4. Векторная алгебра

Вариант 1.

1.1. Даны две точки $M(–5; 7; –6)$ и $N(7; –9; 9)$. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (1; -3; 1)$ на направление вектора $\overrightarrow{MN}$.

1.2. Вычислить работу силы $\vec{F}(3; -2; -5)$, приложенной к точке $A(2; –3; 5)$, при прямолинейном перемещении этой точки в положение $B(3; –2; –1)$.

1.3. Даны вершины треугольника ABC: $A(1; –1; 2)$, $B(4; 1; –2)$, $C(1; 3; –1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

1.4. Даны вершины тетраэдра $ABCD$: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; –2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(–5; –4; 8)$. Найти объем тетраэдра и длину его высоты, опущенной из вершины D.

1.5. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

Вариант 2.

2.1. Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{a} = (\alpha; -3; 2)$ и $\vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ взаимно перпендикулярны.

2.2. Сила $\vec{F}(3; 2; -4)$ приложена к мочке $M_0(4; –2; 3)$. Вычислить момент этой силы относительно точки $A(3; 2; –1)$.

2.3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, угол между которыми $\varphi = \pi / 3$.

2.4. Даны вершины пирамиды $OABC$: $O(0; 0; 2)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$. Вычислить ее объём, площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины O.

2.5. Какой угол составляют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны?

Вариант 3.

3.1. Даны вершины треугольника: $A(–1; –2; 4)$, $B(–4; –2; 0)$, $C(2; –2; 1)$. Найти его внутренний угол при вершине B.

3.2. Даны три силы $\vec{F}_1 = (2; -1; -3)$, $\vec{F}_2 = (3; 2; -1)$, $\vec{F}_3 = (-4; 1; 3)$, приложенные к точке C(–1; 4; –2). Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2; 3; -1)$.

3.3. Вектора $\vec{s}$ и $\vec{t}$ образуют угол $\varphi = \pi / 6$. Найти угол между векторами $\vec{p} = \vec{s} + \vec{t}$ и $\vec{q} = \vec{s} - \vec{t}$, если $|\vec{s}| = \sqrt{3}$, $|\vec{t}| = 1$.

3.4. Даны вершины пирамиды $OABC$: $O(2; 0; 0)$, $A(0; 3; 0)$, $B(0; 0; 6)$, $C(2; 3; 8)$. Вычислить ее объём и высоту, опущенную на грань ABC.

3.5. Доказать, что треугольник с вершинами $A(5; -4)$, $B(3; 2)$, $C(2; -5)$ является прямоугольным.

Вариант 4.

4.1. Доказать, что точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; -6)$ лежат в одной плоскости.

4.2. Найти работу равнодействующей трех сил $\vec{F}_1 = (3; -4; 2)$, $\vec{F}_2 = (2; 3; -5)$, $\vec{F}_3 = (-3; -2; 4)$, если точка их приложения перемещается прямолинейно из точки $M_1(5; 3; -7)$ в точку $M_2(4; -1; -4)$.

4.3. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = (\vec{p} \,\hat{,}\, \vec{q}) = \pi / 3$.

4.4. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

4.5. Вычислить коэффициенты α и γ, если известно, что векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \gamma\vec{k}$ коллинеарны.

Вариант 5.

5.1 Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

5.2. Сила $\vec{F} = (3; 2; -4)$ приложена к точке $A(2; -1; 1)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

5.3. Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi / 6$. Вычислить угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$.

5.4. Даны вершины пирамиды *ABCD*: *D*(1; –2; 3), *A*(3; 4; –5), *B*(0; 2; 0), *C*(5; 0; 0). Вычислить объём пирамиды, площадь грани *ABC* и высоту пирамиды, опущенную из вершины *D*.

5.5. Найти аппликату вектора $\vec{p}$, если известны две его координаты $x = 3$, $y = -9$ и длина $|\vec{p}| = 12$.

Вариант 6.

6.1. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

6.2. Вычислить работу силы $\vec{F} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, если точка её приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

6.3. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(1; –2; 8), *B*(0; 0; 4), *C*(6; 2; 0). Вычислить его площадь и высоту, опущенную из вершины *B* на сторону *AC*.

