верхняя-левая клетка и записанное число 10 теперь не работаем (заштрихуем её) получим таблицу следующего вида:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 10 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** 40-10=30 | **30** | **10** | **80** / **80** |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем верхнюю - левую клетку. Сравним числа 20 и 10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 < 20 → в верхнюю-левую клетку записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. Число 10 взято из крайнего столбца, следовательно, возьмём крайнюю строку, выберем в ней столбец с индексом столбца выбранной клетки и запишем разность взятых чисел 20-10=10 в клетку крайней строки и выбранного в ней столбца.

В верхнюю-левую клетку было записано число, взятое из крайнего столбца, следовательно, со строкой в которой находится верхняя-левая клетка и записанное число 20 теперь не работаем (заштрихуем её) получим таблицу следующего вида:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 10 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 20 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** 30-20=10 | **30** | **10** | **80** **80** |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем верхнюю - левую клетку. Сравним числа 50 и 10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: $10 < 50 \rightarrow$ в верхнюю-левую клетку записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. Число 10 взято из крайней строки, следовательно, возьмём крайний столбец, выберем в нем строку с индексом строки выбранной клетки и запишем разность взятых чисел 50-10=40 в клетку крайнего столбца и выбранной в нём строки.

В верхнюю-левую клетку было записано число, взятое из крайней строки, следовательно, со столбцом в котором находится верхняя-левая клетка и записанное число 10 теперь не работаем (заштрихуем его) получим таблицу следующего вида см. ниже). Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 10 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 20 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 10 | 0,1 | 0,04 | 50 -10 = 40 **50** |
| **40** 30-20=10 | **30** | **10** | **80** **80** |

В незаштрихованной части таблицы выберем верхнюю - левую клетку. Сравним числа 40 и 30, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 30 < 40 → в верхнюю-левую клетку записываем меньшее число из этих двух, которое равно 30. Число 30 взято из крайней строки, следовательно, возьмём крайний столбец, выберем в нем строку с индексом строки выбранной клетки и запишем разность взятых чисел 40-30=10 в клетку крайнего столбца и выбранной в нём строки. В верхнюю-левую клетку было записано число, взятое из крайней строки, следовательно, со столбцом в котором находится верхняя-левая клетка и записанное число 30 теперь не работаем (заштрихуем его) получим таблицу следующего вида(см. ниже). Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем верхнюю - левую клетку. Сравним числа 10и10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 = 10 → в верхнюю-левую клетку записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. Заполнена последняя пятая клетка-получена таблица с решением (первый опорный план) следующего вида (см. ниже). Все источники использованы, все потребности удовлетворены.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 10 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 20 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 10 | 0,1 30 | 0,04 | 40 -30 = 10 **50** |
| **40** 30-20=10 | **30** | **10** | **80** **80** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 10 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 20 | 0,06 | 0,02 | **20** |
| 0,07 10 | 0,1 30 | 0,04 10 | 10 -10 = 0 **50** |
| **40** 30-20=10 | **30** | **10** | **80** **80** |

С учётом рисков потери (невозврат) по составленному первому опорному плану, найденному методом северо-западного угла, могут составить

$$F = 0{,}1\times10 + 0{,}08\times20 + 0{,}07\times10 + 0{,}1\times30 + 0{,}04\times10 = 6{,}7 \text{ ед.}$$

Рассмотрим метод наименьшего риска на этом же примере:

В таблице выберем клетку с наименьшим риском. Это клетка с риском равным 0,02. Сравним числа 20 и 10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: $10 < 20 \rightarrow$ в клетку с наименьшим риском записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. В клетке большего числа из сравниваемых чисел вместо большего числа записываем разность сравниваемых чисел 20-10=10. Число 10 взято из ряда-столбца в котором находится выбранная клетка наименьшего риска, следовательно, с этим столбцом больше работать не будем – он обработан (заштрихуем его). Получим таблицу следующего вида (см. ниже)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 | 0,02 10 | 20-10 = 10 **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем клетку с наименьшим риском. Это клетка с риском равным 0,05. Сравним числа 30 и

10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 < 30 → в клетку с наименьшим риском записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10.

В клетке большего числа из сравниваемых чисел вместо большего числа записываем разность сравниваемых чисел 30-10=10. Число 10 взято из ряда-строки в котором находится выбранная клетка наименьшего риска, следовательно, с этой строкой больше работать не будем – она обработана (заштрихуем её). Получим таблицу следующего вида (см. ниже)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 | 0,02 10 | 20-10 = 10 **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** | **30** 30-10=20 | **10** | **80** **80** |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем клетку с наименьшим риском. Это клетка с риском равным 0,06. Сравним числа 20 и 10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 < 20 → в клетку с наименьшим риском записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10.

В клетке большего числа из сравниваемых чисел вместо большего числа записываем разность сравниваемых чисел 20-10=10.

Число 10 взято из ряда-строки в котором находится выбранная клетка наименьшего риска, следовательно, с этой строкой больше работать не будем – она обработана (заштрихуем её). Получим таблицу следующего вида (см. ниже)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 10 | 0,02 10 | 20-10 = 10 **20** |
| 0,07 | 0,1 | 0,04 | **50** |
| **40** | **30** 20-10=10 | **10** | |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем клетку с наименьшим риском. Это клетка с риском равным 0,07. Сравним числа 50 и 40, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: $40 < 50 \rightarrow$ в клетку с наименьшим риском записываем меньшее число из этих двух, которое равно 40.

В клетке большего числа из сравниваемых чисел вместо большего числа записываем разность сравниваемых чисел 50-40=10. Число 40 взято из ряда-столбца в котором находится выбранная клетка наименьшего риска = 0,07, следовательно, с этим столбцом больше работать не будем – он обработан (заштрихуем его). Получим таблицу следующего вида (см. ниже)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 10 | 0,02 10 | 20-10 = 10 **20** |
| 0,07 40 | 0,1 | 0,04 | 50-40=10 **50** |
| **40** | **30** 20-10=10 | **10** | |

Продолжим работу с незаштрихованной частью полученной таблицы. В незаштрихованной части таблицы выберем клетку с наименьшим риском. Сравним числа 10 и 10, записанные в крайних столбце и строке таблицы, с индексами соответствующими индексам выбранной клетки: 10 =10 → в клетку с наименьшим риском записываем меньшее число из этих двух, которое равно 10. Заполнена последняя пятая клетка - получена таблица с решением (первый опорный план) следующего вида (см. ниже). Все источники использованы, все потребности удовлетворены.

С учётом рисков потери (невозврат) по составленному первому опорному плану, найденному методом наименьшего риска, могут составить

$$F = 0{,}05\times10 + 0{,}06\times10 + 0{,}02\times10 + 0{,}1\times10 + 0{,}07\times40 = 5{,}1 \text{ ед.}$$

Первый опорный план найденный методом наименьшего риска лучше первого опорного плана найденного методом северо-западного угла, т.к. потери по первому опорному плану найденному методом наименьшего риска равны 5,1 ед. и они меньше, чем потери по первому опорному плану найденному методом северо-западного угла составляющие 6,7 единиц (потери 5,1 < 6.7).

Но то, что первый опорный план найденный методом риска

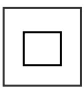
| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 10 | 0,02 10 | 20-10 = 10 **20** |
| 0,07 40 | 0,1 10 | 0,04 | 50-40=10 **50** |
| **40** | **30** 10-10=0 | **10** | |

лучший из всех возможных нельзя утверждать. Первый опорный план является лишь отправным для поиска оптимального решения.

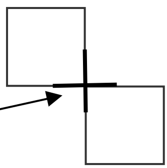
### 2.3.3.Циклы пересчёта

Первый опорный план является отправным для поиска оптимального решения. Рассмотрим процедуру перехода от одного опорного плана к другому с неувеличением целевой функции (или уменьшается или остаётся прежней). Такие переходы осуществляются с помощью циклов пересчёта. Циклом называется ломанная линия звенья которой располагаются по строкам или столбцам таблицы. При этом должны выполняться условия:

1) Эта ломанная является связной, т. е. не должна иметь разрывов (замкнутая линия, которую можно прочертить без отрыва ручки от бумаги



- не годится



- годится)

Циклы могут иметь точки самопересечения

2) В каждой вершине цикла могут сходиться только 2 звена. Одно из которых располагается по строке, другое по столбцу таблицы. Вершинам цикла приписываются знаки (+) плюс и (-) минус, которые чередуются.

Пусть в таблицу внесено некоторое первое опорное решение. Рассмотрим цикл пересчёта одна из вершин которого находится в свободной клетке, а остальные в заполненных клетках. Такой цикл существует для любой свободной клетки любого опорного плана. Вершине цикла находящейся в свободной клетке приписывается знак (+) плюс, а знаки остальных вершин определяются чередованием.

