ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Белгородский государственный технологический университет им В.Г. Шухова

**Утверждено
научно-методическим советом
университета**

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-ГО КУРСА ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ

Белгород 2015

Глава 1. Матрицы и определители

1.1.Понятие матрицы

Прямоугольная таблица, состоящая из чисел, расположенных в m строках и n столбцах, называется матрицей. Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами, например: $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$.

Числа m и n называются порядками матрицы. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n , иначе – прямоугольной. Числа a_{ij}, входящие в состав матрицы, называются ее элементами, причем

i – номер строки, j – номер столбца.

Строчная матрица имеет размер $1 \times n$, а столбцовая матрица – $m \times 1$.

Матрица A' , полученная из матрицы A заменой в ней строк на столбцы с сохранением порядка их следования, называется транспонированной. Очевидно, что $(A')' = A$.

Главная диагональ квадратной матрицы – воображаемая прямая, проходящая через элементы с одинаковыми индексами из левого верхнего в правый нижний ее угол. Эти элементы – диагональные. Побочная диагональ – прямая, идущая из правого верхнего в нижний левый угол матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны 0 , называется диагональной. Среди диагональных элементов может быть и нулевые.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, например: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

1.2. Основные операции над матрицами

Две матрицы называются равными, если эти матрицы имеют одинаковые порядки и все соответствующие их элементы совпадают.

Произведением матрицы A размером $m \times n$ на действительное число α называется матрица C размером $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Умножение матриц на число обладает следующими свойствами: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$; $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$; $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

Суммой двух матриц *A* и *B* размером $m \times n$ называется матрица *C* размером $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Очевидно, что сложение матриц обладает следующими свойствами: $A + B = B + A$; $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Произведением $m \times k$ матрицы *A* на $k \times n$ матрицу *B* называется $m \times n$ матрица *C*, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений элементов *i* строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j* столбца матрицы *B:* $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$.

Произведение матриц $A \cdot B$ имеет смысл в том случае, если число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*. В общем случае $AB \neq BA$, т. е. произведение некоммутативно.

Свойства произведения матриц:

1. $AE = EA = A$ (единичная матрица *E* – как 1 при умножении чисел);
2. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативно;
3. $(A+B)C = AC + BC$ дистрибутивный закон.

Пример 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$, $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ -1\cdot 1 - 2\cdot(-1) & -1\cdot 2 - 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.3. Определители второго и третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу порядка *n*: $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Каждой такой матрице поставим в соответствие определенное число, называемое определителем этой квадратной матрицы. Если порядок равен единице, то матрица состоит из одного числа, и определителем первого порядка назовем величину этого элемента.

Если порядок матрицы равен двум, т.е. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то определителем второго порядка назовем число, равное $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ и обозначаемое следующим образом: $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Например, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=4\cdot 0-1\cdot 2=-2$; $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 4=0$.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ назовем число, равное:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+$$

$$+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot3\cdot1+0\cdot0\cdot1+1\cdot2\cdot2-0\cdot3\cdot2-1\cdot0\cdot1-1\cdot2\cdot1=5\cdot$

1.4. Основные свойства определителей

Свойства определителей рассмотрим на примере определителей третьего порядка, хотя все свойства справедливы для определителей любого порядка.

1. При транспонировании определителя величина определителя не меняется, т.е. $|A|=|A'|$. Напомним, что транспонирование – замена его строк столбцами. Для доказательства следует расписать определители в правой и левой частях равенства: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$. Значит, строки и столбцы в определителе

равноправны и если выполняются некоторые свойства для столбцов, то такое же свойство существует и для строк.

2. Если в определителе поменять местами какие-нибудь две строки, то определитель сохраняет свою абсолютную величину, но изменит знак на противоположный.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$. Это также доказывается проверкой.

3. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.

Пусть $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Если переставить 2 и 3 строчки, то по свойству «2» получим $-|A|$, то есть $|A| = -|A|$, отсюда $|A| = 0$.

4. Общий множитель, содержащийся во всех элементах строки, можно вынести за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Это также доказывается проверкой.

5. Определитель, имеющий нулевую строку (все элементы которой равны нулю), равен нулю.

Для доказательство: в п.4 положим $\lambda = 0$.

6. Если все элементы какой-либо строки состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых элементами этой строки являются первые слагаемые, во втором – вторые, а остальные элементы такие же, как и в данном определителе:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это также доказывается проверкой.

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на любое число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

т. к. второй определитель равен нулю.

Следствие: определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух его строк пропорциональны.

Свойство 7 можно обобщить: если элементы какого-либо столбца определителя является линейной комбинацией других его столбцов, то определитель равен нулю. Если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю.

1.5. Алгебраические дополнения

Минором любого элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка будем называть определитель порядка $n-1$, соответствующий матрице, которая получена из данной вычеркиванием строчки с номером *i* и столбца с номером *j*, на пересечении которых находится данный элемент. Минор элемента a_{ij} будем обозначать $\overline{M}{}^{i}_{j}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} назовем число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \overline{M}{}^{i}_{j}$

Тогда сформулируем свойство 8 определителей:

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на алгебраические дополнения этих элементов.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$$

Последнее свойство определителей:

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

1.6. Ранг матрицы

Пусть имеется прямоугольная матрица размером m на n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Если в этой матрице выделить k строк и k столбцов, то мы получим квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется минором k – го порядка матрицы A. Среди этих миноров найдется хотя бы один, отличный от нуля, минор старшего порядка. Порядок наибольшего минора, отличного от нуля, называется рангом матрицы $r(A)$. Тот минор r-го порядка, который отличен от нуля, назовем базисным минором (у матрицы A может быть несколько миноров r-го порядка, которые отличены от нуля). Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, назовем соответственно базисными строками и базисными столбцами.

Свойства ранга:

1. Ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, т.к. строки и столбцы равноправны в отношении ранга.
2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее строк.
3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов какой-либо строки на отличное от нуля число.
4. Ранг матрицы не меняется, если к одной из ее строк прибавить другую строку, умноженную на некоторое число.
5. Ранг матрицы не меняется, если удалить нулевую строку.
6. Ранг матрицы не меняется, если удалить строку, являющейся линейной комбинацией другой строки.

Напомним, что элементарными называются следующие преобразования матриц:

- Перестановка двух любых строк и столбцов;
- Умножение строки или столбца на число отличное от нуля;
- Прибавление к одному столбцу или строке линейной комбинации других столбцов или строк.

Элементарное преобразование не меняет ранг матрицы (это следует из свойств).

Канонической называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоит подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Рассмотрим другой метод вычисления ранга матрицы, называемый методом окаймляющих миноров. В рассматриваемой матрице находим элемент, отличный от нуля, тогда ранг матрицы не меньше единицы. Затем выбираем минор второго порядка (определитель), отличный от нуля и содержащий выбранный ранее элемент. Если такой минор существует, то ранг матрицы не менее двух. Далее выбираем минор 3-его порядка, отличный от нуля, в который входит минор второго порядка. Если такой минор 3-его порядка существует, то ранг матрицы не менее трех, и т.д.

1.7. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Считаем, что матрица A – невырожденная, т.е. ее определитель отличен от нуля.

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если выполняются равенства:

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица порядка n.

<u>Теорема</u>. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Получим формулу для обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Вычислить обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0.$ Алгебраические дополнения: $A_{11} = 3; A_{12} = -(-1) = 1, A_{21} = -2; A_{22} = 1.$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $\det A = 8;\ A_{11} = 2;\ A_{21} = 4;\ A_{31} = (-2);\ A_{12} = (-3);\ A_{22} = (-6);\ A_{32} = 7;$

$$A_{13} = 3;\ A_{23} = -2;\ A_{33} = 1,\quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0-3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) = A^{-1}$$

Глава 2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.1. Основные понятия и определения

В общем случае система n линейных с неизвестными уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Через $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначены неизвестные, подлежащие определению; величины $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$, называемые коэффициентами системы, и величины $b_1, b_2, ..., b_n$, называемые свободными членами, предполагаются известными. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых указывает номер уравнения, а второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент. Решением системы называется всякая совокупность чисел $c_1, c_2, ..., c_n$, которая, будучи подставлена в систему вместо неизвестных, превращает все уравнения системы в тождества. Система уравнений называется совместной, если она имеет хоты бы одно решение и несовместной, если она не имеет решений. Будем говорить, что совместная система – определенная**,** если она имеет единственное решение и неопределенная*,* если она имеет более одного решения.

2.2. Условие совместимости СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему (10). Матрицей этой системы будем называть матрицу, составленную из ее коэффициентов: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Если к этой матрице добавить столбец свободных членов, получим расширенную матрицу: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \cdot b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \cdot b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}$

<u>Теорема Кронекера–Капелли</u>. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы.

<u>2.3. Правило Крамера решения СЛАУ</u>

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (2.1).

Введем матрицу неизвестных X $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$:, и матрицу свободных членов *B*: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Считаем, что определитель матрицы системы (2.1) $\Delta \neq 0$. Систему (2.1) можно заменить матричным уравнением: $A \cdot X = B$.

Умножим матричное уравнение слева на обратную матрицу A^{-1}: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$; поскольку $A^{-1} \cdot A = E$; тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Используя формулу для обратной матрицы и введя обозначения: $\Delta_i = b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \dots + b_n \cdot A_{ni}$ получаем формулы Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Определитель Δ_i получается из определителя системы Δ заменой его i столбца столбцом свободных членов (если расписать определитель Δ_i по i столбцу, мы получим формулу Крамера .

Например, для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными: если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Пример 2.1. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

Необходимо вычислить четыре определителя по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 - 2 - 1 - 3 + 8 = -6;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 3 - 30 - 5 + 12 + 12 = -6\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 12 + 10 - 3 + 15 - 16 = 12;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 - 8 - 4 - 3 + 20 = -6;$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{-6} = -2;\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1$.

Проверкой убеждаемся в правильности вычислений.

2.4. Метод Гаусса

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (2.1). Метод Гаусса представляет собой систематизированную схему последовательного исключения неизвестных. Пусть $a_{11} \neq 0$ (иначе переставим местами уравнения). С помощью первого уравнения исключим переменную x_1 из второго и последующих уравнений. Для этого от второго уравнения отнимем первое, умноженное на $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, от третьего – первое, умноженное на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и т.д. Получим систему уравнений с новыми коэффициентами. Пусть $a'_{22} \neq 0$, тогда аналогично исключим x_2 из третьего и последующих уравнений. Для этого умножим второе уравнение на $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ и вычтем полученный результат из третьего, из четвертого уравнения вычтем второе, умноженное на $\frac{a'_{42}}{a'_{22}}$ и т.д. Продолжив дальнейшее исключение неизвестных, получим систему с так называемой треугольной матрицей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Эта процедура называется прямым ходом метода Гаусса. Далее начинаем обратный ход метода Гаусса, т.е. нахождение неизвестных. Находим x_n из последнего уравнения, затем найденное значение x_n подставляем в предпоследнее уравнение и определяем x_{n-1}. Найденные значения x_n и x_{n-1} подставляем в (n – 2)-е уравнение и находим x_{n-2}. Продолжая этот процесс, определяем остальные неизвестные системы.

Мы полагали, что $a'_{22} \neq 0$. Однако, при данных преобразованиях мы можем получить уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a$, в котором все коэффициенты при неизвестных равны 0. При этом возможны два случая.

Если $a = 0$, то система имеет бесконечное количество решений. При этом одно (или несколько) уравнений являются следствием остальных.

Если $a \neq 0$, то система не имеет решений.

Как отыскивать решения системы в первом случае, будет указано в следующем пункте. При решении систем линейных уравнений методом Гаусса удобно приводить к треугольному (или ступенчатому) виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример 2.2. Решить систему из примера 2.1 методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:
$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\2&1&3&3\\-1&1&-2&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&5&11\\-1&1&-2&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&5&11\\0&3&-3&-9\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&5&11\\0&0&2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&5&11\\0&0&1&1\end{array}\right)$$
. В результате прямого хода матрица системы приведена к треугольному виду и найдено, что $x_3=1$. Получим единичную матрицу, т.е. накопим нули выше главной диагонали:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&5&11\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&-3&0&6\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-3\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$
. Таким образом, $x_1=1, x_2=-2, x_3=1$.

2.5. Матричные уравнения

Дана система n линейных уравнений с n неизвестными (2.1). Введём обозначения:
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix},$$
тогда данную систему можно записать в матричном виде: $A\cdot X=B$. Умножим это уравнение на обратную матриц A^{-1} слева (считаем, что определитель матрицы системы не равен 0). Тогда: $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$, т.к. $A^{-1}\cdot A=E$, тогда $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$ или $X=A^{-1}\cdot B$. Это формула для решения уравнения (2.1) с помощью обратной матрицы.

Если в уравнении $A\cdot X=B$ все три матрицы являются квадратными, причем $|A|\neq 0$, тогда решение $X=A^{-1}\cdot B$.

Рассмотрим матричное уравнение вида $X\cdot A=B$. Имеем $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$; $X=B\cdot A^{-1}$.