6.4. Даны вершины тетраэдра *ABCD*: *A*(0; 0; 0), *B*(3; 4; –1), *C*(2; 3; 5), *D(*6; 0; –3). Найти его объем, площадь грани *BCD* и высоту, опущенную из вершины *A*.

6.5. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 5\vec{n} + \vec{p}$, если $\vec{m} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Вариант 7.

7.1. Даны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

7.2. Сила $\vec{F} = (2; 2; 9)$ приложена к мочке *A*(4; –2; 3). Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки *C*(2; 4; 0).

7.3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \pi/6$.

7.4. Даны вершины пирамиды *ABCD*: *D*(5; 0; 3), *A*(2; 1; 5), *B*(4; 0; 8), *C*(6; –2; 6). Вычислить объём пирамиды, площадь грани *ABC* и высоту, опущенную из вершины *D* на эту грань.

7.5. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Найти вектор $\vec{c}$, который перпендикулярен оси *Oz* и удовлетворяет условиям $(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$, $(\vec{c} \cdot \vec{b}) = -4$.

Вариант 8.

8.1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(3; 2; –3), *B*(5; 1; –1), *C*(1; –2; 1). Вычислить его внешний угол при вершине *A*.

8.2. Сила $\vec{F} = (3;\ 4;\ -2)$ приложена к точке *C*(2; –1; –2). Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

8.3. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми $\varphi = 2\pi/3$.

8.4. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках: *O*(0; 0; 0), *A*(5; 2; 0), *B*(2; 5; 0), *C*(1; 2; 4). Вычислить ее объём, площадь грани *ABC* и высоту, опущенную на грань *ABC*.

8.5. К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120°, причем $|\vec{P}| = 7$, $|\vec{Q}| = 4$. Найти величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

Вариант 9.

9.1. Доказать, что четыре точки *A*(1; 2; –1), *B*(0; 1; 5), *C*(–1; 2; 1) и *D*(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

9.2. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$, если $|\vec{F}| = 2$, $|\vec{S}| = 5$, $\varphi = (\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{S}) = \pi/6$.

9.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\pi/4$.

9.4. Объем тетраэдра V = 10, три его вершины находятся в точках A(1; 2; –1), B(4; 8; –7), C(–1; 2; –2). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

9.5. Вычислить длину вектора $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – взаимно перпендикулярные векторы, α, β, γ – соответствующие проекции.

Вариант 10.

10.1. Даны три вектора: $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Найти $\text{Пр}_{\overrightarrow{(b+c)}}\vec{a}$.

10.2. Сила $\vec{F}=(3;\,4;\,-2)$ приложена к точке A(2; –1; 3). Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

10.3. Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми $\varphi=\pi/3$.

10.4. Вычислить объём тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна a.

10.5. Вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b}=(-12;\,16;\,15)$, составляет с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $|\vec{a}|=100$.

Вариант 11.

11.1. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}=(-3;\,1;\,-4)$ и удовлетворяющего условию $(\vec{b}\cdot\vec{a})=78$.

11.2. Сила $\vec{F}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ приложена к точке A(–1; –3; 4). Найти момент этой силы относительно начала координат.

11.3. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках A(–2; 1; 2), B(1; 0; 9), C(3; –3; 4).

11.4. Вершины тетраэдра находятся в точках A(1; 1; 1), B(2; 0; 2), C(2; 2; 2), D(3; 4; –3). Найти высоту $h = DE$.

11.5. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1;\ 1;\ 2)$ и $\vec{b} = (2;\ 1;\ 1)$.

Вариант 12.

12.1. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (-2;\ 3)$, имеющего длину $|\vec{b}| = \sqrt{52}$.

12.2. Сила $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ приложена к точке M(2; 1; 5). Найти момент этой силы относительно точки A(–1; 3; 4).

12.3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{b} = -\vec{m} + 4\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\varphi = (\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = 150^\circ$.

12.4. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках: D(3; 7; 2), A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3). Найти высоту, опущенную на грань BCD.

12.5. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$, если известно $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Вариант 13.