Пример:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 + 10 | 0,02 - 10 | **20** |
| 0,07 40 | 0,1 10 - | 0,04 + | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

После расстановки знаков ищем наименьшее вложение стоящее в клетке со знаком (-) минус  и осуществляем сдвиг. Сдвигом называется такое преобразование таблицы при котором меняются лишь вложения в клетках где находятся вершины цикла. Числа в клетках со знаком (+) плюс увеличиваются на минимальное вложение отрицательной клетки, которое мы нашли раньше, а числа стоящие в клетках со знаком (-) минус уменьшаются на это число. В результате этого одна из базисных переменных, т.е. одно из вложений обращается в ноль и становится свободным, переменная соответствующая пустой клетке переводится в разряд базисных. Таким образом, переходим к новому опорному решению.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 20 | 0,02 0 | **20** |
| 0,07 40 | 0,1 | 0,04 10 | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

**2.3.4.Метод потенциалов**

Оптимальное решение находится с помощью метода потенциалов. Потенциалы это особые величины, которые приписываются всем инвесторам $U_1$ , $U_2$ , ….. $U_{\mathrm{m}}$ и всем потребителям $V_1$ , $V_2$ , …. $V_{\mathrm{n}}$ $n$ может не равняться $m$. Для каждой базисной (т.е. заполненной клетки) клетки с индексами $ij$ ($i$ – номер инвестора, $j$ – номер потребителя) составляется уравнение:

$$U_i + V_j = C_{ij} \qquad (2.19)$$

, где $C_{ij}$ – показатель риска. В результате получим ($m + n$ -1) уравнений по числу заполненных клеток. Неизвестных потенциалов($m + n$), т. е. на единицу больше чем уравнений, поэтому один из потенциалов можно выбрать произвольно (уравнений не хватает) и проще всего его взять равным нулю. Остальные потенциалы находим, решив систему уравнений. Дальше для каждой свободной клетки вычисляется величина $Y_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$. (2.20)

Если все члены $Y_{ij}$ окажутся положительными или равными нулю, то данный опорный план является оптимальным, т.е. целевая функция равная величине возможных потерь будет минимальной. Если окажутся пустые клетки с отрицательными $Y_{ij}$ , то выбираем одну из них, затем приписываем вершине цикла в этой клетке знак (+) плюс, строим цикл пересчёта и осуществляем сдвиг по этому циклу. Для нового опорного плана снова записываем уравнения для потенциалов, находим эти потенциалы. Для пустых клеток вычисляем $Y_{ij}$ и т.д. до тех пор пока все числа $Y_{ij}$ не окажутся неотрицательными.

Пример:

Рассмотрим первый опорный план найденный методом наименьшего риска

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 10 | 0,02 10 | **20** |
| 0,07 40 | 0,1 10 | 0,04 | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** **80** |

С учётом рисков потери (невозврат) по составленному первому опорному плану, найденному методом наименьшего риска, могут составить

$$F = 0,05\times10 + 0,06\times10 + 0,02\times10 + 0,1\times10 + 0,07\times40 = 5,1 \text{ ед.}$$

Оптимальное решение находится с помощью метода потенциалов.

1) Для всех заполненных клеток составим уравнение: $U_i + V_j = C_{ij}$

$U_3 + V_1 = 0{,}07$
$U_3 + V_2 = 0{,}1$
$U_2 + V_2 = 0{,}06$
$U_1 + V_2 = 0{,}05$
$U_2 + V_3 = 0{,}02$

2) Получено 5 уравнений а неизвестных 6, один из потенциалов для уравнивания берём =0

$V_1 = 0$ $\quad$ $U_3 = 0{,}07$
$V_2 = 0{,}03$ $\quad$ $U_2 = 0{,}03$
$V_3 = -0{,}01$ $\quad$ $U_1 = 0{,}02$

3) Для каждой пустой клетки вычисляем величину $Y_{ij}$

$Y_{11} = 0{,}1 – (U_1 + V_1) = 0{,}1 – (0{,}02+0) = 0{,}08$
$Y_{21} = 0{,}08 – (U_2 + V_1) = 0{,}08 – 0{,}03 = 0{,}05$
$Y_{33} = 0{,}04 – (U_3 + V_3) = 0{,}04 – 0{,}06 = – 0{,}02$
$Y_{13} = 0{,}03 - (U_1 + V_3) = 0{,}03 – 0{,}01 = 0{,}02$

4) Для одной из пустых клеток величина $Y_{ij} = Y_{33} = – 0{,}02$ отрицательна. Берём эту клетку, приписываем вершине цикла в этой клетке знак (+) плюс, строим цикл пересчёта.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 + 10 | 0,02 - 10 | **20** |
| 0,07 40 | 0,1 10 - | 0,04 + | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

Осуществляем сдвиг по этому циклу (среди отрицательных выбираем наименьшее, к положительным прибавляем наименьшее, от отрицательных вычитаем наименьшее) Получили новый опорный план тоже из 5 элементов (кроме элемента, который прибавляли, вычитали)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,05 10 | 0,03 | **10** |
| 0,08 | 0,06 20 | 0,02 0 | **20** |
| 0,07 40 | 0,1 | 0,04 10 | **50** |
| **40** | **30** | **10** | **80** / **80** |

С учётом рисков потери (невозврат) по составленному новому опорному плану, найденному методом потенциалов, могут составить

$$F = 0{,}07\times40 + 0{,}06\times20 + 0{,}02\times0 + 0{,}05\times10 + 0{,}04\times10 = 4{,}9 \text{ ед.}$$

Новый опорный план найденный методом потенциалов лучше первого опорного плана, т.к. потери по первому опорному плану найденному методом наименьшего риска равны 5,1 ед. и они больше, чем потери по новому опорному плану найденному методом потенциалов составляющие 4,9 единиц (потери 4,9 < 5,1). Но то, что новый опорный план лучший из всех возможных нельзя утверждать.

Для нового опорного плана снова записываем уравнения для потенциалов, находим эти потенциалы. Для пустых клеток вычисляем $Y_{ij}$ и т.д. до тех пор пока все числа $Y_{ij}$ не окажутся неотрицательными. Продолжим поиск оптимального решения в соответствии с приве денным алгоритмом действий метода потенциалов для найденного нового опорного плана.

1) Для всех заполненных клеток составим уравнение: $U_i + V_j = C_{ij}$

   $U_3 + V_1 = 0{,}07$
   $U_3 + V_3 = 0{,}04$
   $U_2 + V_2 = 0{,}06$
   $U_1 + V_2 = 0{,}05$
   $U_2 + V_3 = 0{,}02$

2) Получено 5 уравнений, а неизвестных 6, один из потенциалов для уравнивания берём =0

   $V_1 = 0$ $\quad U_3 = 0{,}07$
   $V_3 = -\,0{,}03$ $\quad U_2 = 0{,}05$
   $V_2 = 0{,}01$ $\quad U_1 = 0{,}04$

3) Для каждой пустой клетки вычисляем величину $Y_{ij}$

   $Y_{11} = 0{,}1 – (U_1 + V_1) = 0{,}1 – (0{,}04+0) = 0{,}96$
   $Y_{21} = 0{,}08 – (U_2 + V_1) = 0{,}08 – 0{,}05 = 0{,}03$
   $Y_{32} = 0{,}1 – (U_3 + V_3) = 0{,}1 – 0{,}04 = 0{,}96$
   $Y_{13} = 0{,}03 - (U_1 + V_3) = 0{,}03 – 0{,}01 = 0{,}02$

4) Для всех из пустых клеток величина $Y_{ij}$ неотрицательна. Следовательно, найденный новый опорный план является оптимальным, лучшим из всех возможных – потери по этому плану будут наименьшие и составят 4,9 единицы.

### 2.3.5. Анализ оптимизационных задач городского кадастра, решаемых с помощью распределительного метода линейного программирования

Задание 1.

<u>Условие</u>:

Город выделил массив для строительства новых микрорайонов и взял на себя проведение мероприятий по созданию инфраструктуры и благоустройству с целью повышения ценности (привлекательности) массива для потенциальных застройщиков. Массив разбили на три участка различной удаленности от центра города (3 км - I участок, 5 км – II участок, 8 км – III участок). На I, II и III участок выделено соответственно 11000, 6600 и 4400 тыс. рублей – дополнительных вложений в участки. Итого на весь массив выделено 22000 тыс. руб. Составлен план расхода выделенных средств по мероприятиям (см. табл.1). Произведена экспертная оценка увеличения ценности (привлекательности) участков для застройщиков после проведения каждого вида мероприятия на каждом участке (см. табл.2).

Необходимо распределить выделенные денежные средства так, чтобы суммарное увеличение ценности (привлекательности) массива было максимальным – составить оптимальный план мероприятий по созданию инфраструктуры городской территории (составить математическую модель распределительной задачи линейного программирования (оптимизации использования городской территории) и решить ее с применением пакета MS Excel).

Таблица 2.4

План расхода средств по мероприятиям

| Вид мероприятия | Потребность в финансовых средствах |
|---|---|
| 1) Дороги | ≤ не более 7000 тыс. руб. |
| 2) Электрификация | ≤ 2300 тыс. руб. |
| 3) Водоснабжение | ≤ 3000 тыс. руб. |
| 4) Канализация | ≤ 2500 тыс. руб. |
| 5) Газификация | ≤ 3200 тыс. руб. |
| 6) Телефонизация | ≤ 4000 тыс. руб. |

Таблица 2.5

Коэффициенты увеличения ценности (привлекательности) участков после проведения мероприятий

| Мероприятие / Участок | Дороги | Электри-фикация | Водоснаб-жение | Канализация | Газифи-Кация | Телефонизация |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I участок | 1,2 | 1,5 | 1,68 | 1,1 | 1,78 | 1,24 |
| II участок | 1,3 | 1,4 | 1,7 | 1,2 | 1,5 | 1,28 |
| II участок | 1,24 | 1,3 | 1,54 | 1,1 | 1,52 | 1,27 |

<u>Выполнение задания</u>:

Запишем исходные данные в табличном виде (см. таблица 2.6)

Для математической постановки задачи введем следующие условные обозначения:

**УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ**

$i$ – число участков, $i$ =(1, m) $m$ =3 (строки)

$j$ – число мероприятий, $j$ = (1, n) $n$ = 6 (столбцы)

$И_i$ – объем денежных средств выделенных на $i$-ый участок, тыс. руб.

$П_j$– объем денежных средств, которые запланировано вложить в $j$-ое мероприятие, тыс. руб.

$k_{ij}$– коэффициент увеличения ценности (привлекательности) $i$-ого участка для потенциального застройщика после проведения $j$-ого мероприятия на $i$-ом участке (определяется экспертами)

$x_{ij}$– объем денежных средств, которые необходимо выделить для проведения $j$-ого мероприятия на $i$-ом участке, тыс. руб.