Пример 2.4. Решить систему примера 2.1 матричным способом (с помощью обратной матрицы).

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, матрица неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, матрица свободных членов $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. $|A| = -6 \neq 0;$ вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Тогда решение системы определены по формуле $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 20+9-35 \\ -4-9+25 \\ -12-9+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

т.е. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$.

Глава 3. Векторы

3.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Различают скалярные и векторные величины. Скалярные величины полностью характеризуются своим численным значением в выбранной системе единиц (работа, температура, плотность и т.д.). векторы кроме численного значения, обладают направлением в пространстве. Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой *A* и конечной точкой *B*. Вектор может обозначаться одной буквой: $\vec{a}$. Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка *AB*.

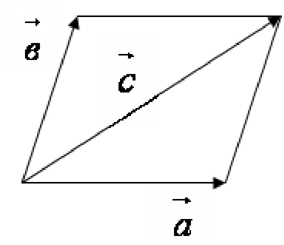
Векторы, лежащие на одной прямой (или на параллельных прямых) называются коллинеарными. Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называют нулевым и обозначают $\vec{0}$. $|\vec{0}| = 0$, направление $\vec{0}$ произвольно. Если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{BA}$ называют противоположным к вектору $\vec{a}$ и обозначают $-\vec{a}$. Очевидно, что $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат и перенесем вектор $\vec{a}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Координатами вектора $\vec{a}$ будем называть координаты его конечной точки: $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$.

Модуль вектора $\vec{a}$: $|a|=\sqrt{a^2{}_x+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

<u>Линейные операции над векторами</u>.

Пусть заданы векторы $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. Линейными операциями называют сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на скаляр. Сложение векторов производят по правилу параллелограмма:



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{c}=\left\{a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z\right\}$. Чтобы построить сумму векторов $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_m}$, нужно к концу вектора $\overrightarrow{a_1}$ приложить вектор, $\overrightarrow{a_2}$ к концу вектора $\overrightarrow{a_2}$ приложить вектор $\overrightarrow{a_3}$ и так далее до $\overrightarrow{a_m}$. Тогда суммой $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_m}$ будет вектор, идущий из начала $\overrightarrow{a_1}$ в конец вектора $\overrightarrow{a_m}$.

Вычесть какой-нибудь вектор – значит прибавить противоположный, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Умножение вектора $\vec{a}$ на (скаляр) число λ: $\vec{c}=\lambda\vec{a}$, $\vec{c}=\{\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\}$.

Если $\lambda>0$, то полученный вектор – это вектор, получающийся из $\vec{a}$ растяжением в λ раз без изменения направления. Если $\lambda>0$, тогда следует $\vec{a}$ растянуть в $|\lambda|$ раз и изменить направление на противоположное.

Свойства:

1. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$;
2. $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$;
3. $\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}$;
4. $(\lambda+\mu)\cdot\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;
5. $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;
6. $\lambda\left(\mu\overline{a}\right)=\lambda\mu\left(\overline{a}\right)$.

3.2. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Базис

Линейная комбинация векторов. Пусть даны векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Тогда всякий вектор, имеющий вид $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$, где λ,μ,ν – некоторые числа, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ или вектор $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Данные векторы называются линейно-зависимыми, если какой-либо из этих векторов линейно выражается через остальные, в противном случае – эти векторы линейно независимые.

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, если они коллинеарны друг другу. Из определения умножения вектора на число следует: если $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то $\vec{b}\,||\,\vec{a}$. Наоборот, если два вектора параллельны, то любой из них можно растянуть во столько раз, чтобы получить другой.

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны (параллельны одной плоскости).

Четыре или более векторов всегда линейно зависимы.

Тогда $\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$ – разложение вектора по трем некомпланарным векторам (разложение вектора по трем осям), что можно осуществить единственным образом.

Совокупность линейно независимых векторов, по которым производится разложение остальных векторов, называется базисом. В плоскости базисом могут служить два неколлинеарных вектора, в пространстве – три некомпланарных вектора.

Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ – базис, $\vec{d}$ – произвольный вектор, тогда $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$–координаты вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$.

Обычно выбирают ортонормированный базис, в котором векторы ортогональны (перпендикулярны) и каждый вектор имеет единичную длину. В этом случае базисные векторы называют ортами и обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

<u>Декартовы координаты в пространстве</u>

В качестве базиса декартовых координат выбрали три вектора единичной длины (орты), которые взаимно перпендикулярны и отнесены к общему началу в точке *O*, принятой за начало координат. Положение произвольной точки *M* в пространстве полностью характеризуется вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, называемым радиус-вектором точки *M*: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, x, y, z - декартовы координаты. Для любого вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, a_x, a_y, a_z - проекции $\vec{a}$ на соответствующие оси.

Если $\vec{a} \| \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, тогда $b_x = \lambda a_x$, $b_y = \lambda a_y$, $b_z = \lambda a_z$, $\lambda = \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$ – условие коллинеарности векторов.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ или $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$ – условие ортогональности векторов.

<u>Направляющие косинусы вектора – </u>косинусы углов, которые он образует с осями координат. Если $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, то $Пр_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, x)$, то есть $\cos(\vec{a}, x) = a_x / |\vec{a}|$, $\cos(\vec{a}, y) = a_y / |\vec{a}|$, $\cos(\vec{a}, z) = a_z / |\vec{a}|$.

<u>3.3. Скалярное произведение векторов</u>

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению модулей этих векторов на косинус угла ϕ между ними:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ – скаляр. Иначе: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Пр_{\bar{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\bar{a}}\vec{b}$. Пример из физики: $A=\overline{F}\cdot\overline{S}$, А – работа, $\overline{F}$ – сила, $\overline{S}$ – перемещение.

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение равно 0, если векторы перпендикулярны, то есть $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$, $\cos(\bar{a},\bar{b})=0$, α = 90^0. Если $\bar{a}=0$, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ тоже перпендикулярны.

2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, так как $\cos 0^0=1$ скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

3. Перестановочный закон: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

4. Распределительный закон: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

5. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Пример:

$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=2\vec{a}\cdot\vec{a}-3\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-9\vec{b}\cdot\vec{b}=2\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-9\vec{b}^2$.

Пусть даны два вектора: $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\};\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$. Тогда скалярное произведение равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

3.4. Векторное произведение векторов

Пусть дана тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ с общим началом, причем $\vec{a}$ – первый вектор, $\vec{b}$ – второй, $\vec{c}$ – третий. Такая тройка называется правой, если поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$. Тройка называется левой, если поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется по часовой стрелки. Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая, то $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$ – левая.

При циклической перестановке «смысл» тройки не меняется: если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка, то $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ – правая, и $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ – правая.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, определяемый следующими условиями:

1. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, ϕ – угол между векторами – это площадь параллелограмма, построенного на этих векторах

2. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3. упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\overline{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ – правая.

<u>Свойства:</u>

1. если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ и $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

2. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ – S не меняется, меняется направление;

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ - если сторону параллелограмма увеличить в λ раз, то S тоже увеличится в λ раз;

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$.

Эти свойства дают возможность раскрывать скобки. Например: $(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})=\vec{a}\times2\vec{a}-3\vec{a}\times\vec{b}+4\vec{b}\times\vec{a}-6\vec{b}\times\vec{b}=-3\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{a}\times\vec{b}=$
$=-7\vec{a}\times\vec{b}$

4. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ – это выражение векторного произведения через координаты векторов, где векторы: $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\};\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$.

<u>3.5. Смешанное произведение трех векторов</u>

Пусть даны три вектора: $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$. Тогда смешанное (или векторно-скалярное) произведение – $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ – скалярная величина, т.е. первые два вектора умножаются векторно, а результат – скалярно на третий вектор.

Геометрический смысл – $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot Пр_{\overline{d}}\,\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{d}}\,\vec{c}=$
$=S\cdot h=V$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, которые образуют правую тройку. Если тройка левая, то $V=|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$.

<u>Свойства:</u>

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ – при циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется (не меняется параллелепипед).

2. $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ – знак меняется при перестановке двух сомножителей.

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, когда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны. Действительно, параллелепипед выражается чисто в плоскость и $V=0$.

4. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})==\Big[(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-$

$$-(x_1z_2-x_2y_1)\vec{j}++(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\Big]\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)x_3-(x_1z_2-z_1x_2)y_3+(x_1y_2-y_1x_2)z_3=$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

Это выражение смешанного произведения через координаты векторов.

5. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0$. Обычно смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Глава 4. Аналитическая геометрия

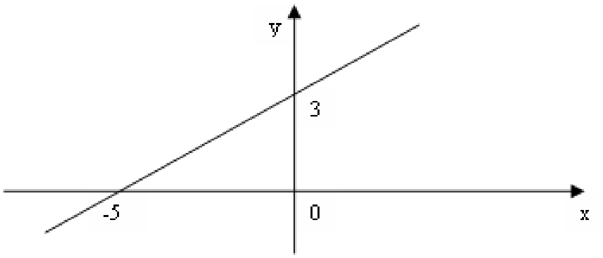
<u>4.1. Общее уравнение прямой на плоскости</u>

<u>Теорема.</u> В декартовой системе координат каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени.

Общее уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах $Ax+By+C=0$. Если $B\neq 0$, то $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, обозначив $-\frac{A}{B}=k$ и $-\frac{C}{B}=b$, получим уравнение прямой $y=kx+b$ с угловым коэффициентом $k=tg\alpha$, где α – угол прямой с осью Оx; b – величина отрезка, отсеченного на оси Оy. Если α =0, то прямая параллельна оси Оx и $y=b$. Если $\alpha=90^o$, то прямая перпендикулярна Оx и $x=b$.

Пример. $3x-5y+15=0$; $3x-5y=-15$; $\frac{3x}{-15}-\frac{5y}{-15}=1$; $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$.

Преобразуем: $5y = 3x + 15;\quad y = \frac{3}{5}x + 3;\quad k = \frac{3}{5}$ – угловой коэффициент.



4.2. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между прямыми

Получим уравнение прямой, проходящей через (□)$M_1(x_1; y_1)$ с угловым коэффициентом *k*.

$M_1 \in L, y_1 = kx_1 + b,\ \ b = y_1 - kx_1;\ \ .$

$$y = kx + b = kx + y_1 - kx_1;\ \ y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (1)$$

Получим уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1),\ M_2(x_2; y_2)$.

Из предыдущего уравнения: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$; $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Подставим в (1):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $y_2 = y_1$, $y = y_1$ (прямая параллельна оси *OX*), если $x_1 = x_2$, $x = x_1$ (параллельна оси *OY*).

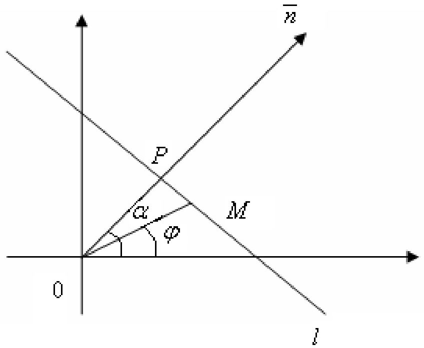
Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1, k_2: $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1; \mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$. Угол между прямыми: $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$,

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2\ (\alpha = 0)$; перпендикулярность: $1 + k_1 \cdot k_2 = 0,\ \ k_2 = -1/k_1$.

4.3. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая L. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную L: n – нормаль. На нормали введем положительное направление- от (□)0 к (□)P . α – угол от оси OX до направления нормали, p – длина OP. Считая α и p известными, выведем уравнение прямой. Возьмем на прямой (□)$M(x; y)$. Очевидно,



что $Пр_n \overline{OM} = OP = p$. Пусть полярные координаты $(\cdot)M(r;\varphi)$. $Пр_n \overrightarrow{OM} = r\cos(\alpha-\varphi) = = r\left(\cos\alpha\cdot\cos\varphi+\sin\alpha\cdot\sin\varphi\right) =$ $(r\cos\varphi)\cos\alpha+(r\sin\varphi)\sin\alpha = x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$ или $x\cos\alpha+y\cos\alpha-p=0$ – нормальное уравнение прямой ($r\cos\phi = x, r\sin\phi = y$).

<u>Расстояние от $(\cdot)$ до прямой</u>. Пусть L – прямая в нормальном виде $x\cos\alpha+y\sin x-p=0$. (□)$M_0(x_0; y_0)$ – лежит вне прямой. Определим d – расстояние от (□)M_0 до прямой L. Через M_0 проведем прямую L_0 ,параллельную L. N_0 – $(\cdot)$ пересечения L_0 с нормалью.

а) если N_0 лежит по ту же сторону от 0 , что и N, то нормальное уравнение прямой L_0: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_0=0(p_0=0N_0)$ т.к. $M_0\in L_0$, то $x_0\cos + y_0\sin\alpha-p_0=0, p_0=x_0\cos\alpha++y_0\sin\alpha,$ $d=|p_0-p|=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$ -расстояние.