13.1. Дан вектор $\vec{a} = (1;\ 3;\ 4)$. Найти коллинеарный ему вектор, начало которого совпадает с точкой A(1; 2; 8), а конец с точкой B, лежащей в плоскости xOy.

13.2. Найти работу равнодействующей двух сил $\vec{F_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{F_2} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ при прямолинейном перемещении точки их приложения из начала координат в точку A(3; 2; 1).

13.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 8\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 3\pi/4$.

13.4. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, опущенную на грань, образованную векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

13.5. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ составляет с осью Oz тупой угол. Найти его координаты, если $|\vec{c}| = 3$.

Вариант 14.

14.1. Даны векторы $\vec{a} = (6;\,-8;\,5\sqrt{2})$ и $\vec{b} = (2;\,-4;\,\sqrt{2})$. Найти угол, который составляет вектор $\vec{a} - \vec{b}$ с осью Oz.

14.2. Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке $A(4;\,-2;\,3)$. Найти момент этой силы относительно точки $O(3;\,2;\,-1)$.

14.3. Найти площадь треугольника ABC, если его вершины находятся в точках $A(11;\,2;\,-5)$, $B(2;\,-1;\,7)$, $C(-2;\,1;\,3)$.

14.4. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(1;\,2;\,3)$, $B(-2;\,4;\,1)$, $C(7;\,6;\,3)$, $D(4;\,-3;\,-1)$. Найти высоту, опущенную на грань ABC.

14.5. Вектор $\vec{a}$, коллинеарный к вектору $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ составляет с осью Oz острый угол. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = 129$.

Вариант 15.

15.1. Найти координаты единичного вектора $\vec{c}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a} = (1;\,1;\,0)$ и $\vec{b} = (0;\,1;\,1)$.

15.2. Вычислить работу силы $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1;\,2;\,0)$ в положение $B(2;\,1;\,3)$.

15.3. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{p} - \vec{q}$ и $4\vec{p} - 5\vec{q}$, если $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\varphi = (\vec{p} \,\hat{,}\, \vec{q}) = \pi / 4$.

15.4. Объем тетраэдра $V = 12$, три его вершины находятся в точках $A(2;\,3;\,1)$, $B(4;\,1;\,-2)$, $C(6;\,3;\,7)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

15.5. Найти координаты единичного вектора, который лежит на биссектрисе угла, образованного векторами $\vec{a}=(-2;\,3;\,6)$ и $\vec{b}=(6;\,-7;\,-6)$.

Вариант 16.

16.1. Найти угол между векторами $-9\vec{a}$ и $\vec{b}/9$, если $\vec{a}=(2;\,1;\,-2)$, $\vec{b}=(5;\,-1;\,1)$.

16.2. Объем тетраэдра $V = 2$, три его вершины находятся в точках $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(2;\ -1;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ -1)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

16.3. Про векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=9$ и $(\vec{a}\cdot\vec{b})=27$. Найти модуль векторного произведения $\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|$.

16.4. Найти коэффициенты α и β, если известно, что векторы $\vec{a}=(1;\,-2\alpha;\,3)$ и $\vec{b}=(3;\,12;\,\beta)$ коллинеарны.

16.5. Даны три вектора: $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

Вариант 17.

17.1. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, если известно $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=7$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

17.2. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условию $(\vec{x}\cdot\vec{a})=9$, $(\vec{x}\cdot\vec{b})=-4$, $(\vec{x}\cdot\vec{k})=0$, где $\vec{k}=(0;\,0;\,1)$.

17.3. Сила $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ приложена к точке $A(2;\ -1;\ 1)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

17.4. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен 30°. Найти $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, если известно, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$.

17.5. В тетраэдре объемом V = 12 вершины находятся в точках A(1; 1; 1), B(2; 0; 2), C(2; 2; 2), D(3; 4; –3). Найти высоту $h = DE$.

Вариант 18.

18.1. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} - 2\vec{b})^2 + (3\vec{a} - \vec{b})^2 = 110$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$.

18.2. Найти проекцию вектора $2\vec{m} - \vec{n}$ на вектор $3\vec{m} + 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\varphi = (\vec{m} \,\hat{,}\, \vec{n}) = 120^\circ$.