$F$ - целевая функция, тыс. руб.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 2.6

| Мероприятие / Участок | Коэффициенты увеличения ценности участков после мероприятий | | | | | | Источники, тыс.руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Дороги | Электрификация | Водоснабжение | Канализация | Газификация | Телефонизация | |
| I участок | 1,2 | 1,5 | 1,68 | 1,1 | 1,78 | 1,24 | =11000 |
| II участок | 1,3 | 1,4 | 1,7 | 1,2 | 1,5 | 1,28 | =6600 |
| III участок | 1,24 | 1,3 | 1,54 | 1,1 | 1,52 | 1,27 | =4400 |
| Потребности, тыс. руб. | ≤ 7000 | ≤ 2300 | ≤ 3000 | ≤ 2500 | ≤ 3200 | ≤ 4000 | 22000 / ≤ 22000 |

С учетом принятых условных обозначений запишем исходные данные для распределительной задачи в математической форме. Возможны три вида записи: А) в общем виде; Б) в конкретном виде В) в числовом виде

А) В общем виде

| Номера участков, $i$ | Номера мероприятий, $j$ | | | | | Источники |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | … | n | |
| 1 | $k_{11}$ $X_{11}$ | $k_{12}$ $X_{12}$ | $k_{13}$ $X_{13}$ | … | $k_{1n}$ $X_{1n}$ | $И_1$ |
| 2 | $k_{21}$ $X_{21}$ | $k_{22}$ $X_{22}$ | $k_{23}$ $X_{23}$ | … | $k_{2n}$ $X_{2n}$ | $И_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| M | $k_{m1}$ $X_{m1}$ | $k_{m2}$ $X_{m2}$ | $k_{m3}$ $X_{m3}$ | … | $k_{mn}$ $X_{mn}$ | $И_m$ |
| Потребности | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | … | $П_n$ | $\sum \grave{E}_i$ / $\sum \ddot{I}_j$ |

Б) В конкретном виде

| Номера участков, $i$ | Номера мероприятий, $j$ | | | | | | Источники |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | $k_{11}$ $X_{11}$ | $k_{12}$ $X_{12}$ | $k_{13}$ $X_{13}$ | $k_{14}$ $X_{14}$ | $k_{15}$ $X_{15}$ | $k_{16}$ $X_{16}$ | $И_1$ |
| 2 | $k_{21}$ $X_{21}$ | $k_{22}$ $X_{22}$ | $k_{23}$ $X_{23}$ | $K_{24}$ $X_{24}$ | $K_{25}$ $X_{25}$ | $k_{26}$ $X_{26}$ | $И_2$ |
| 3 | $k_{31}$ $X_{31}$ | $k_{32}$ $X_{32}$ | $k_{33}$ $X_{33}$ | $K_{34}$ $X_{34}$ | $K_{35}$ $X_{35}$ | $k_{36}$ $X_{36}$ | $И_3$ |
| Потребности | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | $П_6$ | $\sum \grave{E}_i$ / $\sum \ddot{I}_j$ |

В) В числовом виде

| Номера участков, $i$ | Номера мероприятий, $j$ | | | | | | Источники |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 1,2 $X_{11}$ | 1,5 $X_{12}$ | 1,68 $X_{13}$ | 1,1 $X_{14}$ | 1,78 $X_{15}$ | 1.24 $X_{16}$ | 11000 |
| 2 | 1,3 $X_{21}$ | 1,4 $X_{22}$ | 1,7 $X_{23}$ | 1,2 $X_{24}$ | 1,5 $X_{25}$ | 1,28 $X_{26}$ | 6600 |
| 3 | 1,24 $X_{31}$ | 1,3 $X_{32}$ | 1,54 $X_{33}$ | 1,1 $X_{34}$ | 1,52 $X_{35}$ | 1,27 $X_{36}$ | 4400 |
| Потребности | ≤ 7000 | ≤ 2300 | ≤ 3000 | ≤ 2500 | ≤ 3200 | ≤ 4000 | 22000 / ≤ 22000 |

Используя введённые условные обозначения, составим *математическую модель задачи оптимизации использования городской территории (проектирования оптимального сочетания мероприятий на выделенном земельном массиве)*

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возможны три вида записи: А) Постановка задачи в общем виде

***Целевая функция****:*

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \to \max$$

***Ограничения:***

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le \ddot{I}_j \left(j = 1 \ldots n\right)$$ (по столбцам - потребностям)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = И_i (i = 1 \ldots m)$$ (по строкам - источникам)

$x_{ij} \geq 0,$ (условие не отрицательности переменных)

В качестве целевой функции (критерия оптимизации) взяли сумму произведений коэффициентов привлекательности $k_{ij}$ на количество выделяемых средств $x_{ij}$. Целевую функцию максимизируем при заданных ограничениях.

Ограничения по столбцам – сумма средств израсходованных на $j$-ое мероприятие $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ на $m$ участках не должна превышать запланированной величины $П_j$ (всего $n$ ограничений по столбцам).

Ограничения по строкам – сумма средств израсходованных на $i$-ый участок $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ для проведения $n$ мероприятий должна равняться объему выделенных средств на $i$-ый участок $И_i$ (всего $m$ ограничений по строкам).

Ограничение по переменным - суммы вложенных средств $x_{ij}$ не могут быть отрицательными.

Б) Конкретная постановка задачи в условных обозначениях

***Целевая функция:***

$$Z = k_{11}x_{11} + k_{12}x_{12} + k_{13}x_{13} + k_{14}x_{14} + k_{15}x_{15} + k_{16}x_{16} +$$
$$+ k_{21}x_{21} + k_{22}x_{22} + k_{23}x_{23} + k_{24}x_{24} + k_{25}x_{25} + k_{26}x_{26} +$$
$$+ k_{31}x_{31} + k_{32}x_{32} + k_{33}x_{33} + k_{34}x_{34} + k_{35}x_{35} + k_{36}x_{36} \to \max$$

***Ограничения:***

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = \grave{E}_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = \grave{E}_2$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = \grave{E}_3$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq \ddot{I}_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq \ddot{I}_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq \ddot{I}_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq \ddot{I}_4$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq \ddot{I}_5$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} \leq \ddot{I}_6$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24},$$
$$x_{25}, x_{26}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36} \geq 0$$

В) Конкретная постановка задачи с числовыми значениями

***Целевая функция:***

$$Z = 1{,}2 \cdot x_{11} + 1{,}5 \cdot x_{12} + 1{,}68 \cdot x_{13} + 1{,}1 \cdot x_{14} + 1{,}78 \cdot x_{15} + 1{,}24 \cdot x_{16} +$$
$$+ 1{,}3 \cdot x_{21} + 1{,}4 \cdot x_{22} + 1{,}7 \cdot x_{23} + 1{,}2 \cdot x_{24} + 1{,}5 \cdot x_{25} + 1{,}28 \cdot x_{26} +$$
$$+ 1{,}24 \cdot x_{31} + 1{,}3 \cdot x_{32} + 1{,}54 \cdot x_{33} + 1{,}1 \cdot x_{34} +$$
$$+ 1{,}52 \cdot x_{35} + 1{,}27 \cdot x_{36} \to \max$$

***Ограничения:***

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 11000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 6600$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 4400$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 7000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 2300$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 3000$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 2500$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq 3200$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} \leq 4000$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24},$$
$$x_{25}, x_{26}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36} \geq 0$$

## РЕШЕНИЕ

С помощью пакета MS Excel получены следующие решения задачи оптимизации использования территории (оптимизации плана мероприятий по созданию инфраструктуры незастроенной территории):

1)Результаты по первому приемлемому варианту (плану)

| | Дороги | Электриф. | Водоснабжен. | Канализ. | Газифик. | Телефонизац | Источники, т.р. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I участок** | **400** | **2300** | **3000** | **2500** | **2800** | 0 | 11000 |
| **II участок** | **6600** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6600 |
| **III уч-к** | 0 | 0 | 0 | 0 | **400** | **4000** | 4400 |
| Потреб,т.р. | 7000 | 2300 | 3000 | 2500 | 3200 | 4000 | |
| Значение целевой функции при составленном плане мероприятий | | | | | | | **30972** |

2)Результаты по оптимальному варианту (плану)

| | Дороги | Электрифик. | Водоснабж | Канализац. | Газифик. | Телефон. | Источники, тыс. руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I участок** | 0 | **2300** | **3000** | 0 | **3200** | **2500** | 11000 |
| **II участок** | **4100** | 0 | 0 | **2500** | 0 | 0 | 6600 |
| **III участок** | **2900** | 0 | 0 | 0 | 0 | **1500** | 4400 |
| Потребности, тыс. руб. | 7000 | 2300 | 3000 | 2500 | 3200 | 4000 | |
| Значение целевой функции при составленном плане мероприятий | | | | | | | **31117** |

При заданных ограничениях и целевой функции найдено оптимальное решение, которое показывает, что в оптимальный план мероприятий по созданию инфраструктуры городской территории включены следующие мероприятия по участкам:

I участок–**электрификация**(на сумму 2300 тыс. руб.), **водоснабжение**(на сумму 3000 тыс. руб.), **газификация**(на сумму 3200 тыс.руб.), **телефонизация**(на сумму 2500 тыс. руб.);

II участок - **дороги** (на сумму 4100 тыс.руб.), **канализация** (на сумму 2500 тыс. руб.);

III участок– **дороги** (на сумму 2900 тыс.руб.), **телефонизация** (на сумму 1500 тыс. руб.)

Значение целевой функции по первому приемлемому варианту меньше чем по оптимальному варианту (плану) на 31117-30972=145 единиц (тыс. руб.). Составленный оптимальный план мероприятий по созданию инфраструктуры на трех участках различной удаленности от центра города в выделенном массиве имеет максимально возможное значение целевой функции при заданных ограничениях задачи. Все источники использованы, все потребности удовлетворены.