б) если N_0 лежит по другую сторону от О, то уравнение прямой $L_0: x\cos(\pi+\alpha)+y\sin(\pi+\alpha)-p_0=0$

$p_0=x_0\cos(\pi+\alpha)+y_0\sin(\pi+\alpha)=-x_0\cos\alpha-y_0\sin\alpha$.

$-x_0\cos\alpha-y_0\sin\alpha=|p_0+p|=|-x_0\cos\alpha-y_0\sin\alpha+p|=$

$=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$.

Приведение общего уровня к нормальному.

Пусть $Ax+By+C=0$ – общее уравнение, а $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ – ее нормальное уравнение, т.к. эти уравнения определяют одну прямую, то их коэффициенты пропорциональны. Умножим все члены общего уровня на μ: $\mu Ax+\mu By+\mu c=0, \mu A=\cos\alpha, \mu B=\sin\alpha, \mu C=-p,$ первые два возведем в квадрат и сложим: $\mu^2\left(A^2+B^2\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1, \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}; \mu c=-p<0,$ поэтому знак μ берется противоположным знаку C. μ – нормирующий множитель.

Пример. Дана прямая $3x-4y+10=0$ и (□)$M(4;3)$. Найти расстояние d от M до прямой.

Приведем уравнение к нормальному виду:
$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}(3x-4y+10)=0;$$
$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0; d=\left|-\frac{3}{5}\cdot(4)+\frac{4}{5}(3)-2\right|=|-2|=2.$$

4.4. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.

Уравнение плоскости в отрезках

Теорема. В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени.

$Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости, где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Справедливо и обратное: каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Уравнение плоскости в отрезках.
$$A\cdot B\cdot C\cdot D\neq 0 \Rightarrow Ax+By+Cz=-D; \quad \frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A}=a$ $-\frac{D}{B}=b$ $-\frac{D}{C}=c$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках. Смысл величин a, b, c – это отрезки, которые плоскость отсекает от осей координат.

4.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть уравнение плоскости P : $A_x + B_y + C_z + D = 0$, дана $(\square)M_0(x_0; y_0; z_0)$ которая не принадлежит плоскости. Тогда $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, следует подставить координаты этой точки в уравнение плоскости и полученную величину поделить на модуль вектора $\vec{n}$, т.е. на нормирующий множитель μ. Для определения расстояния от точки до плоскости можно пользоваться нормальным уравнением плоскости. В этом случае $|d| = |x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - \rho|$.

4.6. Уравнение плоскости, проходящей через 3 данных точки. Угол между плоскостями

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ лежат в плоскости P и точка $M(x; y; z)$ – любая точка плоскости. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ лежат в одной плоскости и являются компланарными. Условие компланарности: равенство нулю смешенного произведения: $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ —уравнение плоскости, проходящей через 3 точки.

4.7. Прямая в пространстве

В общем случае прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения 2-х плоскостей: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Канонические уравнения прямой

Пусть $(\square)M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка лежащая на прямой; $\vec{q} = \{m, n, p\}$, где m, n, p – координаты направляющего вектора прямой, т.е. вектора параллельного данной прямой. $M(x; y; z)$ – текущая точка. $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{q}$, получаем уравнение $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ – канонические уравнения прямой.

Чтобы перейти от общего уравнения прямой к каноническому, в качестве точки M_0 берут любое решение системы, направляющий вектор прямой можно найти как векторное произведение векторов нормалей $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\vec{q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Если направляющий вектор прямой задан точками M_1, M_2, то можно записать уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$.

Угол между прямыми

Пусть 2 прямые заданы в канонической форме, т.е. известны направляющие векторы каждой прямой: $\overrightarrow{q_1}=\{m_1;n_1;p_1\}$, $\overrightarrow{q_2}=\{m_2;n_2;p_2\}$.

Угол φ между прямыми равен углу между направляющими векторами: $\cos(\phi)=\frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Если прямые параллельны, то $\vec{q}_1 \| \vec{q}_2$ и $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

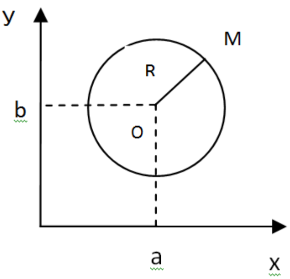
Если прямые перпендикулярны, $\vec{q}_1 \perp \vec{q}_2$, то $\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}=0$ и $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ – условия перпендикулярности прямых.

Кривые на плоскости

4.9. Окружность

Окружность- это геометрическое место точек, каждая из которых отстоит от центра (О) на одинаковом расстоянии r. Пусть $(\square)M(x;y)$ – текущая. $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$; $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Центр окружности: $(\square)O(a;b)$.



4.10. Эллипс

Эллипс – это геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (большая расстояния между фокусами).

Пусть $F_1F_2 = 2c$, тогда $F_1M + F_2M = 2a$. Вводим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $(a > c)$,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - <u>каноническое уравнение эллипса.</u>

Эллипс симметричен относительно осей OX и OY (x^2 и y^2).

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$x = 0$, $y = b : (\square) B(0; b)$; $y = 0$, $x = a : (\square) A(a; 0)$ A, B, A^*, B^* – вершины эллипса, O – центр эллипса. $a = AO -$ большая полуось, $b = BO -$ малая полуось.

Эксцентриситет – отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$; $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$; $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

Для окружности $a = b$ и $\varepsilon = 0$, чем больше ε ,тем больше эллипс вытянут.

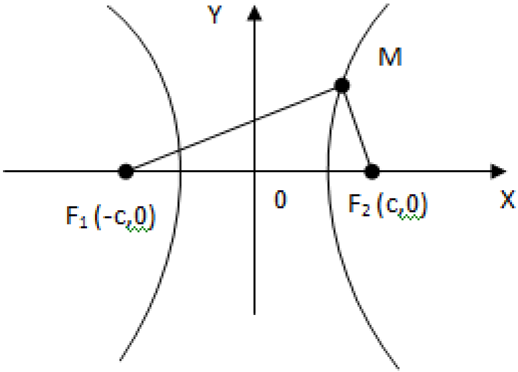
Эллипс получается при сечении цилиндра и проекция окружности на плоскость.

4.11. Гипербола

<u>Гипербола –</u> это геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть

постоянная величина, взятая по модулю и меньше расстояния между фокусами.

F_1 и F_2 - фокусы $F_1F_2 = 2c$. Пусть $(\forall)M(x;y)$ – текущая. $F_1M - F_2M = \pm 2a$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы.



Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ – асимптоты.

Эксцентриситет – отношение расстояния между фокусами гиперболы к расстоянию между ее вершинами, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, характеризует форму гиперболы.

4.12. Парабола

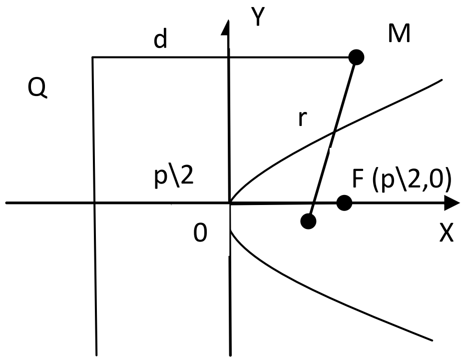
Парабола – геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки – фокуса равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой (не проходит через фокус). Фокус F, расстояние от F до директрисы равно p – параметр параболы. Начало координат – посередине между F и директрисой.

$$QM = MF; F(\frac{p}{2};0); Q(-\frac{p}{2};y); \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2},$$

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2 + (y-y)^2}, \ (x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = (x+\frac{p}{2})^2; y^2 = 2px.$$

Парабола симметрична относительно OX. x=0, y=0. (y^2<0), $x \to \infty, y \to \infty$. Пусть x=1, тогда $M_1(1;\sqrt{2P});.M_2(1;-\sqrt{2p})$. Длина хорды параболы, проведенной перпендикулярно оси, равна $2\sqrt{2p}$.

p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой.



Глава 5. Функции

5.1. Понятие множества. Логическая символика

Множество – любая совокупность объектов, называемых элементами множества.

Примеры множеств – множество студентов академии, факультета, набор трех уравнений, множество всех целых чисел.

Множества обозначаются заглавными буквами, а элементы – строчными; $x \in X$ – x элемент множества X; $x \notin X$ – x не является элементом множества X. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – множество X состоит их элементов $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть X и Y – два множества. Если они состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают, то есть X=Y. Если каждый элемент множества X является элементом множества Y, то $X \subset Y$ (X содержится в Y) и X – подмножество Y.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым $\varnothing$.

Пусть X – множество, имеющее свойство $P(x)$, тогда $\{x|P(x)\}$ обозначает совокупность тех элементов X, которые обладают свойством $P(x)$.

Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B=\{x|x\in A.или..x\in B\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B=\{x|x\in A.и..x\in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество $A\setminus B=\{x|x\in A.и..x\notin B\}$.

Верхняя и нижняя границы множества.

Говорят, что множество X ограничено сверху (снизу), если существует число C такое, что для любого $x\in X$ выполнено $X\le C(x\ge C)$. C – верхняя (нижняя) грань множества X. C=sup X – верхняя, C=inf X – нижняя.

Логическая символика.

Пусть α,β - некоторые утверждения. Тогда $\bar{\alpha}$ – не α, то есть отрицание утверждения α.

$\alpha\Rightarrow\beta$ - из α следует β; α,β – α эквивалентно β;

$\alpha\wedge\beta$ - α и β - конъюнкция; $\alpha\vee\beta$ – α или β – дизъюнкция;

$\forall x\in X \quad \alpha(x)$ для всякого элемента $x\in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$. ($(\forall)$ – квантор всеобщности);

$\exists x\in X \quad \alpha(x)$ существует элемент $x\in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. ($\exists$ – квантор существования).

Принцип математической индукции:

$(\alpha(1)\wedge(\alpha(n)\Rightarrow\alpha(n+1)))\Rightarrow\forall n\in N\alpha(n)$.

Числа.

Натуральные числа 1, 2,3,…- N.

Целые числа – Z, Z_0 –множество всех неотрицательных чисел (и 0).

Q – множество рациональных чисел, $x = m/n$.

I – множество иррациональных чисел

R – множество действительных (вещественных) чисел, числовая прямая.

Модуль: $|x| = \begin{cases} x, \text{если} & x \geq 0 \\ -x, \text{если} & x < 0 \end{cases}$; $|x| \leq a \quad (a > 0) \Rightarrow -a \leq x \leq a.$.

Если $|x-a| < \varepsilon$, то $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$; это называются ε– окрестностью точки a.

5.2. Понятие функции. Основные свойства функции

Часто приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. При изменении движения путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от времени. Путь – функция времени. Если радиус круга R принимает различные значения, то площадь $S = \pi R^2$ тоже будет принимать различные значения. S – функция R. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$. x – независимая переменная, y—зависимая переменная.

Частные значения получаются, если аргументу x придавать частные значения. Пусть $y = x^2$, $y = x^2$ при $x = 2$ будет $y = 4$, при $x = -0,6$ $y = 0,36$ и так далее.

Запись: $y(x) = 4$; $y(-0,6) = 0,36$. Множество X – область определения (существования) функции, множество Y – область значений функции.

Способы задания функции

Три основных способа – аналитический, табличный, графический.

1. Аналитический способ состоит в том, что зависимость задается в виде формулы, указывающей, какие действия надо выполнить, чтобы получить значение функции $y = f(x)$.

2. Табличный способ заключается в том, что в определенном порядке записываются значения x и соответствующие значения y. Конечное число аргументов.

3. Графический способ часто используется в практике физических измерений. Аргументы – абсциссы, функция – ординаты. Следовательно, график $F(x)$ – множество точек плоскости.

Рассмотрим основные свойства функции

1. $f(-x) = f(x)$ – функция чётная, $f(-x) = -f(x)$ – функция нечётная.

Если функция не является ни чётной, ни нечётной, то говорят, что функция общего вида.

2. Монотонность.

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента из множества *X* соответствует большее значение функции ($x_1 < x_2$, то $f(x_2) > f(x_1)$).

Функция убывающая, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции ($x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$).

3. Ограниченность.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве *X*, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

4. Периодичность.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

5.3. Основные элементарные функции

1. Степенная. $y = x^a$, где a - действительное число.

2. Показательная: $y = a^x, a > 0(\neq 1)$.

3. Логарифмическая: $y = \log_a x, a > 0(\neq 1)$.

4. Тригонометрические: $y = \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \cos x$;

5. Обратные тригонометрические функции:
$y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

6. Сложная функция – функция вида $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

5.4. Элементарные функции. Классификация функций.

Элементарные функции – все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью:

а) алгебраических действий $y = 10^x - \sin x, y = \ln|\sin x|$ и так далее;

б) операцией образования сложной функции.

Неэлементарные функции: $y = |x|$; $y = [x]$ (антье) – целая часть числа *x*. [2,3]=2; [–2,5]=–3.

Элементарные функции можно разделить на алгебраические и трансцендентные (неалгебраические).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических действий:

а) многочлен $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$;

б) дробно-рациональная функция – отношение двух многочленов;

в) иррациональная функция (если есть корни).

Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной. К числу трансцендентных относиться тригонометрические, показательные, логарифмические и т.д.

Глава 6. Пределы и непрерывность

6.1. Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число $\{a_n\}$, то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$. Числа $a_1, a_2, ...$ – члены последовательности, a_n – n-й член последовательности.

Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что для всех членов последовательности с $n > N$ будет выполняться неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Пусть $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, тогда $a_1 = \dfrac{2}{1}, a_2 = \dfrac{3}{2}, a_3 = \dfrac{4}{3}, \ldots . \, a_{100} = \dfrac{101}{100} = 1,01$ $a_{1000000} = \dfrac{1000001}{1000000} = 1,000001$ и т.д. С ростом n члены последовательности стремятся к 1, и величина разности $|a_n - 1|$ становится все меньше. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

6.2. Предел функции в бесконечности и в точке

Предел функции в бесконечности

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности**,** если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $S > 0$, что для всех x таких, что $|x|$ >S, верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$ и обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Рассмотрим предел функции в точке. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число δ >*0* , что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих неравенству

$|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Если $x\to x_0$ и $x<x_0$, то это предел слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$; если $x\to x_0$ и $x>x_0$, то это предел справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

6.3. Бесконечно малые величины

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x\to x_0$, если её предел равен *0*, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Например,

$$a(x)=\frac{1}{x}\,(x\to\infty),\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;\ a(x)=\sin x,\ \text{если}\ x\to 0:\ \lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то $f(x)=A+a(x)$ где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

По условию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Это значит, что для любого, $\varepsilon>0, \exists\delta>0$ что для всех $x\neq x_0$ и удовлетворяющих $|x-x_0|<\delta$ верно $|f(x)-A|<\varepsilon$. Обозначив $\alpha(x)=f(x)-A$, получим $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Это означает, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Обратная теорема. Если $f(x)=A+\alpha(x)$ (бесконечно малой), то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

По условию $f(x)=A+\alpha(x)$. Т.к. $\alpha(x)=f(x)-A$- бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$, что для всех $x\neq x_0$ и удовлетворяющих $|x-x_0|<\delta$ верно $|\alpha(x)|=|f(x)-A|<\varepsilon$.

это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Свойства бесконечно малых величин:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой величины на константу есть величина бесконечно малая.
3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от 0, есть величина бесконечно малая.

Замечание. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые величины. В этом случае их отношение $\left[\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]$ называется неопределенностью $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и требует дальнейших вычислений.

<u>Сравнение бесконечных малых.</u>

Пусть имеется несколько бесконечно малых величин $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$

1. Если β/α имеет конечный и не равный нулю предел, т.е. $\lim \beta/\alpha = A \neq 0$ и $\lim \alpha/\beta = \dfrac{1}{A} \neq 0$, то бесконечно малые β и α называются бесконечно малыми <u>одного порядка</u> малости.

<u>Пример.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2$, x и $\sin 2x$ – бесконечно малые одного порядка.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{x} = 7$.

2. Если $\beta/\alpha \to 0$, то есть $\lim \beta/\alpha = 0$ (а $\lim \alpha/\beta = \infty$), то β называют <u>бесконечно малой величиной высшего порядка малости</u>, чем бесконечно малая α, α – бесконечно малая низшего порядка, чем β. Запись $\beta(x) = 0(\alpha(x))$ – $\beta(x)$ есть 0 малое от $\alpha(x)$.

<u>Пример.</u> $A = x, \beta = x^n, n > 1, x \to 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$, x^n – <u>бесконечно малая величина высшего порядка</u>, чем x.

3. Если $\beta/\alpha^k = A \neq 0$, то β – бесконечно малая k-го порядка относительно бесконечно малой α.

<u>Пример.</u> x^3 есть бесконечно малая 3 порядка относительно x, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{(x)^3} = 1$.

4. Если $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются эквивалентными (равносильными) бесконечно малыми.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ x \sim \sin x \text{ при } x\to 0\ \ \mathrm{tg}\, x \sim x; \ln(1+x) \sim x.$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить равносильными им величинами.

<u>Пример.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3+x+1}=\frac{3}{1}=3;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin kx}\right)^n=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{kx}\right)^n=\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

6.4. Бесконечно большие величины

Функция $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то есть является <u>бесконечно большой</u> величиной при $x\to x_0$, если для каждого $M>0$, как бы велико оно не было, можно найти такое $\delta>0$, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$ имеет место $|f(x)|>M$. Запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

<u>Свойства:</u>

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

<u>Замечание 1</u>. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие величины при $x\to x_0$, то $\left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right]$ – неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. $\left[f(x)-\varphi(x)\right]$ – неопределенность $\left[\infty-\infty\right]$.

Теорема. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, то величина $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x\to x_0$ и наоборот.

6.5. Основные теоремы о пределах

1. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных.

$$\lim_{x\to x_0}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=\lim_{x\to x_0}y_1+\lim_{x\to x_0}y_2+\ldots+\lim_{x\to x_0}y_n.$$

2. Предел произведения конечного числа переменных равен произведению пределов этих переменных.

$$\lim_{x\to x_0}(y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_n)=\lim_{x\to x_0}y_1\cdot\lim_{x\to x_0}y_2\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0}y_n.$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

3. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел делителя отличен от нуля, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}y_1}{\lim\limits_{x\to x_0}y_2}$, если $\lim\limits_{x\to x_0}y_2\neq 0$.

4. Если $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=u_0$, то предел сложной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\phi(x)\right]=A$.

5. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших x) $f\left(x\right)<\phi\left(x\right)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)$.

6. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших x) функция $f\left(x\right)$ заключена между двумя функциями $\phi\left(x\right)$ и $\psi\left(x\right)$, имеющими одинаковый предел A при $x\to x_0$,то функция имеет $f\left(x\right)$ тот же предел.

Во всех этих теоремах предполагается существование пределов этих функций.

6.7. Первый замечательный предел

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

6.8. Второй замечательный предел

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n,\ e=2,7182818284\ldots,\ 2<e<3.$$

В общем виде: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}) = e$, или $\lim\limits_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{a}} = e$.

6.9. Непрерывность функции в точке и на промежутке

Функция называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция определена в точке x_0.

2. Функция имеет конечный предел при $x \to x_0$ и этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то есть бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

В противном случае x_0 – точка разрыва.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого интервала, называется непрерывной в этом интервале.

Свойства непрерывной функции

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает на этом отрезке наибольшего значения M и наименьшего значения m.

2. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах принимают значение разных знаков, то имеется $a<c<b$, для которой $f(c)=0$.

6.10.Классификация точек разрыва

Точка x называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Точки разрыва можно разделить на два типа:

1. Разрыв 1 рода. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечные пределы слева и справа , не равные между собой, то в точке x_0 будет разрыв первого рода, т.е. $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x+0} f(x) = B$, но $A \neq B$.

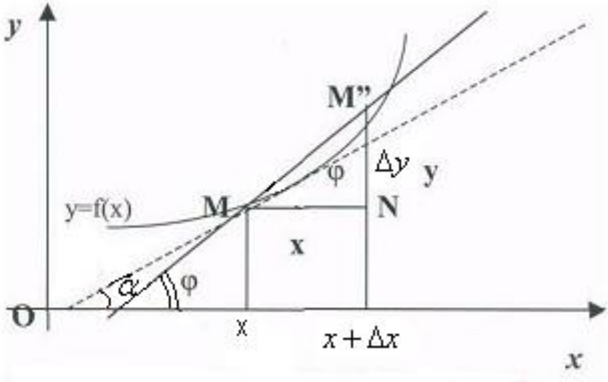
2. Разрыв 2 рода. В точке x_0 нет одного из односторонних пределов или если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 0$ – точка разрыва 2 –го рода.

Глава 7. Производная и дифференциал

7.1. Физический и геометрический смысл производной

Геометрический смысл



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей.

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если $\Delta x \to 0$, то секущая переходит в касательную: $y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$. Производная равна угловому коэффициенту касательной.

Физический смысл

Пусть $y = f(t)$- закон движения математической точки, т.е. зависимость пути y от времени *t*. За время t пройден путь $f(t)$, а за $t + \Delta t - f(t + \Delta t)$.

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ – средняя скорость движения; мгновенная скорость $V = y' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$.

В общем, для любой функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения у относительно изменения х, y' – мгновенная скорость изменения *у* при некотором *x*. С помощью производной можно оценить скорость изменения связанных величин.

7.2. Определение производной. Свойства

Пусть дана функция $y = f(x)$, возьмем значение аргумента x и зададим ему приращение Δx, это вызовет приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производная: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, т.к. при различных значениях x производная различна, y' – функция аргумента *x*, т.е. $y' = y'(x)$.

Пример. Вычислим производную $f(x) = x^2$. Пусть х получил приращение Δx, тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x' + \Delta x^2}{\Delta x}$; $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x$; т.е. $(x^2)' = 2x$.

Свойства производной

1) Производная $\text{const} = 0$, $y = \text{const} = C$, $\Delta y = 0$, $y' = 0$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две функции, имеющие производные.

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x) \pm (v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

3) $(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u) \cdot (v(x)+\Delta v) - u \cdot v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x = u' \cdot v + u \cdot v',$$ т.е.

$(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

4). $(Cu)' = Cu'$.

5) $(\frac{u}{v})' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{u^2}$.

7.3. Производная сложной и обратной функций

Сложная функция

Пусть задана функция $u=\varphi(x)$ и функция $y=f(u)$, тогда $y=f\left[\varphi(x)\right]$ называется сложной функцией.

Пример. $y=\sin x^2$; $y=\sin u$; $u=x^2$; $y=(x^2+1)^3$; $y=u^3$; $u=x^2+1$ и т.д.

Пусть эти функции – дифференцируемые. Пусть x получил приращение Δx, тогда функции $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$ получают приращение Δu и Δy. Рассмотрим $\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Перейдем к пределу (если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$): $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

Обратная функция

Пусть $y=f(x)$, будем считать y за аргумент, а x – за функцию. Тогда $x=\varphi(y)$ – обратная функция, может быть многозначной.

$y=x^3, x=\sqrt[3]{y}$ -обратная, $y=x^2, x=\pm\sqrt{y}$ – двузначная функция и т.д.

Если $f(x)$ – монотонная функция, то существует непрерывная обратная функция $x=\varphi(y)$. $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y/\Delta x}$. Перейдя к пределу: $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$; $x'_y=\frac{1}{y'_x}$ или $\varphi'_y(y)=\frac{1}{f'_x(x)}$.

7.4. Производные тригонометрических функций

а) $y=\sin x$;

Воспользуемся схемой нахождения производной:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\ ;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}\ ;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x\ ;$$

(учли первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$).
Итак, $(\sin x)' = \cos x$ и $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

б) $y = \cos x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-2\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x\ ;$$

$(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

в) $y = tgx$;

$$y' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ ;$$

т.е.

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'\ .$$

г) $y = ctgx$; $y' = (\dfrac{\cos x}{\sin x})' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$$(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x};\ (ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'\ .$$

7.5. Производная обратных тригонометрических функций

а) $y = \arcsin x$, где $-1 \le x \le 1$ и $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

Обратная функция имеет вид $x = \sin y$, причем $x'_y = \cos y \ne 0$, если $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Используем правила дифференцирования обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

При $x = \pm 1$ производная не существует.

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

б) $y = \arccos x$ Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Аналогично, $(arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$; $(arctgu)' = \frac{u'}{u^2+1}$.

$(arcctgx)' = -\frac{1}{x^2+1}$; $(arcctgu)' = \frac{u'}{u^2+1}$.

7.6. Производная показательной, логарифмической и степенной функций

Производная показательной функции

а) $y = e^x$.

Прологарифмируем обе части равенства по основанию e, получим $\ln y = x$ Дифференцируя обе части по переменной x и учитывая, что $\ln y$ – сложная функция, получим $(\ln y)' = x'$ или $\frac{y'}{y} = 1$, откуда $y' = y$, т.е. $(e^x)' = e^x$ и $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

Заметим, что кривая $y = e^x$, называемая *экспонентой,* обладает отличающим только ее свойством: в каждой точке x ордината кривой $y = e^x$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой в этой точке: $e^x = tg\alpha$.

б) $y = e^x$. $y' = (a^x)' = \left[(e^{\ln a})^x\right]' = (e^{x \cdot \ln a})'$ и по правилу дифференцирования сложной функции $y' = e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' = a^x \cdot \ln a$.