18.3. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, связанных соотношением $\vec{a} = [\vec{b} \times \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c} \times \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$. Найти длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и угол между ними.

18.4. Стороны треугольника ABC лежат на векторах $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 0; 1)$, найти длину высоты $\overrightarrow{AD}$.

18.5. В тетраэдре объемом V = 2 вершины находятся в точках A(3; 2; 5), B(2; 4; 1), C(3; –10; 17). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

Вариант 19.

19.1. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4|\vec{b}|$ и вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} + 5\vec{b}$.

19.2. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

19.3. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

19.4. Вершины тетраэдра находятся в точках A(5; 1; –4), B(1; 2; –1), C(3; 3; –4), D(2; 2; 2). Найти его объем.

19.5. Сила $\vec{F} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$ приложена к точке $A(1;\ 1;\ 1)$. Найти момент этой силы относительно начала координат, а так же направляющие косинусы этого момента.

Вариант 20.

20.1. Найти длину векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а так же угол α между ними, если $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{b} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2}$, $|\vec{e_1}| = 2$, $|\vec{e_2}| = 1$, $\varphi = (\vec{e_1} \,\hat{,}\, \vec{e_2}) = 60^\circ$.

20.2. Вычислить, при каком значении λ векторы $\vec{a} = 7\vec{i} + 8\vec{j} - \lambda\vec{k}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

20.3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 8\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 120^\circ$.

20.4. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(7;\ 6;\ 3)$, $D(4;\ -3;\ -1)$. Найти объём тетраэдра, площадь грани ABC и высоту, которая опущена на грань ABC.

20.5. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(3;\ 4;\ 2)$ до прямой, которая проходит через точку $B(1;\ 2;\ 3)$, параллельно вектору $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$.

Вариант 21.

21.1. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Oz, и удовлетворяющий условию $(\vec{x} \cdot \vec{a}) = 9$, $(\vec{x} \cdot \vec{b}) = -4$.

21.2. Сила $\vec{F} = \vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$ приложена к точке $C(4;\ 2;\ 1)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(1;\ 3;\ -4)$.

21.3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(2;\ -4;\ 5)$, $C(3;\ -2;\ -1)$.

21.4. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ -1;\ 0)$, $C(3;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 1;\ 3)$. Найти его объём, площадь грани ABC и высоту тетраэдра, опущенную из вершины D.

21.5. Векторы $\overrightarrow{AB} = (2;\ 6;\ -4)$ и $\overrightarrow{AC} = (4;\ 2;\ -2)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

Вариант 22.

22.1. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – единичные; $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 60^\circ$, а вектор $\vec{c}$ им перпендикулярен. Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

22.2. Даны три силы $\vec{F}_1 = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{F}_2 = (3;\ 2;\ -1)$, $\vec{F}_3 = (-4;\ 1;\ 3)$, приложенные к точке С(–1; 4; –2). Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(2; 3; –1).

22.3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 150^\circ$.

22.4. Вершины пирамиды находятся в точках A(4; –2; 3), B(3; 1; 5), C(2; –5; 1), D(7; 3; 5). Найти объём пирамиды, площадь грани ABC и ее высоту, опущенную из вершины D.

22.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi / 6$. Зная $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Вариант 23.

23.1. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

23.2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеют равные длины и составляют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

23.3. Сила $\vec{F} = (3;\ 5;\ -7)$ приложена к точке M_0(5; –3; 9). Найти момент этой силы относительно точки A(4; –1; 8).

23.4. Вершины пирамиды находятся в точках A(5; 3; 2), B(4; –1; 4), C(6; 4; 1), D(3; 0; 4). Найти ее объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную из вершины D.

23.5. Векторы $\vec{a}$ коллинеарный вектору $\vec{b} = -12\vec{i} + 16\vec{j} + 15\vec{k}$, составляет с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что $|\vec{a}| = 100$.

Вариант 24.

24.1. Найти проекцию вектора $2\vec{m}-\vec{n}$ на вектор $3\vec{m}+2\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $\varphi=(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n})=2\pi/3$.