Задание 2.

Комитет по землеустройству провёл госторги земельными участками (первый участок площадью в 30 га, второй – 80 га, третий – 60 га) среди трёх организаций застройщиков, которые по результатам торгов готовы покупать землю на участках по следующим ценам.

| | I организация | II организация | III организация |
|---|---|---|---|
| I участок | 1 300 000 руб/га | 1 250 000 руб/га | 1 300 000 руб/га |
| II участок | 1500 000 руб/га | 1 300 000 руб/га | 1400 000 руб/га |
| III участок | 1 600 000 руб/га | 1 400 000 руб/га | 1 500 000 руб/га |

Всего организациям предлагается купить:
I организации – 90 га
II организации – 40 га
III организации – 40 га

Сколько гектаров земли продать каждой организации на каждом участке, чтобы сумма полученных денежных средств государством была максимальной.

Задание 3.

В течение месяца организации необходимо провести землеустроительные работы на трёх участках (первый участок площадью в 30 га, второй – 80 га, третий – 60 га). Есть три предприятия, которые могут провести землеустроительные работы. Стоимость работы предприятий по участкам на 1 га приведена в таблице

| | I участок | II участок | III участок |
|---|---|---|---|
| Первого предприятия | 12 000 руб./га | 10 000 руб./га | 11 000 руб./га |
| Второго предприятия | 13 000 руб./га | 9 000 руб./га | 12 000 руб./га |
| Третьего предприятия | 10 000 руб./га | 11 000 руб./га | 10 000 руб./га |

За месяц первое предприятие может землеустроить 50 га, второе – 50 га, третье – 70 га. Какие объёмы заказов выдать каждому предприятию на каждом участке, чтобы общая стоимость землеустройства (всех трёх участков) для организации была минимальной.

Задание 4.

Фонд индивидуального жилищного строительства застраивает участки индивидуальными жилыми домами малой этажности и продаёт их. В фонде ИЖС имеется три массива под застройку: первый массив состоит из 300 участков, второй из 600 участков, третий из 800 участков. Есть три типовых проекта застройки участка. Стоимость застройки одного участка по различным проектам в различных массивах приведена в таблице

| | I проект застройки участка | II проект застройки участка | III проект застройки участка |
|---|---|---|---|
| I массив | 600 000 руб. | 820 000 руб. | 750 000 руб. |
| II массив | 650 000 руб. | 900 000 руб. | 790 000 руб. |
| III массив | 580 000 руб. | 840 000 руб. | 830 000 руб. |

По-первому проекту нужно застроить всего 400 участков, по - второму – 500 участков, по- третьему – 800 участков. Сколько участков нужно застроить по каждому проекту в каждом массиве, чтобы:
а) общая стоимость застройки (всех 3 массивов) была минимальной
б) общая прибыль была максимальной, если цена реализации застроенных участков по различным проектам в различных массивах следующая

| | I проект застройки участка | II проект застройки участка | III проект застройки участка |
|---|---|---|---|
| I массив | 1 000 000 руб. | 1 400 000 руб. | 900 000 руб. |
| II массив | 1 200 000 руб. | 1 500 000 руб. | 870 000 руб. |
| III массив | 990 000 руб. | 1 420 000 руб. | 880 000 руб. |

Задание 5.

Земельно-кадастровая палата приняла заказы на проведение земельно-устроительных и земельно-кадастровых работ на трёх участках (I участок площадью 60 га, II – 40 га, III – 40 га). Все заказы должны быть выполнены в течение месяца. В земельно-кадастровой палате имеется три бригады расположенные в трёх опорных пунктах, находящихся на различном расстоянии от участков на которых необходимо провести работы. Транспортные расходы для проведения работ различными бригадами на различных участках составят

| | I бригада | II бригада | III бригада |
|---|---|---|---|
| I участок | 100 руб./га | 88 руб./га | 90 руб./га |
| II участок | 150 руб./га | 120 руб./га | 87 руб./га |
| III участок | 99 руб./га | 142 руб./га | 140 руб./га |

Производительность первой бригады составляет 30 га/мес., второй – 50 га/мес., третьей – 60 га/мес. Распределить заказы по бригадам так, чтобы транспортные расходы на проведение работ были минимальными (Оптимизировать структуру портфеля заказов).

Задание 6.

На три участка необходимо завезти землю (на I участок – 40 тонн земли, II – 60 тонн земли, III – 45 тонн земли) из трёх карьеров, находящихся на различном расстоянии от участков. Объёмы земли, выработанные и подготовленные для транспортировки на первом карьере составляют 35 тонн, на втором – 75 тонн, на третьем – 35 тонн. Удельные транспортные расходы для перевозки земли из различных карьеров на различные участки составят

| | I участок | II участок | III участок |
|---|---|---|---|
| I карьер | 100 руб./т | 88 руб./т | 90 руб./т |
| II карьер | 150 руб./т | 120 руб./т | 87 руб./т |
| III карьер | 99 руб./т | 142 руб./т | 140 руб./т |

Распределить выработанные объёмы земли из 3 карьеров по 3 участкам так, чтобы транспортные расходы по перевозке земли были минимальными (Оптимизировать структуру объёмов перевозки земли).

Для всех предлагаемых задач математическая модель в общем виде составляется следующим образом:

***Целевая функция***:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \to \max(\min) \qquad (2.21)$$

***Ограничения:***

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le \ddot{I}_j \left(j = 1 \ldots n\right) \quad \text{(по столбцам - потребностям)} \qquad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \grave{E}_i (i = 1 \ldots m) \quad \text{(по строкам - источникам)} \qquad (2.23)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad \text{(условие неотрицательности переменных)} \qquad (2.24)$$

Для решения каждой из предлагаемых задач необходимо сделать конкретную математическую постановку задачи с числовыми значениями, заданными в условии решаемой задачи.

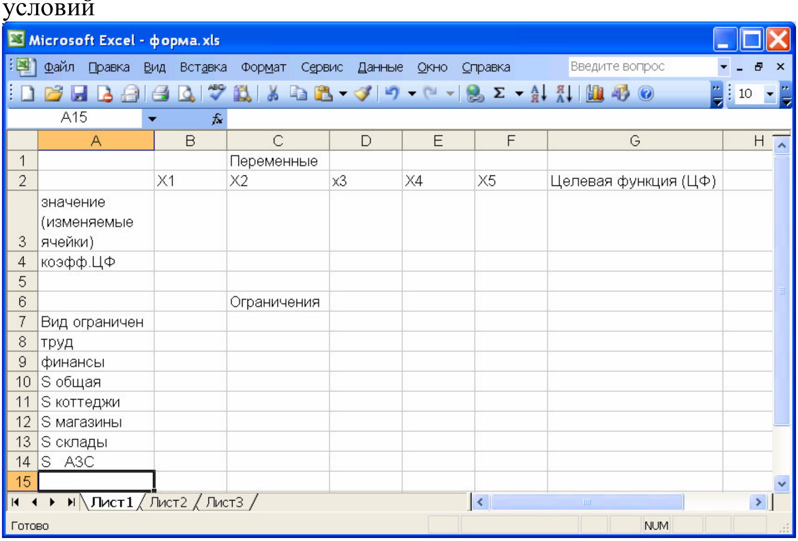
## 3.Применение пакета MS Excel для решения задач городского кадастра методами математического программирования.

Оптимизационные задачи городского кадастра могут быть решены в пакете MS Excel с помощью *Поиска решений*. ***Поиск решения*** - это надстройка Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если в меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения,* значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду *Сервис → Надстройки* и активизируйте надстройку *Поиск решения.* Если же этой надстройки нет в диалоговом окне *Надстройки,* то вам необходимо обратиться к панели управления Windows, щелкнуть на пиктограмме *Установка и удачение программ* и с помощью программы установки EXCEL (или Office) установить надстройку *Поиск решения.*Для решения задачи необходимо:

1.Создать форму для ввода условий задачи.
2.Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).
3.Ввести исходные данные.
4.Ввести зависимость для целевой функции.
5.Ввести зависимости для ограничений.
6.Указать назначение целевой функции(установить целевую ячейку).
7.Ввести ограничения.

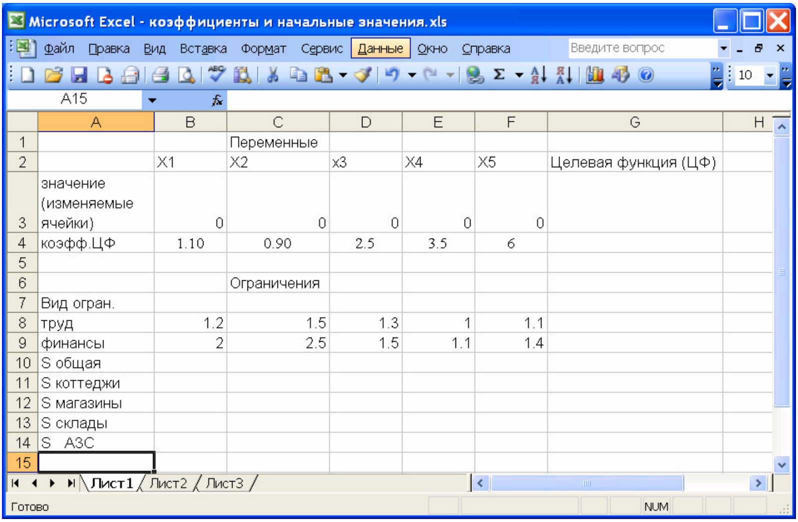
Рассмотрим пример решения задания 1 из раздела 2.2.4.

1)Для задачи 1 из раздела 2.2.4 подготовим *форму* для ввода условий



Весь текст в подготовленной форме является комментарием и на решение задачи не влияет.