Итак, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ и $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

в) $y = \ln x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1+\frac{\Delta x}{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

$$(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{x \ln a}.$$

г) Производная степенной функции

Теперь мы можем доказать формулу производной степенной функции $y = x^n$ для любого n. Действительно, $\ln y = n \cdot \ln x$. Дифференцируя обе части равенства, получим $\frac{1}{y} y' = n \cdot \frac{1}{x}$, откуда

$y' = ny\frac{1}{x} = nx^n \frac{1}{x} = nx^{n-1}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

Таблица производных

№ п/п	**Функция y**	**Производная** y'	**№ п/п**	**Функция y**	**Производная** y'
1	c	0	14	e^u	$e^u \cdot u'$
2	x	1	15	a^u	$a^u \ln a \cdot u'$
3	$u+v$	$u'+v'$	16	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
4	uv	$u'v+uv'$	17	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
5	uvw	$u'vw+uv'w+uvw'$	18	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
6	cu	cu'	19	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
7	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	20	tgu	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	$\frac{u}{c}$	$\frac{u'}{c}$	21	$ctgu$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	$\frac{c}{v}$	$-\frac{c}{v^2}$	22	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	$f(u)$, $u = \phi(x)$	$f'(u) \cdot u'$	23	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	u^n	$nu^{n-1} \cdot u'$	24	$arctgu$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

12	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	25	$arcctgu$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
13	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$			

7.7. Логарифмическая производная. Производная неявной и параметрической функции

Логарифмическая производная

Производная степенно-показательной функции

$y = f(x)^{\varphi(x)}$. Найдем $\ln y = \varphi(x)\cdot \ln f(x)$. Дифференцируя, получим

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\left[\ln f(x)\right]' = \varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}.$$

Учитывая, что $y + f(x)^{\varphi(x)}$, получим после преобразований

$$y' = f(x)^{\varphi(x)-1}\left[\frac{\varphi(x)\cdot f'(x)}{f(x)} + \ln f(x)\cdot \varphi'(x)\right].$$

Замечание. Производная логарифмической функции

$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной.* Ее удобно использовать для нахождения производных функций, выражения которых существенно упрощаются при логарифмировании.

Пример 1. Вычислить $(x^{\sin x})'$.

$$y = x^{\sin x}, \ln y = \ln(x^{\sin x}) = \sin x\cdot \ln x, \frac{y'}{y} = (\sin x\cdot \ln x)' = \cos x\cdot \ln x + \frac{\sin x}{x};$$

$$y = x^{\sin x}(\cos x\cdot \ln x + \frac{1}{x}\sin x).$$

Пример 2. $\left[(x+5)^5\cdot(2x-4)^3\cdot(x+2)^2\right]'$.

Логарифмируем:

$$\ln y = 5\ln(x+5) + 3\ln(2-4) + 2\ln(x+2);\ y' = y\cdot(\frac{5}{x+5} + \frac{3}{2x-4}\cdot 2 + \frac{2}{x+2}).$$

Производная неявной функции.

Если задана неявная функция $F(x,y)=0$, то для вычисления производной надо взять производные от правой и левой частей, помня, что $y = y(x)$.

Например,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \left(\frac{x^2}{a^2}\right)'_x+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x=(1)'_x;\ \frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'x}{b^2}=0;\ y'_x=-\frac{b^2x}{a^2x}.$$

$$x^2+y^2=10;\ (x^2+y^2)'=10;\ 2x+2y\cdot y'=0;\ y'=-\frac{y}{x}.$$

<u>Параметрическое задание функции</u>

Пусть даны два уравнения $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases}$.

Каждому значению t соответствует x и y на плоскости. Если $T_1\le t\le T_2$, то эта точка описывает кривую на плоскости – кривая задана параметрически, t – параметр. $x=\varphi(t)\Rightarrow t=F(x)$, то $y=\psi(F(x))$.

Такое задание определяет $y=f(x)$, y от x задается параметрически. Используется в механике.

Производная. Ищем производную сложной функции:

$y=\Psi(F(x));\ y'=\Psi'_t\cdot\varphi'_x=\dfrac{\psi_t}{\varphi_t};\ \varphi'_x=\dfrac{1}{\varphi'_t}$ – производная обратной функции.

Пример. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$. $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt$.

<u>7.8. Дифференциал функции</u>

Пусть $y=f(x)$ и аргумент x получил приращение Δx. Тогда дифференциалом называется величина $dy=f'(x)\cdot\Delta x$, но $dx=x'_x\cdot\Delta x=\Delta x$, поэтому $dy=f'(x)dx=y'dx\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}$ – отношение дифференциалов.

Вычисление дифференциала функции называется ее дифференцированием, при этом вычисляется производная, поэтому процесс вычисления производной часто называется дифференцированием.

<u>Дифференциал –</u> главная линейная часть приращения функции.

Функция, обладающая дифференциалом, называется <u>дифференцируемой</u>.

У дифференцируемой функции производная должна быть конечной.

Свойства дифференциала

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$;

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v + u \cdot dv}{v^2}$.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции: $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции: $\dfrac{dy}{dx} = f_u'(u) \cdot \varphi_x'(x)$, то есть $dy = f'(x)dx, dy = f'(u)u' \cdot dx = f'(u)du$ – инвариантность дифференциала – дифференциал сложной функции имеет такой же вид, как и для простой переменной.

Дифференциал широко применяется в приближенных вычислениях.

Дифференциал $dy \approx \Delta y$, если $\Delta x \to 0, \dots f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

7.9. Производные и дифференциалы высших порядков

Если вычислить производную от первой производной y', то получим вторую производную: $y'' = (y')' = f''(x)$. Производная от второй производной: $y''' = (y'')'$ – третья производная. Производная n-го порядка – производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Пример: $y = x^4;\ y' = 4x^3;\ y'' = 12x^2;\ y''' = 24x;\ y'''' = 24;\ y''''' = 0$;

$y = e^{kx};\ y' = ke^{kx};\ y'' = k^2e^{kx};\ y''' = k^3e^{kx};\ y^n = k^n e^{kx}$.

Для дифференцируемых функций u и v:

$(u+v)^n = u^{(n)} + v^{(n)}$;

$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \dfrac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + uv^{(n)}$ – формула Лейбница.

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциал второго порядка:

$d^2 y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = d^2 y = f''(x)dx^2$,

$(dx)^2 = dx^2$.

$d^n x = f^{(n)} \cdot dx^n$ – дифференциал n-го порядка.

Глава 8. Основные теоремы дифференциального исчисления

8.1. Теорема Ферма

Пусть $f(x)$ определена на интервале (a,b) и в точке x_0 интервала достигает наибольшего (наименьшего) значения. Тогда, если в x_0 существует производная, то она равна 0, т.е. $f(x_0) = 0$.

8.2. Теорема Ролля

Если $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и на концах принимает одинаковое значение $f(a) = f(b)$,то существует $c \in (a,b)$, в которой $f'(c) = 0$.

8.3. Теорема Лагранжа

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируемая на (a,b). Тогда существует $c \in (a,b)$, такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

8.4. Теорема Коши

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причем $g'(x) \neq 0$. Тогда существует $c \in (a,b)$,такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(a)}$.

8.5. Правило Лопиталя

Теорема (правило) Лопиталя . Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке $[a,b]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тогда и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Глава 9. Приложения производной

9.1. Интервалы монотонности. Признаки экстремума

Множество точек (x, y) координатной плоскости *XOY,* координаты которых связаны уравнением $y = f(x)$, называется графиком данной функции.

По производной функции можно судить о возрастании (убывании) самой функции. Напомним, что $f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство

$f(x_2) > f(x_1)$ Убывающей: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Теорема. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и имеет непрерывную производную $f'(x)$ внутри отрезка. Чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей), достаточно $f'(x) > 0$, $(f(x) < 0)$.

Рассмотрим возрастание. Возьмем два значения x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из $[a,b]$ и применим формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), (x_1 < c < x_2)$. Так как $f'(c) > 0$, и $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ – возрастающая. Аналогично – убывающая.

Геометрический смысл – производная – угловой коэффициент касательной. Значение коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз.

Экстремумы функции

Функция $f(x)$ имеет в т. x_0 максимум, если $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$, где Δx – достаточно малая по величине. Функция $f(x)$ имеет в т. x_0 минимум, если $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$.

Если в т. x_0 $f(x)$ имеет *max* или *min*, то говорят, что в этой точке имеет место экстремум.

Необходимое условие экстремума. Если существует конечная производная, то по теореме Ферма $f'(x) = 0$.

Экстремумы необходимо искать в тех точках, где $f'(x) = 0$ или не существует. Такие точки называются стационарными (критическими).

Если допустить, что в отдельных точках нет конечной производной, то следует отнести к критическим и эти точки.

Критические точки следует проверить, в них необязательно экстремум ($y = x^3, y' = 3x^2, x = 0$, *нет экстремума).*

Первый достаточный признак экстремума.

Пусть т. x_0 является критической для $f(x)$, а $f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех точках некоторого интервала, содержащего эту точку (за исключением, возможно, самой точки x_0). Тогда возможно:

1) $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то есть производная при переходе через т. x_0 меняет знак с «+» на «–». Тогда при $x < x_0$ $f(x)$ возрастает, а при $x > x_0$ (в данном интервале) убывает, значит, значение $f(x_0)$ будет наибольшим – в т. x_0 $f(x)$ имеет *max.*

2) $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то есть с «–» на «+» – *min.*

3) $f(x)$ не меняет знак при переходе через x_0. Тогда $f(x)$ либо возрастает, либо убывает, экстремума нет.

Второй достаточный признак экстремума.

Пусть x_0 – критическая точка и $f'(x_0) = 0$, $f(x)$ имеет вторую производную в интервале и в самой т. x_0. Тогда, если $f''(x_0) < 0$ – *max*, $f''(x_0) > 0$ – *min*.

По определению производной: $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$. Если $f''(x_0) > 0$, то дробь > *0*. При $x > x_0$ знаменатель <0, $f'(x) < 0$ *(*убывает) и при $x > x_0$ знаменатель >0 (возрастает) – *min* по первому признаку. Аналогично – *max*, если $f''(x_0) < 0$.

Исследования по второму признаку производят редко.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает *max* и *min* значения. Этих значений $f(x)$ достигает или в критических точках или на концах отрезка.

Правило. Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке, надо:

1. Определить критические точки, принадлежащие $[a,b]$;

2. Вычислить значение функции в этих критических точках и на концах отрезка;

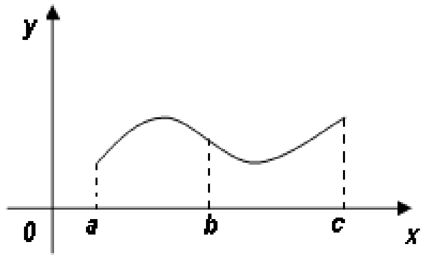
3. Выбрать наибольшее и наименьшее значения из полученных чисел.

9.2. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью вниз, если на интервале (a,b) она лежит выше касательной, проведенной в любой точке (вверх, если ниже касательной).

Дуги кривой, называют выпуклыми на интервале (a,b), если они лежат ниже касательной, проведенной в любой точке (a,b). Дуги кривой называют вогнутыми на (b,c), если они лежат выше касательных.

Правило. Интервалы, в которых кривая выпуклая, определяются из неравенства $f''(x)<0$, а интервалы, в которых вогнутая из неравенства $f''(x)>0$.



Точка перегиба – точка, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой. Точки перегиба следует искать среди точек, в которых $f''(x)=0$, $f''=\infty$ или f'' не существует.

При $x=x_0$ перегиб будет в том случае, когда при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак.

9.3. Асимптоты графика функции

Прямая l называется асимптотой кривой, если расстояние d от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении т. M в бесконечность (от начала координат) стремится к нулю.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

1. Вертикальная: кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Необходимо отыскать те значения аргумента, при которых $f(x) \to +(-)\infty$.

2. Наклонные: ищем асимптоту в виде $y = kx + b$. Найдем *k* и *b*.

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to \infty}\left[f(x) - kx - b\right] = 0$, или $\lim\limits_{x \to \infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, так как $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, но $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{b}{x} = 0$, тогда $k = \lim\limits_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx)$. Необходимо рассматривать случай $x \to \infty$ (и Лопиталь). Если предел не существует, то асимптот нет. Иногда существует две асимптоты: $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $k_1 = \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{f(x)}{x}$ и аналогично b_1 и b_2.

Общий план исследования функции и построения графика.

1) Определение области существования функции.
2) Четность, нечетность функции.
3) Точки пересечения с осями, интервалы знакопостоянства.
4) Асимптоты.
5) Интервалы возрастания и убывания.
6) Экстремумы.
7) Интервалы выпуклости и вогнутости.
8) Точки перегиба.

Глава 10. Неопределенный интеграл

10.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Основная задача дифференциального исчисления – отыскание производной заданной функции. Однако имеется обратная задача: по данной $f(x)$ найти $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Лемма: Функция, производная которой на некотором промежутке равна нулю, является константой.

$f'(x) = 0$ по т. Лагранжа

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1),\ \ x_1<c<x_2$,

$f'(c)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=const$.

Теорема. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то любая другая первообразная имеет вид $F(x)+C$.

Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Восстановление функции по ее производной или отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x),\ d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int dF(x) = F(x)+C,\ \ (\int F'(x)dx = F(x)+C.$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \ где\ k - константа.$

4. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Табличные интегралы:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1),\ \int dx = c+C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$

3. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}+C$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}+C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq 1)$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

$$9.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$10.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$11.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0)$$

$$12.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + h}\right| + C \ (h \neq 0)$$

$$13.\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$14.\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$$

$$15.\int shxdx = chx + C$$

$$16.\int chxdx = shx + C$$

$$17.\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$18.\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

$$19.\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$20.\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

Непосредственное интегрирование

Вычисление интеграла путем использования таблиц и основных свойств называется непосредственным интегрированием.

Примеры.

$$\int\left(5\cos x - 1 + 3x + \frac{1}{x} - \frac{4}{1+x^2}\right)dx = 5\sin x - x + \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| - 4atctgx + C$$

.

$$\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x^2}{2}\right)dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin x\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \int(1 + \sin xdx) = x - \cos x + C \ .$$

10.2. Метод подстановки. Интегрирование по частям

Если известно, что

$$\int g(t)dt = G(t) + C,\ mo \int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Это вытекает из правила дифференцирования сложной функции.

Примеры:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dt \end{bmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$\int e^{x^2} x dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int e^t dt + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx = \begin{bmatrix} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{tg^2 t + 1}}{tg^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\frac{1}{\cos t} \cdot dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \ln\left| tg\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin t} + C = \ln\left| tg\left(\frac{arctgx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin(arctgt)} + C.$$

Интегрирование по частям

Нет формулы, выражающий интеграл от произведения функций через интеграл от сомножителей. Интеграл от элементарной функции не всегда является элементарной функцией.

Пусть имеются дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$: $d(u \cdot v) = udv + vdu$ или, интегрируя, получим: $u \cdot v = \int vdu + \int udv; \int udv = uv - \int vdu -$ формула интегрирования по частям.

При использовании формулы интегрирования по частям необходимо выбрать функцию, тогда оставшаяся часть будет дифференциалом функции v, т.е. dv. Можно указать следующие случаи:

1. $n \in N \quad \int x^n \begin{bmatrix} e^{mx} \\ \sin mxdx = \\ = \cos mx \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} x^n = u \\ du = x^{n-1}dx \\ \sin mxdx = dv \\ v = \int dv \cos mx \end{bmatrix}\right].$

В этом случае последовательное дифференцирование уменьшает показатель n до нуля. Наиболее простой случай, когда $n = 1$.

$$2.\ k \neq 1 \quad \int x^k = \begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{bmatrix} & du = \begin{pmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{pmatrix} dx \\ x^k dx = dv \quad v = \int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & (c = 0) \end{bmatrix}$$

В этом случае дифференцирование указанных функций обычно упрощает нахождение интеграла.

Примеры:

$$1)\ \int x^2 \ln|x|\,dx = \begin{bmatrix} x^2 dx = dv \quad v = \dfrac{x^3}{3} \\ \ln x = u \quad du = \dfrac{1}{3}dx \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$2.)\ \int x \cos xdx = \begin{bmatrix} x = u & dx = dv \\ coxdx = dv & v = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

$$3.)\int \operatorname{arctg} xdx = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} x = u & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv & v = x \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$$4.)\int e^x \cos xdx = \begin{bmatrix} e^x = u & e^x dx = du \\ \cos xdx = dv & v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= \sin xe^x - \int e^x \sin dx == \begin{bmatrix} e^x = u & e^x dx = du \\ \sin xdx = dv & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$\sin xe^x + \cos xe^x - \int e^x \cos xdx$, тогда

$$\int e^x \cos xdx = \frac{\sin xe^x + \cos xe^x}{2} + C.$$

10.3. Интегрирование рациональных функций. Разложение на простейшие дроби

Рассмотрим рациональную функцию вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Многочлен – это выражение вида $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется неправильной и необходимо выполнить деление:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ где } W(x) \text{ – многочлен.}$$

Пример

а) $\frac{x^5 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 - 2x - 1} = x^2 + 3 + \frac{-2x^2 + 6x - 2}{x^3 - 2x + 1}$.

б) $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$.

Далее будем рассматривать правильные дроби (т.е. старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя), т. к. интегрирование функции $W(x)$ – табличное. Если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – корни уравнения $Q(x) = 0$, то многочлен можно представить в виде $Q(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$, где A – коэффициент при старшей степени многочлена. Выражения $(x - \alpha_i)$ называют линейным множителем.

Среди корней могут быть и комплексные, в этом случае элементарными множителями будут выражения $(x^2 + 2px + q),\ D = 4p^2 - 4q < 0$. Кроме того, корни могут быть кратными (одинаковыми). Окончательно имеем: $Q(x) = (x - \alpha_1)^r \cdot (x - \alpha_2)^s \cdot ... \cdot (x^2 + 2px + q)^t$ где $r, s, t \in N$.

В высшей алгебре доказывается, что правильную дробь можно представить в виде простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+...+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+...+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+2px+q)^2}+...+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}$$

Это разложение рациональной функции на простейшие дроби.

10.4. Интегрирование простейших дробей

Чтобы определить числа A_i, N_i, M_i, умножим обе части разложения на $Q(x)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства.

Пример: $$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2};$$

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3);\quad 2x-1=x(A+B)-(2A+3B)$$

$$x^1\,|\,2=A+B,\qquad A=5$$

$$x^0\,|=-(2A+3B)=-1,\qquad B=-3$$

Алгоритм.

1.Выделить правильную дробь.

2.Знаменатель разложить на элементарные множители.

3.Найти коэффициенты в разложении $\frac{R}{Q}$ на простейшие дроби.

После этого задача сводится к нахождению интегралов 4 типов:

$$I.\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\ln|x-\alpha|+C.$$

$$II.\int\frac{A}{(x-\alpha)^r}dx=-\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}+C,\ (r>1).$$

$$III.\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx.$$

$$IV.\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}dx,\ \ (r>1).$$

Вычислим интеграл типа III.

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2$. Используем подстановку, $x+p=t,\ x=t-p,\ dx=dt,\ h=q-p^2>0$.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx=\begin{bmatrix}x+p=t\\ dx=dt\\ x=t-p\end{bmatrix}=\int\frac{At-Ap+B}{t^2+h}dt=\frac{A}{2}\int\frac{2t}{t^2+h}dt+$$

$$+(B-Ap)\int\frac{dt}{t^2+h}=\frac{A}{2}\ln\left|t^2+h\right|+\frac{(B-Ap)}{\sqrt{h}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{h}}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+2px+q\right|+\frac{B-Ap}{\sqrt{h}}arctg\,\frac{x+p}{\sqrt{h}}+C\,.$$

<u>Пример:</u>

$$\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx=\int\frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx=\left[\begin{array}{l}x+2=t\\ x=t-2,\ dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{6t-12+5}{t^2+5}=$$

$$=3\int\frac{2tdt}{t^2+5}-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\ln\left|t^2+5\right|-\frac{7}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{t+C}{\sqrt{5}}=$$

$$=3\ln\left|x^2+4x+9\right|-\frac{7}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C\,.$$

Вычисление интеграла <u>типа IV</u>.

В числителе записывается производная знаменателя: $Ax+B=(2x+p)\dfrac{A}{2}+B-\dfrac{Ap}{2}$ и

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+(B-\frac{Ap}{2})\cdot\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+(B-\frac{Ap}{2})\cdot\int\frac{\beta dz}{\beta^{2n}(1+z^2)^n}=$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\frac{-1}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot(n-1)}+I_n\,,$$ где $x+\dfrac{p}{2}=\beta z;\ q-\dfrac{p^2}{4}=\beta^2\,(>0);$ $dx=\beta dz$.

Интегралы вида $I_n=\displaystyle\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$ вычисляются по рекуррентной формуле:

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$ (или формула приведения).

Знаяя, что $I_1=\displaystyle\int\frac{dz}{z^2+1}=arctgz$ можно вычислить $I_2,I_3,\ldots$

Пример.

$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; по формуле приведения:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}; \ \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg + C,$$

окончательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} arctgx + C = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} arctgx + C.$$

10.5. Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(u,v)$ – рациональная функция от u,v всегда выражается через элементарные функции.

1) Часто используется универсальная подстановка:

$$tg\frac{x}{2} = t, \ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

и получается $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ от рациональной функции t.

Использование этой подстановки обычно связано с громоздкими вычислениями.

2) Если имеет место тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно применить подстановку $tgx = t, \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{dx}{tg^2 x \cos^6 x} = \begin{bmatrix} tg = t, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{dx}{\cos^2} = dt \end{bmatrix} =$$

$$=\int\frac{(1+t^2)dt}{t^2}=\frac{t^3}{3}+2t-\frac{1}{t}+C=\frac{tg^3x}{3}+2tgx-ctgx+C$$

Пример 2.

$$\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x+\cos x}=\begin{bmatrix} tg\frac{x}{2}=t,\ \ dx=\dfrac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1}\end{bmatrix}=\int\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$1+t^2$$

$$=\int\frac{(1-t^2)2dt}{(1+t^2)^2\left(\dfrac{2(t+1)}{1+t^2}\right)}=\int\frac{(1+t)(1-t)}{(1+t^2)(t+1)}=\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{1+t^2}=arctg-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+C=$$

$$=arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+tg^2\frac{x}{2}\right|+C.$$

3) Интегралы вида $\int\cos^n x\cdot\sin^m xdx$, где m и n – целые числа любого знака.

а) если $m=2k+1$ – нечетное, тогда $\int\cos^n x\cdot\sin^m xdx=\int\cos^n x\cdot\sin^{2k}x\cdot\sin xdx,\ \sin xdx=-d(\cos x)$, используется подстановка. $\cos x=t\left(\left(\sin^2 x\right)^k=\left(1-\cos^2 x\right)^k\right)$.

б) если n – нечетное, тогда $\sin x=t, \cos xdx=d(\sin x)$.

в) если m и n четные, то можно использовать подстановку $tgx=t$, или понизить степень:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x, \cos^2 x=\frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

4) Часто используют формулы:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right],$$

$$\cos mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right].$$

Пример3.

$$\int\cos^2 x\sin^3 xdx=\int\cos^2 x\sin^2 xdx=-\int\cos^2 x(1-\cos^2 x)d(\cos x)=$$

$$=\left[\cos x=t\right]=-\int t^2(1-t^2)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

10.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

I. Рассмотрим интеграл вида $\int R(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, где R – рациональная функция. Используем подстановку $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}=\varphi(t)$ тогда необходимо вычислить $\int R(\varphi(t),t))\varphi'(t)dt$, т.е. интеграл от рациональной функции. Затем возвращаемся к переменной x. По этой же методике можно вычислять и $\int R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}})dx$. Необходимо привести к общему знаменателю q_1 и q_2: если он равен m, то положить $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}=\begin{bmatrix}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t,\ \ x=\frac{t^3+1}{t^3-1}\\ dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{t(-6)t^2dt}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}+1\right)(t^3-1)^2}=-6\int\frac{t^3dt}{2t^3(t^3-1)}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$e't=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Пример 2.

$$\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx=\begin{bmatrix}t=\sqrt[6]{x},\ \ 6t^5dt=dx\\ t^6=x\end{bmatrix}=\int\frac{t^3-1}{t^2-1}dt=\int\frac{t^2+t+1}{t+1}dt=$$

$$=\int\left(t+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}+\ln|t+1|+C=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

II. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ - подстановка $t=\frac{1}{x-\alpha}$.

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\begin{bmatrix} x+1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|+C=(t=\frac{1}{x+1}).$$

.

III. Тригонометрические подстановки:

а) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то подстановка $x=a\sin,\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\ dx=a\cos tdt$.

б) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то подстановка $x=atgt,\ \sqrt{a^2+x^2}=a\frac{1}{\cos t},\ dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$.

в) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x=a\frac{1}{\cos t},\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}}=atgt,\ dx=\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}$

IV.

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\begin{cases}\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \\ \int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C\end{cases}.$$

Например:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left[\begin{array}{ll}\sqrt{a^2-x^2}=u & du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ dx=dv & v=x\end{array}\right]=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}+2C.$$

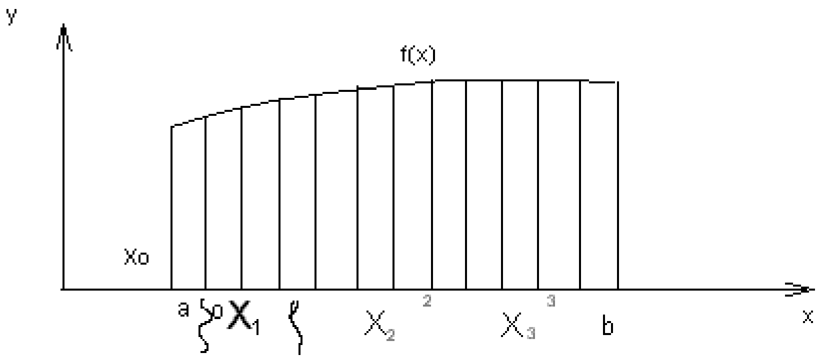
тогда

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$. Аналогично для второго интеграла.

Глава 11. Определенный интеграл

11.1.Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ неотрицательная функция.