24.2. Даны два вектор $\vec{a}$ = (1; 0; 1) и $\vec{b}$ = (5; 2; 4). Найти единичный вектор $\vec{e}$, который лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и составляет угол $\varphi=45^\circ$ с вектором $\vec{a}$.

24.3. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+9\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=150^\circ$.

24.4. Объемом тетраэдра V = 2, три его вершины находятся в точках A(1; 2; –1), B(2; –1; 1), C(–1; 2; –2). Найти координаты его четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

24.5. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$, определить модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Вариант 25

25.1. Найти коэффициенты α и β, если известно, что вектора $\vec{i}-2\alpha\vec{j}+3\vec{k}$ и $3\vec{i}+12\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны.

25.2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат в одной плоскости и составляют попарно друг с другом углы, каждый из которых равен 120°. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=2$.

25.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}-5\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}-6\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\pi/6$.

25.4. Вершины пирамиды находятся в точках A(1; 2; –3), B(0; 1; 0), C(3; 0; 0), D(1; –4; 2). Найти ее объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную из вершины D.

25.5. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно-перпендикулярным ортам:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длины медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

Вариант 26

26.1. Дано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

26.2. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 2)$, $C(2;\ 2;\ 2)$, $D(3;\ 4;\ -3)$ вычислить высоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

26.3. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.

26.4. Вычислить работу силы $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1;\ 2;\ 0)$ в положение $B(2;\ 1;\ 3)$.

26.5. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(0;\ 1;\ 3)$, $B(-4;\ 7;\ 8)$, $C(6;\ -2;\ 4)$, $D(-1;\ 5;\ 4)$. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 27

27.1. Вычислить какую работу производит сила $\vec{F} = (3;\ -5;\ 2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = (2;\ -5;\ 7)$.

27.2. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$, образующий с осью Oy тупой угол, если его длина $|\overrightarrow{x}| = 26$.

27.3. Для заданных векторов $\vec{a} = (2,\ 1,\ -1)$, $\vec{b} = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{c} = (3,\ 4,\ 1)$ вычислить проекцию вектора $[\vec{a} \times \vec{b}]$ на вектор $[(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}]$.

27.4. Объем тетраэдра $V = 12$, три его вершины находятся в точках $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

27.5. Даны векторы $\vec{a} = (4, -2, -4)$ и $\vec{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить $\sqrt{\vec{a}^2}$ и $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

Вариант 28

28.1. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

28.2. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, если известно, что $\left|\vec{p}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\vec{q}\right| = 3$, $\varphi = (\vec{p} \,\hat{,}\, \vec{q}) = \pi / 4$.

28.3. При каком λ векторы $\vec{a} = (\lambda; 3; 1)$, $\vec{b} = (1, \lambda, 0)$, $\vec{c} = (0, \lambda, 1)$ будут компланарны?

28.4. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

28.5. Вершины треугольника находятся в точках $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Вариант 29

29.1. Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 20$ и $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$.

29.2. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -1; 2)$, $C(-5; 6; -4)$. BD – его высота, проведенная из вершины B на сторону AC. Найти координаты точки D.

29.3. Даны вершины пирамиды $OABC$: $O(2; 0; 0)$, $A(0; 3; 0)$, $B(0; 0; 6)$, $C(2; 3; 8)$. Вычислить ее объём и высоту, опущенную на грань ABC.

29.4. Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{a} = (\alpha; -3; 2)$ и $\vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ взаимно перпендикулярны.

29.5. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 26$, $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 72$ Вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Вариант 30

30.1. Даны вершины четырехугольника: $A(1;\ –2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(–4;\ 1;\ 1)$, $D(–5;\ –5;\ 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

30.2. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

30.3. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(5;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 5;\ 0)$, $C(1;\ 2;\ 4)$. Вычислить ее объём, площадь грани ABC и высоту, опущенную на грань ABC.

30.4. Дан модуль вектора $\left|\vec{a}\right| = 2$ и углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

30.5. Даны три силы $\vec{F}_1 = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{F}_2 = (3;\ 2;\ -1)$, $\vec{F}_3 = (-4;\ 1;\ 3)$, приложенные к точке С(–1; 4; –2). Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;\ 3;\ –1)$.