2) После подготовки формы для ввода данных зададим *начальные значения* для значений вектора *X* = (*X*1=0, X2=0, X3=0, X4=0, X5=0), которые помещены в ячейках B3:F3 , введём *коэффициенты* целевой функции и коэффициенты для ограничений по трудовым и финансовым ресурсам соответственно в ячейки B4:F4, B8:F8 и B9:F9.

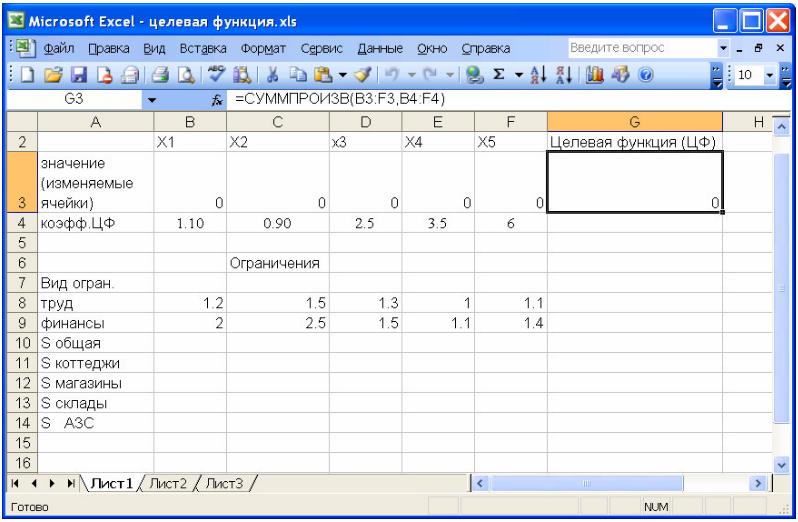


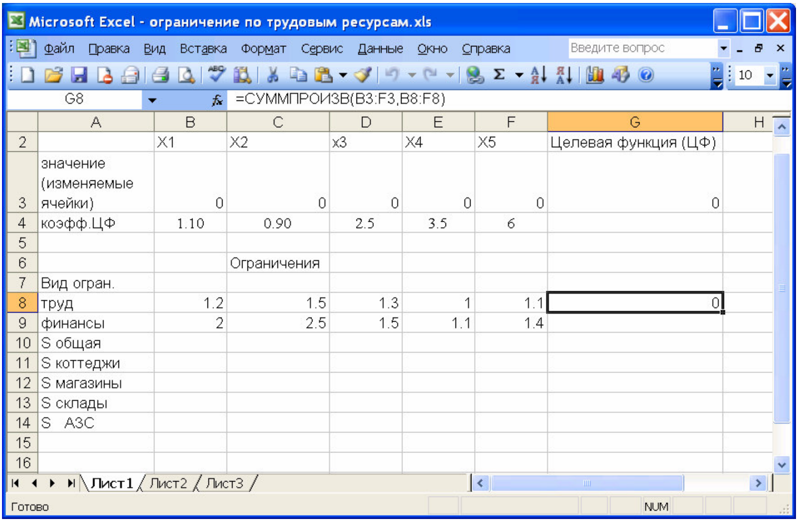

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Переменные | | | | | |
| 2 | | X1 | X2 | x3 | X4 | X5 | Целевая функция (ЦФ) | |
| 3 | значение (изменяемые ячейки) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 4 | коэфф.ЦФ | 1.10 | 0.90 | 2.5 | 3.5 | 6 | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | Ограничения | | | | | |
| 7 | Вид огран. | | | | | | | |
| 8 | труд | 1.2 | 1.5 | 1.3 | 1 | 1.1 | | |
| 9 | финансы | 2 | 2.5 | 1.5 | 1.1 | 1.4 | | |
| 10 | S общая | | | | | | | |
| 11 | S коттеджи | | | | | | | |
| 12 | S магазины | | | | | | | |
| 13 | S склады | | | | | | | |
| 14 | S АЗС | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |



3) Поместим курсор в ячейку значение *целевой функции* - в ячейку G3, запишем в ней формулу для вычисления *целевой функции* =СУММПРОИЗВ(B3:F3,B4:F4). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение целевой функции в ячейке G3 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).

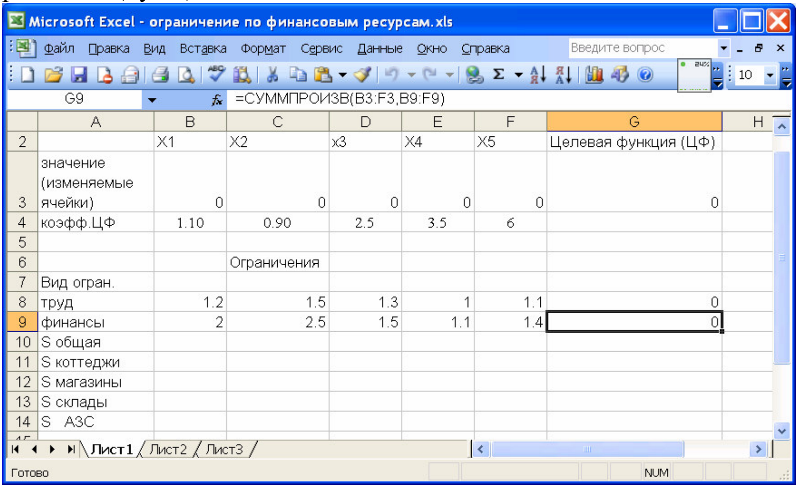
4) Поместим курсор в ячейку G8, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по трудовым ресурсам* =СУММПРОИЗВ(B3:F3,B8:F8). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G8 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).



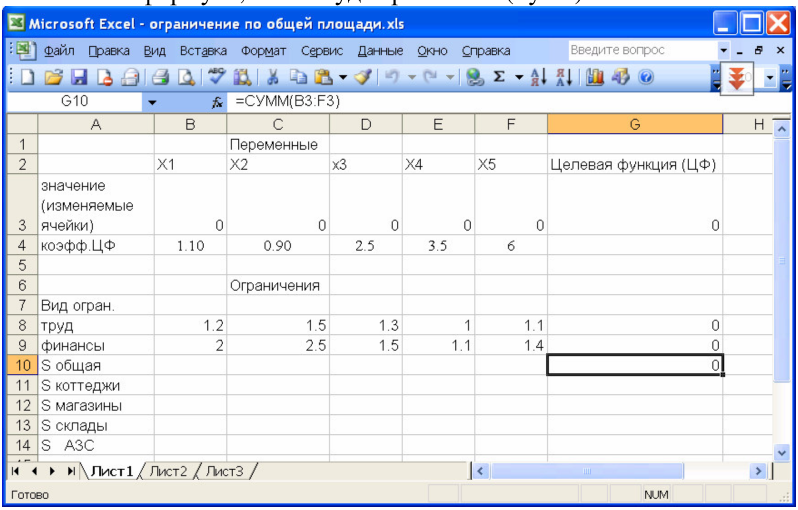




5) Поместим курсор в ячейку G9, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по финансовым ресурсам* =СУММПРОИЗВ(B3:F3,B9:F9). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение

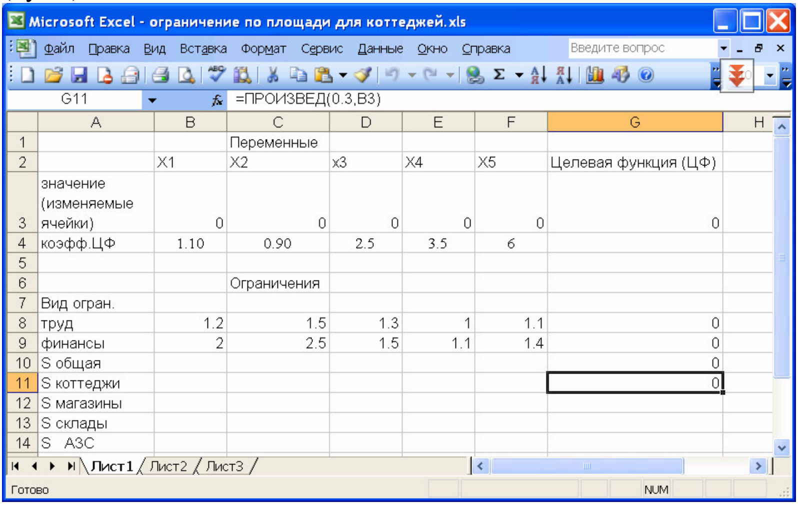
в ячейке G9 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).




6) Поместим курсор в ячейку G10, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по общей площади* =СУММ(B3:F3). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G10 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).



7) Поместим курсор в ячейку G11, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по площади для коттеджей* =ПРОИЗВЕД(0.3,B3). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G11 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).