Определим площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a, x=b, y=0$ и графиком функции $y=f(x)$

Разобьем $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$, выберем на каждом из частичных отрезков $\left[x_j;x_{j+1}\right]$ $(j=1,2,...,n-1)$

по произвольной точке ζ_j определим значение функции $f(\zeta_j)$ (в этих точках) и составим сумму: $S = \sum_{j=0}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j, (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j)$.

Эта сумма равна сумме площадей n прямоугольников. Устремим $\max\{\Delta x_j\} \to 0$ Если при этом $S_n = S$, и S не зависит от способа разбиения и выбора точек ζ_j, то величина S называется площадью данной криволинейной трапеции: $S = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j$.

Каждая криволинейная трапеция, соответствующая непрерывной функции $f(x)$,имеет площадь S.

Указанный предел называется определённым интегралом и обозначается: $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j$.

Числа a и b называются нижним (a) и верхним (b) пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Определенный интеграл – это число.

Вычисление определённого интеграла по определению можно осуществить с помощью компьютера, однако на практике используют формулу Ньютона – Лейбница.

Пусть задана непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ – ее первообразная. Тогда $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$ или $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ – определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом: $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ – функция x.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$ и по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = \Phi(x)$.

Дифференцируем: $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(x)-F(a)\right] = O'(x) = f(x)$ – производная по верхнему пределу равна подынтегральной функции.

Свойства определённого интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ – не зависит от значения переменной интегрирования.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = F(a)-F(a)=0$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

4.Для любых чисел *a*, *b*, *c*: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a)$.

5. $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx,\ A = const$.

6. $\int\limits_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. Если $m \le f(x) \le M$ *на отрезке* $\left[a,b\right]$ *и* $a \le b$, .

$то\ m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

8. $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(\zeta),\ где\ \zeta \in \left[a,b\right]$ – теорема о среднем.

Пример: $\int\limits_1^e (x+\frac{1}{x})dx = \int\limits_1^e 2xdx + \int\limits_1^e \frac{1}{x}dx = (x^2+\ln x)\Big|_1^b = e^2+1-1-0 = e^2$.

<u>11.2. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле</u>

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две непрерывные дифференцируемые функции на отрезке $\left[a,b\right]$, тогда

$d(uv) = vdu + udv$. Проинтегрируем равенство от *a* до *b*:

$\int\limits_a^b d(u\cdot v)=\int\limits_a^b vdu+\int\limits_a^b udv$, имеем: $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$ – формула интегрирования по частям.

Пример.

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos xdx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ \cos xdx=dv & v=\sin x \end{bmatrix}=x\sin\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin xdx=(x\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi}=-2.$$

Замена переменной в определённом интеграле

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная функция на $[a,b]$. Введем новую переменную по формуле $x=\varphi(t)$. Если $\varphi(\alpha)=a;\ \varphi(\beta)=b;\ \varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$, $f[\varphi(t)]$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

11.3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $a\le x\le\infty$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если предел существует, то интеграл существует или сходится, если предел не существует, то интеграл расходится (не существует), т.е. не имеет конечного значения.

Геометрический смысл: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ выражает площадь бесконечной области, заключенной между линиями $y=f(x),\ y=0,\ x=a$.

Аналогично, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_c^{\infty} f(x)dx$.

Для последнего равенства должны существовать оба интеграла, c – число.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

у

$y=\frac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}arctgx\Big|_0^b=\lim_{b\to 0}arctgb-0=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. При каких значениях параметра α интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится и при каких расходится?

$$\alpha\neq 1;\quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1},\ при\ \alpha>1\\ \infty\ при\ \alpha\leq 1\end{cases}.$$

$$\alpha=1;\quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}(\ln b)=\infty$$

Пример 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=0-\lim_{\alpha\to-\infty}arctga+\lim_{b\to\infty}arctgb-0=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Если требуется установить, сходится ли данный интеграл или расходится, удобно применять теоремы:

1. Если для всех $x(x\geq\alpha)$ выполняется неравенство $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$ и если $\int_{\alpha}^{\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{\alpha}^{\infty}f(x)dx$ тоже сходится и $\int_{\alpha}^{\infty}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\infty}\varphi(x)dx$.

2. Если для всех $x(x\geq\alpha)$: $0\leq\varphi(x)\leq f(x)$ причем $\int_{\alpha}^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то и $\int_{\alpha}^{\infty}f(x)dx$ расходится.

3. Если $\int\limits_{\alpha}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_{\alpha}^{\infty}f(x)dx$ сходится.

Пример 4. Сходится ли $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$?

При $x\geq 1$: $\frac{1}{x^2(1+e^x)}<\frac{1}{x^2}$, $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1$, поэтому (т.1) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ тоже сходится и < 1.

Пример 5. Исследовать $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}>\frac{x}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Но $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^{b}=\infty$ – расходится, поэтому рассматриваемый интеграл тоже расходится.

Пример 6. Исследовать $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ на сходимость.

Подынтегральная функция знакопеременная. $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\leq\left|\frac{1}{x^3}\right|$ Но $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2}$, значит, интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ сходится, и по т.3 сходится и $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$.

11.4. Несобственные интегралы от функций, имеющих разрыв

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a\leq x\leq b$, а при $x=b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$, как о пределе интегральной суммы, поскольку этот предел может не существовать.

Интеграл $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_{a}^{c}f(x)dx$ Если предел существует, то интеграл сходится, иначе – расходится.

Если функция имеет разрыв при $x = a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)dx$ – аналогично, если предел существует, то интеграл сходится, иначе – расходится.

Если $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 внутри отрезка $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)dx + \int\limits_{x_0}^b f(x)dx$ – существует, если существуют <u>оба</u> интеграла в правой части.

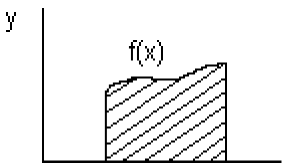
<u>Пример 1.</u> Исследовать сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{c\to 1-0}\int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim\limits_{c\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = -\lim\limits_{c\to 1-0} 2(\sqrt{1-c}-1) = 2$ – сходится.

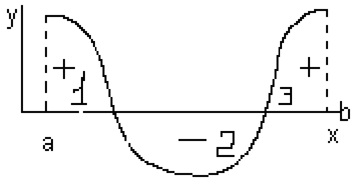
<u>Пример 2.</u> $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{c\to 0}\int\limits_{-1}^c \frac{dx}{x^2} + \lim\limits_{b\to 0}\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim\frac{1}{x}\Big|_b^1 = \infty$ – интеграл расходится.

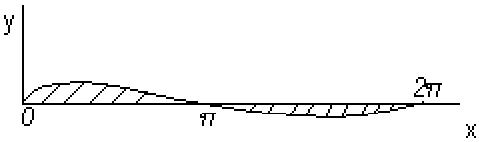
<u>Геометрические приложения определенного интеграла</u>
<u>11.5. Вычисление площади плоской фигуры</u>

а) <u>Площадь плоской фигуры</u> $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, если $f(x) \ge 0$



Если $f(x) < 0$ на интервале интегрирования, то рассматривают интеграл от модуля (или изменяют знак). $S = \int\limits_1 fdx - \int\limits_2 fdx + \int\limits_3 fdx$ или $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.



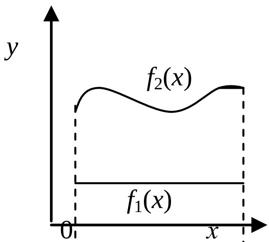


Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sin x$ и осью абсцисс, если $0 \le x \le 2\pi$.

$$y = \sin x,\ \ 0 \le x \le 2\pi;\ \ S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

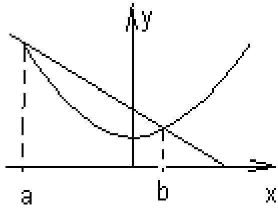
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2;\quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2;\ \ S = 2 + |-2| = 4\,.$$

Более удобной является формула: $S = \int_a^b \left[\, f_2(x) - f_1(x) \right] dx$ где $f_2(x) \ge f_1(x)$.



Пример 2. Найти площадь, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y = 3$.

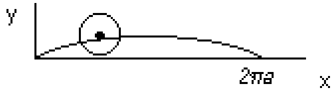
$$\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases};\ \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{cases};\ S=\int_{-2}^{1}\left[3-x-x^2-1\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[2-x-x^2\right]=4\frac{1}{2}(ед^2).$$



<u>б) Пусть функция задана в параметрической форме:</u> $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$.

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$$

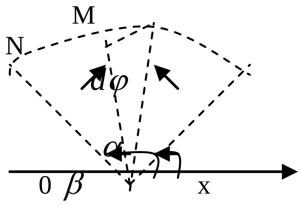
<u>Пример 3.</u> Вычислить площадь одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t);\ y=a(t-\cos t)$.



$x=0, t=0, x=2\pi a, t=2\pi$.

$$S=\int_0^{2\pi a} ydx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^3 \qquad (\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}).$$



в) <u>Если кривая задана в полярных координатах</u>: $r=f(\varphi), \varphi=\alpha, \varphi=\beta$.

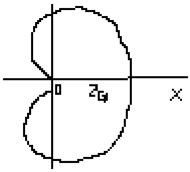
Разобьем данную площадь радиус – векторами $\varphi=\alpha, \varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2, ..., \beta=\varphi_n$ на n частей. Пусть углы между радиус –

векторами равны $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, ..., \Delta\varphi_n$ Площадь i сектора: $\Delta S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$.

Площадь: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$.

Пример 4. Найти S, ограниченную кардиоидой: $r = a(1+\cos\varphi)$.

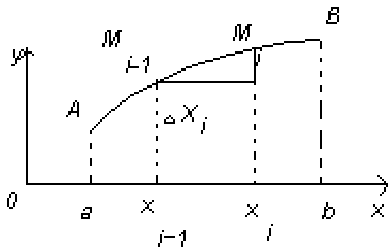
Вычислить половину площади:



$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\pi + \frac{a^2}{4}(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}))\Big|_0^{\pi} = \frac{3a^2\pi}{4} \cdot S = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

11.6. Длина дуги кривой



а) Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Возьмем на $\overset{\smile}{AB}$ точки $A, M_1, M_2, ..., M_i, B$, и проведем хорды, которые обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. Получим ломанную $AM_1...M_{n-1}...B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной: $l_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$. Длина дуги – предел: $L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$. Если на отрезке $[a,b]$ $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Пусть $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, тогда

$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$. По теореме Лагранжа $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{f'(\zeta)\Delta x}{\Delta x}$, $x < \zeta < x + \Delta x$. $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\zeta_i)]^2}\,\Delta x_i$, по условию, $f(x)$ и $f'(x)$ – непрерывны, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f')^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 4$.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ 1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4}x = \frac{4 + 9x}{4}$$

$$L = \int_0^4 \frac{\sqrt{4+9x}}{2}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{4+9x} = t,\ t_н = 2,\ t_в = \sqrt{40} \\ x = \dfrac{(t^2 - 4)}{9},\ \ dx = \dfrac{2}{9}tdt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{40}} t\frac{2}{9}tdt = \frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^{\sqrt{40}} =$$

$$= \frac{1}{27}(40\sqrt{40} - 8) = \frac{1}{27}8(10\sqrt{10} - 1).$$

б) Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ то длина дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{\psi'^2}{\varphi'^2}}\varphi' dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt;\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$$

в) Пусть кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$ тогда $x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ x = r(\varphi)\cos\varphi;\ y = r(\varphi)\sin\varphi$.

$$x'_\varphi = \frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi;\ y'_\varphi = \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + \cos\varphi;$$

$$x'^2 + y'^2 = r'^2\cos^2\varphi - 2rr'\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi +$$
$$+ 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi = r'^2 + r^2;$$

тогда $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$.

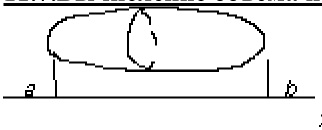
Пример. Найти длину дуги кардиоиды: $r = a(1 + \cos\varphi)$.

$r' = -a\sin\varphi$;

$r^2 + r'^2 = a^2\left[1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$;

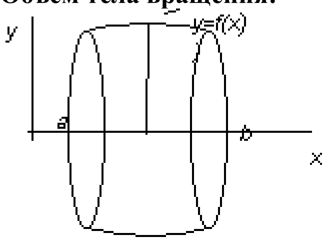
длина дуги: $\dfrac{1}{2}L = \int\limits_0^{\pi} 2a\cos\dfrac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\dfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a;\ \ L = 8a$.

<u>11.7.Вычисление объема и площади поверхности вращения.</u>



Пусть имеется тело, для которого известна площадь сечения, перпендикулярного оси *ox*, т.е. $S = S(x)$. Проведем плоскости, перпендикулярные оси *ox*. Они разобьют тело на слои, $V_{слоя} = S(x_i)\Delta x_i$ (цилиндр), тогда $V_n = \sum\limits_{i-1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу: $V = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$. $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

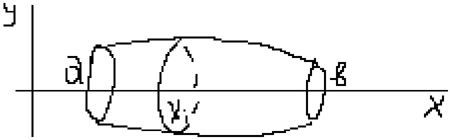
Объем тела вращения:



Если ось вращения – ось O*Y*, то объем тела вращения: $V_y = \pi\int\limits_c^d x^2dy$.