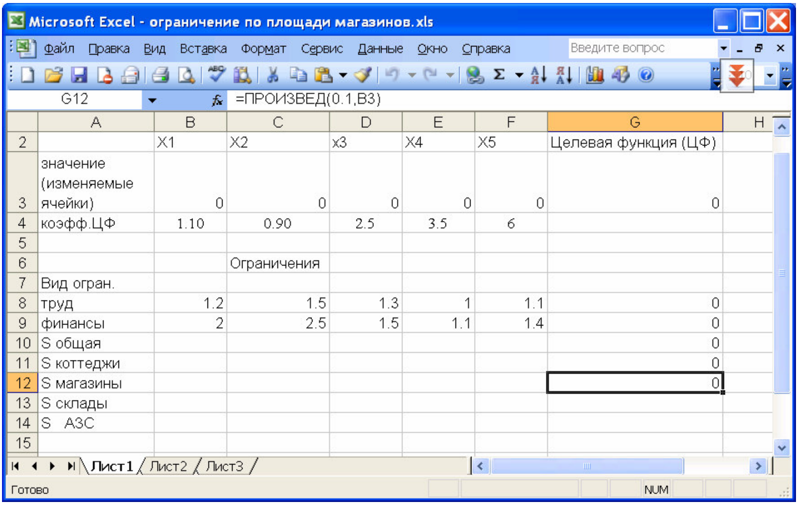

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Переменные | | | | | |
| 2 | | X1 | X2 | x3 | X4 | X5 | Целевая функция (ЦФ) | |
| 3 | значение (изменяемые ячейки) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | коэфф.ЦФ | 1.10 | 0.90 | 2.5 | 3.5 | 6 | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | Ограничения | | | | | |
| 7 | Вид огран. | | | | | | | |
| 8 | труд | 1.2 | 1.5 | 1.3 | 1 | 1.1 | 0 | |
| 9 | финансы | 2 | 2.5 | 1.5 | 1.1 | 1.4 | 0 | |
| 10 | S общая | | | | | | 0 | |
| 11 | S коттеджи | | | | | | 0 | |
| 12 | S магазины | | | | | | | |
| 13 | S склады | | | | | | | |
| 14 | S АЗС | | | | | | | |

8) Поместим курсор в ячейку G12, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по площади для магазинов* =ПРОИЗВЕД(0.1,B3). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G12 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).

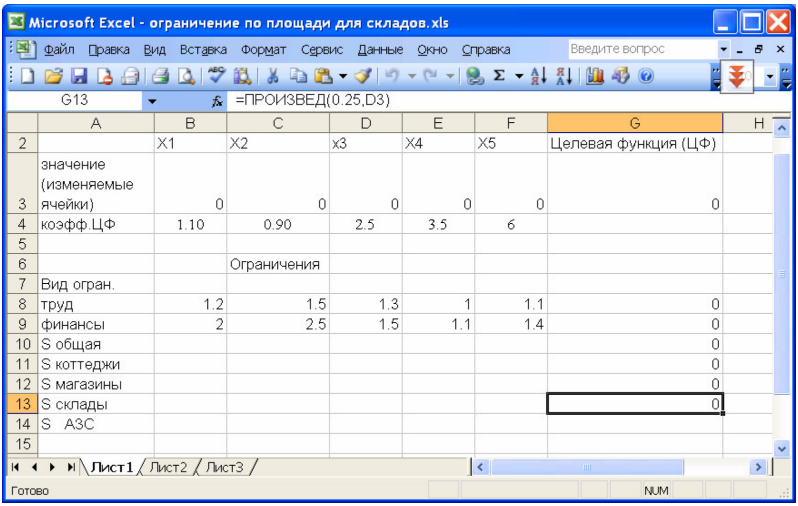
9) Поместим курсор в ячейку G13, запишем в ней формулу для вычисления *ограничения по площади для складов* =ПРОИЗВЕД(0.25,D3). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G13 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).

10) Поместим курсор в ячейку G14, запишем в ней формулу дл

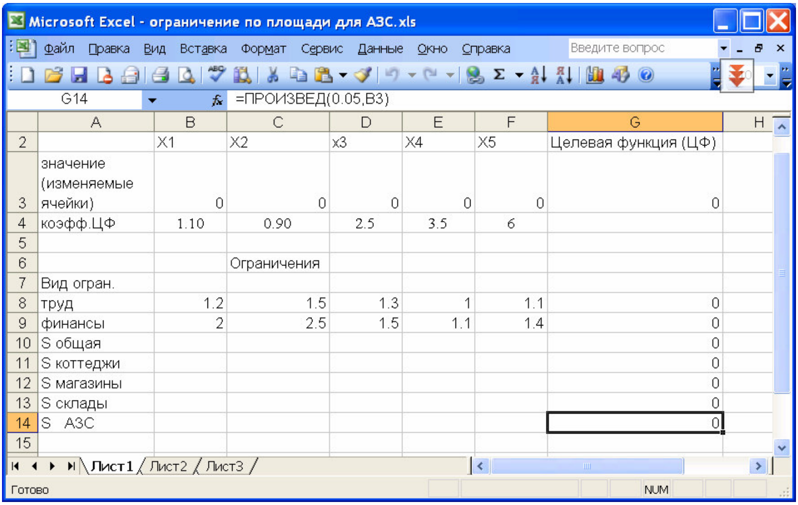
для вычисления *ограничения по площади для АЗС* =ПРОИЗВЕД(0.05,B3). Записанная формула будет автоматически набираться и в командной строке $f_x$ - вставка функции (можно производить запись формулы прямо в командной строке). После ввода формулы нажмём клавишу ввода (Enter). Начальное значение в ячейке G14 будет вычислено по записанной формуле, и оно будет равным 0 (нулю).



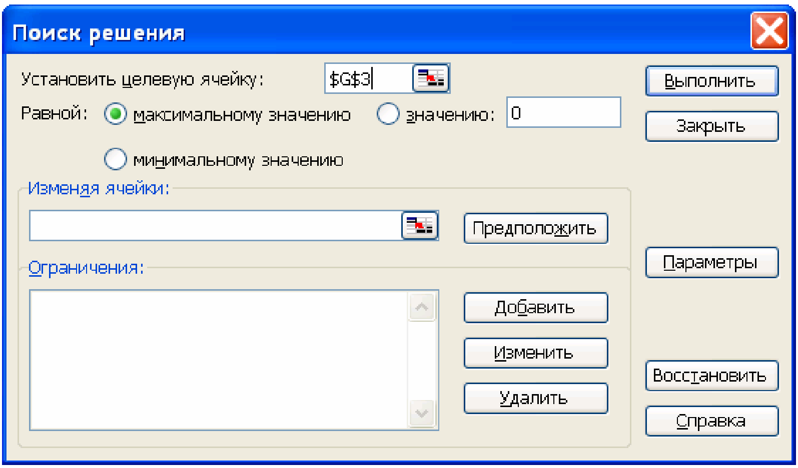

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | X1 | X2 | x3 | X4 | X5 | Целевая функция (ЦФ) | |
| 3 | значение (изменяемые ячейки) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | коэфф.ЦФ | 1.10 | 0.90 | 2.5 | 3.5 | 6 | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | Ограничения | | | | | |
| 7 | Вид огран. | | | | | | | |
| 8 | труд | 1.2 | 1.5 | 1.3 | 1 | 1.1 | 0 | |
| 9 | финансы | 2 | 2.5 | 1.5 | 1.1 | 1.4 | 0 | |
| 10 | S общая | | | | | | 0 | |
| 11 | S коттеджи | | | | | | 0 | |
| 12 | S магазины | | | | | | 0 | |
| 13 | S склады | | | | | | | |
| 14 | S АЗС | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |



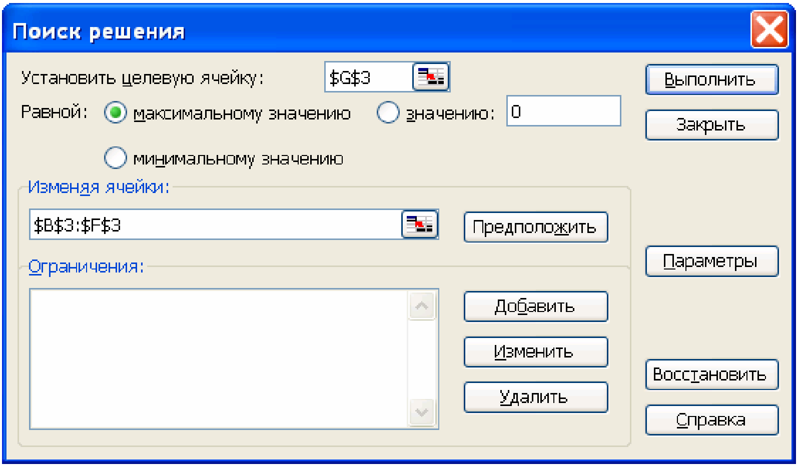

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | X1 | X2 | x3 | X4 | X5 | Целевая функция (ЦФ) | |
| 3 | значение (изменяемые ячейки) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | коэфф.ЦФ | 1.10 | 0.90 | 2.5 | 3.5 | 6 | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | Ограничения | | | | | |
| 7 | Вид огран. | | | | | | | |
| 8 | труд | 1.2 | 1.5 | 1.3 | 1 | 1.1 | 0 | |
| 9 | финансы | 2 | 2.5 | 1.5 | 1.1 | 1.4 | 0 | |
| 10 | S общая | | | | | | 0 | |
| 11 | S коттеджи | | | | | | 0 | |
| 12 | S магазины | | | | | | 0 | |
| 13 | S склады | | | | | | 0 | |
| 14 | S АЗС | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |




11) В меню рабочего листа выберем *Сервис* затем выберем *Поиск решения*. В форме *Поиск решения* установим целевую ячейку G3 и отметим её *равной максимальному значению*.

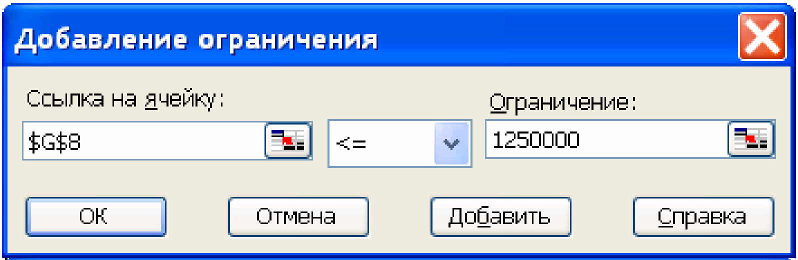


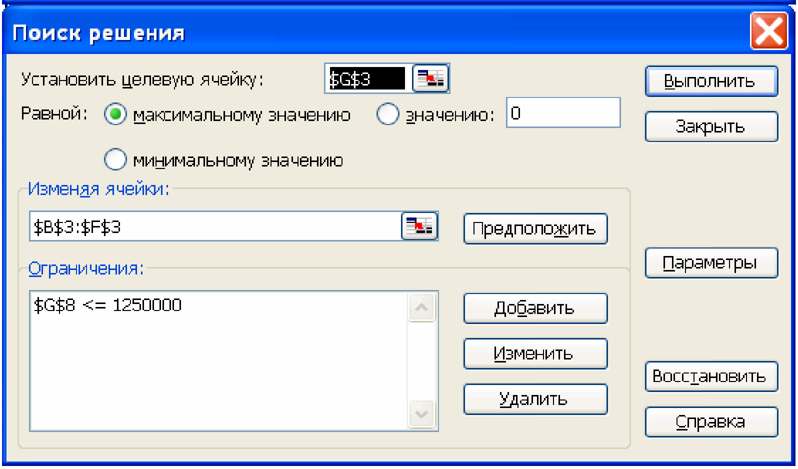

12) В форме *Поиск решения* установим *изменяя ячейки* B3:F3. Это ячейки в которых компьютером записываются текущие и будут записаны оптимальные значения переменных в соответствии с заданными ограничениями и целевой функцией.

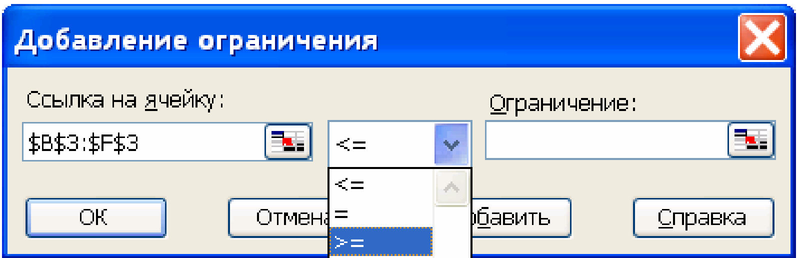


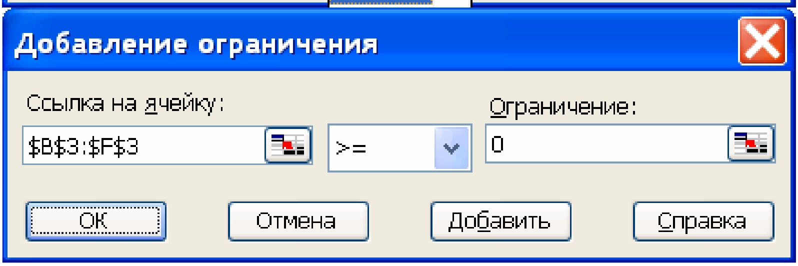

13) В форме *Поиск решения* установим курсор в окно *ограничения*. Нажмём в форме кнопку *Добавить*. Появится форма *Добавление ограничения*. Введём ограничение по трудовым ресурсам: в окне *ссылка на ячейку* сделаем запись ячейки G8. В следующем окне установим знак ≤ и в последнем окне запишем *Ограничение* 1250000. После этого нажмём «хорошо» (ок). Появится форма *Поиск решения* в которой уже будет занесено ограничение по трудовым ресурсам G8≤1250000. Снова нажмём в форме кнопку *Добавить* и точно также введём все остальные ограничения. Условия не отрицательности переменных можно вводить сразу для всех переменных, а не по отдельности для каждой. Для этого в окне *Ссылка на ячейку* формы *Добавление ограничения* необходимо ввести B3:F3 , затем установим знак ≥ и в окне *Ограничение* запишем 0. После этого нажмём «хорошо» (ок). Появится форма *Поиск решения* в которой уже будет занесено ограничение по условию неотрицательности всех переменных B3:F3≥0. Для того чтобы просмотреть все введённые ограничения в форме *Поиск решения* (если их не видно в окне *Ограничения*) можно использовать прокрутку, которая находится рядом с окном *Ограничения* в форме *Поиск решения*

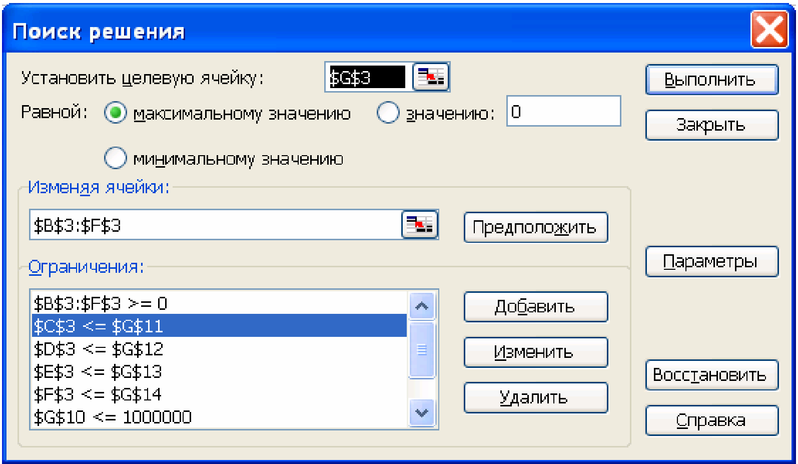
14) В форме *Поиск решения* нажимаем кнопку *Выполнить* появится форма *Результаты поиска решения* и одновременно все результаты поиска решения появятся на рабочем листе Excel. Для сохранения результатов на рабочем листе Excel в форме *Результаты поиска решения* нужно отметить *Сохранить найденное решение* и нажать кнопку «хорошо» (ок)

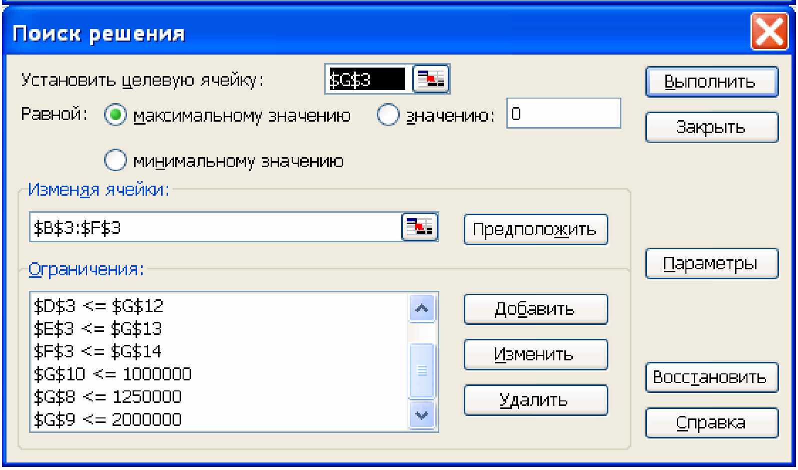

Добавление ограничения
Ссылка на ячейку:
$G$8
<=
Ограничение:
1250000
ОК
Отмена
Добавить
Справка

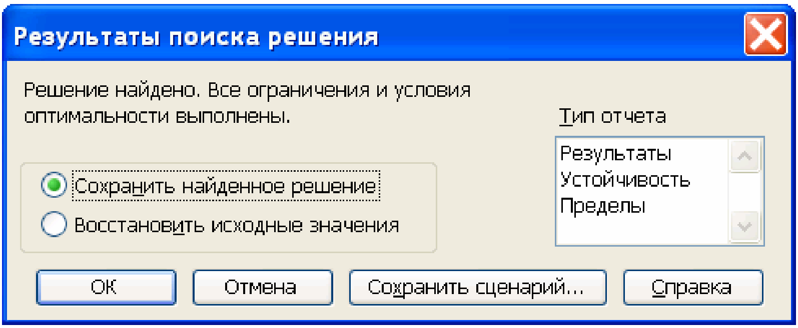

Поиск решения
Установить целевую ячейку:
$G$3
Выполнить
Равной:
максимальному значению
значению:
0
Закрыть
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$B$3:$F$3
Предположить
Параметры
Ограничения:
$G$8 <= 1250000
Добавить
Изменить
Восстановить
Удалить
Справка

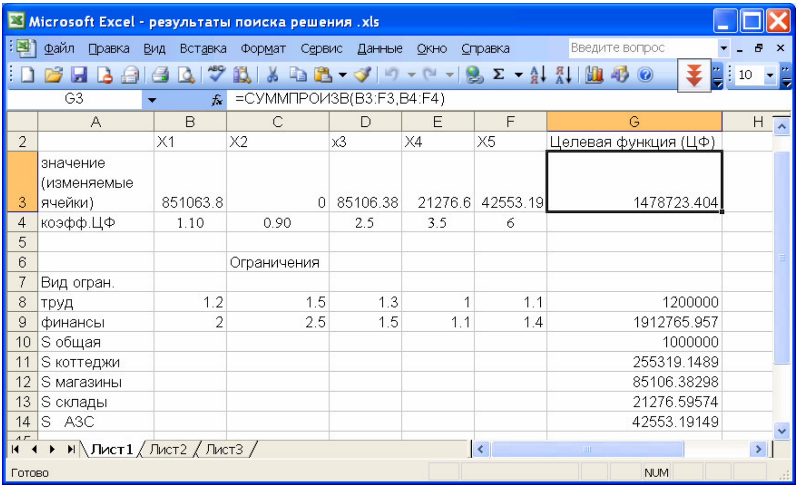

Добавление ограничения
Ссылка на ячейку:
$B$3:$F$3
<=
Ограничение:
<=
=
>=
ОК
Отмена
Добавить
Справка


Добавление ограничения
Ссылка на ячейку:
$B$3:$F$3
>=
Ограничение:
0
ОК
Отмена
Добавить
Справка


Поиск решения
Установить целевую ячейку:
$G$3
Равной:
максимальному значению
значению:
0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$B$3:$F$3
Предположить
Ограничения:
$B$3:$F$3 >= 0
$C$3 <= $G$11
$D$3 <= $G$12
$E$3 <= $G$13
$F$3 <= $G$14
$G$10 <= 1000000
Добавить
Изменить
Удалить
Выполнить
Закрыть
Параметры
Восстановить
Справка


Поиск решения
Установить целевую ячейку:
$G$3
Равной:
максимальному значению
значению:
0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$B$3:$F$3
Предположить
Ограничения:
$D$3 <= $G$12
$E$3 <= $G$13
$F$3 <= $G$14
$G$10 <= 1000000
$G$8 <= 1250000
$G$9 <= 2000000
Добавить
Изменить
Удалить
Выполнить
Закрыть
Параметры
Восстановить
Справка


Результаты поиска решения
Решение найдено. Все ограничения и условия
оптимальности выполнены.
Тип отчета
Результаты
Устойчивость
Пределы
Сохранить найденное решение
Восстановить исходные значения
ОК
Отмена
Сохранить сценарий...
Справка




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | X1 | X2 | x3 | X4 | X5 | Целевая функция (ЦФ) |
| 3 | значение (изменяемые ячейки) | 851063.8 | 0 | 85106.38 | 21276.6 | 42553.19 | 1478723.404 |
| 4 | коэфф.ЦФ | 1.10 | 0.90 | 2.5 | 3.5 | 6 | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | Ограничения | | | | |
| 7 | Вид огран. | | | | | | |
| 8 | труд | 1.2 | 1.5 | 1.3 | 1 | 1.1 | 1200000 |
| 9 | финансы | 2 | 2.5 | 1.5 | 1.1 | 1.4 | 1912765.957 |
| 10 | S общая | | | | | | 1000000 |
| 11 | S коттеджи | | | | | | 255319.1489 |
| 12 | S магазины | | | | | | 85106.38298 |
| 13 | S склады | | | | | | 21276.59574 |
| 14 | S АЗС | | | | | | 42553.19149 |

Все предлагаемые в учебном пособии оптимизационные задачи городского кадастра могут быть решены в пакете MS Excel с помощью надстройки *Поиск решения*. Дополнительно предлагается в пакете MS Excel с помощью надстройки *Поиск решения* выполнить ещё 5 заданий.

Задание 1.

Планируется застройка жилыми домами 53 га земли. На 1 га можно разместить 4 дома – первого вида, 6 домов – второго вида и сочетание домов первого и второго вида: 3 дома первого + 2 дома второго вида. В соответствии с проектом застройки территории домами первого вида нужно застроить не менее 8 га земли, домами второго вида – не менее 10 га, сочетанием домов первого и второго вида нужно застроить не менее 10, но не более 30 га земли. Общая площадь жилья в доме первого вида 18 000 м$^2$, себестоимость 1 м$^2$ в доме первого вида 10000 руб., цена продажи 1 м$^2$ для дома первого вида 15 000 руб. Общая площадь жилья в доме второго вида 7 000 м$^2$, себестоимость 1 м$^2$ в доме второго вида 15000 руб., цена продажи 1 м$^2$ для дома второго вида 20 000 руб. Сколько га земли нужно застроить домами первого вида, второго вида и сочетанием домов первого и второго вида, чтобы:

а) число м$^2$ общей площади жилья на 1 га застроенной территории было наибольшим;

б) общая себестоимость жилья была минимальной;

в) прибыль от продажи жилья была максимальной.

Задание 2.

На территории строящегося микрорайона запланировано провести мероприятия по его благоустройству. Проведён опрос потенциальных жителей микрорайона, по результатам которого определены коэффициенты важности для населения предлагаемых мероприятий по благоустройству. Так озеленение, освещение и укладка плитки на территории микрорайона были оценены коэффициентами важности 1,3; 1,5; 1,4 соответственно. На все мероприятия выделяется 189 000 рублей. При этом на озеленение запланировано вложить не менее 40 000 рублей, на освещение - не менее 90 000 рублей, на укладку плитки не менее 30 000 рублей, но не более 60 000 рублей. Необходимо составить оптимальный план мероприятий по благоустройству территории (сколько рублей направить на каждый вид благоустройства, чтобы ценность микрорайона для её потенциальных жителей увеличилась максимально).

Задание 3.

Застройщик разделил собственный массив незастроенной земли площадью в 60 га на участки по 15 соток, разработал 6 проектов благоустройства и застройки участков индивидуальными жилыми домами малой этажности, определил вероятный (предполагаемый) спрос населения на дома по типам проектов: первый проект – 50-80 домов, второй проект не – менее 100 домов, третий проект – 100-200 домов, четвёртый проект – не более 30 домов, пятый – не менее 50 домов, шестой – не менее 15 домов. Затраты на благоустройство и застройку одного участка по проектам составляют: первый – 1000 000 руб., второй – 900 000 рублей, третий – 1 500 000 рублей, четвёртый – 2 300 000 рублей, пятый 1 350 000 рублей, шестой – 2 100 000 рублей. Цена продажи одного застроенного и благоустроенного участка по проектам составляет: первый – 1100 000 руб., второй – 1 000 000 рублей, третий – 1 800 000 рублей, четвёртый – 2 450 000 рублей, пятый 1 420 000 рублей, шестой – 2 250 000 рублей. Сколько участков застроить по каждому проекту, чтобы получить максимальную прибыль (оптимизировать структуру застройки с учётом ограничений и целевой функции)

Задание 4.

В соответствии с составленной схемой районирования и планировки городской территории в течение трёх лет сносу подлежат частные дома малой этажности в трёх районах города. Владельцам недвижимости (земли и строений) установлен размер компенсационных выплат. По районам за 1 м$^2$ выплаты составят: первый район – 3000 руб., второй – 2500 руб., третий – 2300 рублей. На текущий год из городского бюджета для компенсационных выплат выделено 180 млн. руб. Площадь первого района 10 га, второго – 8 га, третьего – 9 га. Определить оптимальную структуру приобретения земель по районам города на текущий год, если с 1 м$^2$ площади приобретаемой земли после её застройки в городской бюджет планируется поступление ежегодного дохода по районам с 1 м$^2$: первый район – 6000 руб., второй – 4000 руб., третий – 3500 рублей.

Задание 5.

Планируется застраивать территорию тремя типами домов. Площадь занимаемая домом первого, второго и третьего типа с учётом нормативных расстояний между постройками составляет соответственно 100 м$^2$, 120 м$^2$ и 140 м$^2$. Общая площадь жилья в домах по типам составляет: первый – 190 м$^2$, второй – 140 м$^2$, третий – 210 м$^2$. Площадь застраиваемой территории 3 га. Домов первого типа должно быть построено не меньше 30, второго типа –не меньше 30, но не больше 60, а домов третьего типа – не больше 25. Стоимость строительства домов по типам: первый – 2 000 000 рублей, второй – 1 300 000 рублей, третий – 2 100 000 рублей. Цена реализации домов по типам: первый – 2 200 000 рублей, второй – 1 400 000 рублей, третий – 2 450 000 рублей. Выделяемая сумма для застройки территории составляет 120 млн. руб.

Оптимизировать структуру застройки территории так, чтобы:

1) отношение площади вводимого жилья к площади застраиваемой территории было максимальным (по отношению $S_ж/S_т$)
2) площадь вводимого жилья была максимальной (по площади вводимого жилья $S_ж$)
3) стоимость застройки была минимальной (по стоимости застройки)
4) прибыль от реализации домов была максимальной (по прибыли)
5) рентабельность застройки территории была максимальной (по отношению прибыли от реализации домов к стоимости застройки)

## Заключение

В каждом из трёх разделов пособия изложен минимальный, но достаточный для изучения основ используемого математического аппарата теоретический материал и методика выполнения расчетов в частности, описание методов вычисления площадей земельных участков, математических моделей выработки оптимальных решений при планировании земельно-устроительных, земельно-кадастровых работ, определении видов и объёмов продаж недвижимого имущества, определении площадей различных видов городской застройки, оптимизации использования застроенных и незастроенных территорий и т.д.

В пособии предлагаются задания для составления математических моделей задач городского кадастра и выполнения соответствующих вычислений. Приводятся примеры математической постановки предлагаемых задач городского кадастра, которые детально анализируются с содержательной интерпретацией полученных результатов. В качестве инструментального средства моделирования предлагаемых задач используется стандартная офисная программа Excel.

Предлагаемые в настоящем учебном пособии задачи городского кадастра и их математические модели позволяют принимать эффективные инженерные, экономические и организационные решения, и будут способствовать повышению качества обучения и подготовки специалистов для коммерческих организаций и государственных служб, регулирующих различные виды деятельности в сфере недвижимого имущества, застройки территорий и их благоустройства.

## Библиографический список

1. ***Брусенцев А.Г.*** Исследование операций и методы оптимизации: учебное пособие. - Белгород : Изд-во БелГТАСМ, 1998 -115 с.
2. Исследование операций в экономике: учебное пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман: Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера.- М.: Банки и биржи, ЮНИТИ,1997.-407 с.
3. ***Калугин В.А.*** Методы решения задач в среде Excel: учебное пособие. – Белгород.: Изд-во БелГТАСМ, 1999 – 58 с.
4. ***Струченков В. И.*** Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы: учебное пособие / В.И. Струченков. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005 -256 с.
5. ***Вентцель Е.С.*** Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 2-е изд. – М.: Наука,1988 - 210 с.
6. Экономико-математические методы и моделирование в городском кадастре: учебное пособие / Т.В. Папаскири, Федоринов А.В., Совалев А.В., Мишарин Ю.А.: Под. ред. Т.В. Папаскири. – М.: Изд-во ГУЗ, 2004. – 135 с.

Учебное издание

Шаптала Виталий Владимирович

**Математические модели в городском кадастре**

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60×84/16 Усл.печ.л. 4,3 Учеб. изд.л. 4,6

Тираж 55 экз. Заказ Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46