Если ось вращения – ось O*X*, то объем тела вращения: $S(x) = \pi y^2$ и $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2dx$.

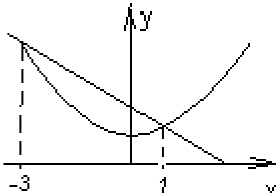
Площадь поверхности вращения.



Разобьем $[a,b]$ на n частей и проведем ломаную. При вращении ломаной получаются усеченные конусы (цилиндры). Площадь поверхности $\Delta P_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1} + f(x_i)}{2} l_i$, длина хорды $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i$,

$$D = \lim_{n\to\infty} \sum_i 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx .$$

Пример: Объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями: $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.



$$\begin{cases} y = \dfrac{3-2x}{x} \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}; \quad 2x + x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \;\; x_2 = -3 .$$

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^{1} \frac{x^4}{4} dx = \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{272}{15}\pi .$$

Глава 12. Дифференциальные уравнения

12.1. Понятие комплексного числа

Комплексные числа – выражения вида $z = a + ib$, a,b – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1$ $(\sqrt{-1} = i)$. Числа $a + i_0$ действительные, $0 + bi$ – чисто мнимые.

Число a – действительная часть числа z, $a = \operatorname{Re} z$, b – мнимая часть числа z, $b = Imz$, модуль: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

Сопряжённое число $\overline{z} = a - ib$ (отличается знаком мнимой части). Два комплексных числа z_1 и z_2 равны, если $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.Комплексное число равно *0*, если $a = 0, b = 0$. С комплексными числами можно производить арифметические операции (по правилам алгебры):

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_1} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i .$$

Решение квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac$.

1) если $D > 0$, то 2 действительных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$,

3) если $D < 0$, то 2 комплексных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a} \cdot i$.

Пример: Решить уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = -36, x_1 = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + i\frac{\sqrt{36}}{2} = 1 + 3i, \; x_2 = 1 - 3i.$$

12.1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Наряду с представлением комплексного числа в алгебраической форме: $z = x + iy$, во многих случаях удобно пользоваться комплексным числом в полярных координатах.

Совмещая полюс полярной системы координат с началом декартовой системы координат,

а полярную ось с осью OX, точка $M(x,y)$ будет иметь полярные координаты r и ϕ, $M(\phi,r)$.–Декартовые координаты x и y точки $M(x,y)$ связаны с её полярными координатами r и ϕ соотношениями $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ и число $z = x + iy$ запишется в форме: $z = r(cox\phi + +i\sin\phi)$.

Правую часть этого равенства называют тригонометрической формой комплексного числа z, угол ϕ – аргументом числа z и обозначают Arg z, r – модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ находят по формулам:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \qquad Argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & при\ x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & при\ x < 0; y \ge 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & при\ x < 0; y < 0. \end{cases}$$

$\varphi = Argz = \arg z + 2\pi k, (k = 0; \pm 1; \pm 2 ...)$.

Значение аргумента φ, заключенное в границах, $-\pi < \varphi \le \pi$ называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg z$. Для сопряженных комплексных чисел z и $\overline{z}$ модули равны, а главное значения их аргументов отличаются только знаком: $|z| = |\overline{z}|, \arg z = -\arg z$.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение. Модуль комплексного числа $-\sqrt{3} + i$ определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Так как число $-\sqrt{3} + i$ лежит во второй четверти, по формуле найдем: $\varphi = arctg\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi k$. Подставляя значение модуля и аргумента в формулу, получаем

$$-\sqrt{3} + i = r\left[\cos(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k) + i\sin(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k)\right] = r(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z=-1$.

Решение. $-1=-1+0\cdot i$ Модуль числа $z=-1$ будет равен $\left|-1\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$ а аргумент $\varphi=arctg\dfrac{0}{-1}=\pi+2\pi k$. По найденным значениям модуля и аргумента число $z=-1$ в тригонометрической форме запишется так: $-1=1\left[\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k)\right]=\cos\pi+i\sin\pi$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z=1-i$.

Решение. Согласно формулам, найдем: $\left|z\right|=\sqrt{2};\ \varphi=arctg(-1)+2\pi k=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$. Так как число находится в четвертой четверти, получаем $1-i=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

Умножение и возведение в степень.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)\right]=$$
$$=r_1\cdot r_2\left[(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right],$$

т.е. $\left|z_1\cdot z_2\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|$, $\arg z_1\cdot z_2=\arg z_1\cdot\arg z_2$. Получили формулу: $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модули перемножаются, а аргументы складываются.

Полученная формула справедлива и для произведения $n\,(n>2)$ комплексных чисел. При этом имеем $z_1\cdot z_2\ldots\cdot z_n=r_1\cdot r_2\ldots\cdot r_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right]$.

Полагая в равенстве $z_1=z_2=\ldots=z_n=z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, найдем: $z^n=\left|r^n\right|(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, т.е. $\left|z^n\right|=r^n$; $\arg(z^n)=n\arg z$. Эта формула называется формулой Муавра.

Деление. Рассмотрим деление двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

$$=-z';-z'+\frac{1}{x}\cdot z=2\frac{\ln x}{x};\ z'-\frac{1}{x}\cdot z=-2\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$, т.е. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$.

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модуль частного равен частному их модулей, а из аргумента делимого вычитаем аргумент делителя.

Дадим геометрическую интерпретацию умножения и деления комплексных чисел. Из формулы умножения следует, что при умножении комплексных чисел z_1 на z_2 вектор *OZ*, поворачивается около начала *0*(0,0) против часовой стрелки на угол $\varphi_2=\arg z_2$ и сжимается (растягивается) в r_2 раз, если $r_2>1(r_2<1)$ (рис.1).

При делении же комплексных чисел z_1 на z_2, согласно формуле, вектор *OZ*, поворачивается около точки *0*(0,0) по часовой стрелке на угол $\varphi_2=\arg z_2$ и сжимается (растягивается) в r_2 раз, если $r_2>1(r_2<1)$ (рис.2).

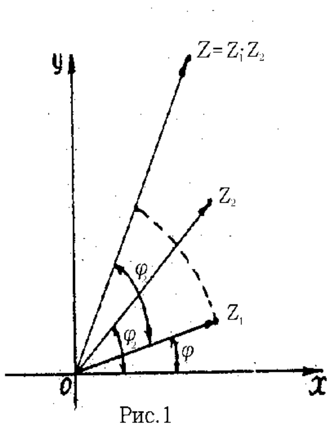


Рис.1

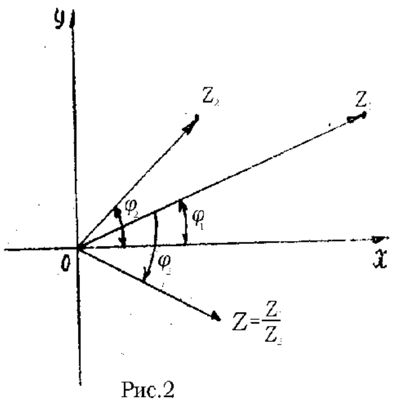


Рис.2

Извлечение корня. Пусть дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Надо найти комплексное число $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, удовлетворяющее условию $\omega^n = z$. Согласно формуле Муавра, получим: $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Отсюда находим $\rho^n = r,\, n\theta = \varphi + 2\pi k,\, (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ или $\rho = \sqrt[n]{r},\, \theta_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\, (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ Таким образом, имеем $\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$,где $k = 0, 1, 2, ...(n-1)$.

Первые равенства показывают, что модули всех корней ω_k одинаковы и расположены на окружности радиуса $|\omega| = \sqrt[n]{|z|} = R$ с центром в начале координат. Обозначим одно из значений корня с аргументом $\dfrac{\varphi}{n}$, полученное из формулы при $k = 0$ через ω_1; тогда $\omega_1 = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n})$ Полагая затем $k = 1$, найдем следующее значение корня ω_2 с аргументом $\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$: $\omega_2 = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}) + i\sin(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n})\right]$; его можно получить из первого значения поворота на угол $\dfrac{2\pi}{n}$. Затем, полагая $k = 2, 3, ..., (n-1)$, находим все значения корня. Каждое последующее получается из предыдущего поворотом на один и тот же угол $\dfrac{2\pi}{n}$.

Следовательно, все n значений корней $\omega_k\,(k = 0; n-1)$ делят окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ на n равных частей, т.е. являются вершинами правильного n – угольника, вписанного в эту окружность.

Пример 4. Вычислить $(-\sqrt{3} + i)^4$

Решение. Получим тригонометрическую форму комплексного числа: $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.Применяя формулу Муавра для $n = 4$, получаем:

$$(-\sqrt{3}+i)^4=2^4(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 4+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 4)=16(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi)=$$

$$=16(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)=16(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-8-i8\sqrt{3}.$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Представим число 1 в тригонометрической форме. Имеем $z=1+0\cdot i$,тогда по формулам, получим: $|1|=\sqrt{1^2+0^2}=1, \varphi=arctg\frac{0}{1}=0^0+2\pi k, \arg 1=0^0$, т.е. число находится на положительной полуоси *OX*. Из формулы находим $p=\sqrt[4]{1}=1$, значит, все значения корней лежат на единичной окружности $R=1$. Далее $\theta_1=\frac{\arg 1}{4}=0^0$ и $\omega_1=1(\cos 0^0+i\sin 0^0)=1, \omega_1=1$. Все значения $\sqrt[4]{1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в единичную окружность $R=1$, причем одна из вершин этого квадрата – точка (1,0), а остальные значения корней $\omega_2,\omega_3,\omega_4$ можно получить поворотом на угол $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ первого значения корня ω_1,

$$\omega_2=1\left[\cos(0^0+\frac{\pi}{2})+i\sin(0^0+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$\omega_3=1\left[\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$\omega_4=1\left[\cos(\pi+\frac{\pi}{2})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i;$$

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[3]{2+2i}$.

Решение. Представим число $2+2i$ в тригонометрической форме. Это число лежит в первой четверти; по формулам находим $\rho=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}; \varphi=arctg1+2\pi k=\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Следовательно, $2+2i=\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ По формулам определяем корни: $\omega_k=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ (k=0,1,2)$,

отсюда получим:

при

$$k=0,\ \omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ k=1,\ \omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$k=2,\ \omega_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

12.3. Понятие дифференциального уравнения. Задача Коши

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее аргумент x,исходную функцию y и её производные. Порядок старшей производной называется порядок дифференциального уравнения.

Всякая $y=F(x)$ – решение, если она обращает его в тождество.

Общее решение дифференциального уравнения n–го порядка содержит n констант $y=\varphi(x,c_1,...,c_n)$, иногда получаем ответ в виде: $F(x,y,c_1,...,c_n)=0$ это общий интеграл.

Дифференциальное уравнение I-го порядка

Это дифференциальное уравнение вида $F(x,y,y')=0$, иногда $y'=F(x,y)$.

Общее решение $y=\varphi(x,c)$, c – произвольная постоянная.

Геометрически общее решение – семейство интегральных кривых.

Если задать точку $M_0(x_0,y_0)$, через которую проходить кривая, то тем самым из бесконечного числа кривых выделяется 1 кривая – частное решение.

Аналитически – имеется начальное условие: $y_0(x_0)=y\Rightarrow$ из общего решения находится частное. Это задача Коши.

Пример. Решить задачу Коши: $y'=2x,\ y(0)=1$

$y=x^2+C; 1=0^2+C; C=1; y=x^2+1$ – частное решение.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ или $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Рассмотрим решение некоторых дифференциальных уравнений первого порядка.

<u>12.4. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными</u>

Рассмотрим дифференциальное уравнение, $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$, полагая, что $f_2(y) \neq 0$, $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Интегрируя, получим решение: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде: $M(x)dx + N(y)dy$. Интегрируем: $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Пример:

$$xdx + ydy = 0; \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1^2.$$

Если дифференциальное уравнение записано в виде: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ и $M_2(x) \neq 0,\ N_1(y) \neq 0$, то преобразуем его: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$ Далее интегрируем .

Примеры:

$$xdx + ydy = 0; \ xdy = -ydx; \ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \ y = \frac{c}{x}.$$

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0; \ \frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0; \ (\frac{1}{x}+1)dx + (\frac{1}{y}-1)dy = 0,$$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = \ln(xy) + x - y = c.$$

12.5. Однородные относительно аргумента и функции дифференциального уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го измерения, если $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 1-го измерения, $f(x,y)=xy-y^2$ – 2-го измерения.

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется однородным относительно x и y, если $f(x,y)$ однородная функция **нулевого** измерения.

Решение. По условию: $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. Пусть $\lambda=\frac{1}{x}$ тогда

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(1,\frac{y}{x})=y'$. Сделаем подстановку:

$\frac{y}{x}=u,\ y=u\cdot x;\ \frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$ подставим в дифференциальное уравнение: $u+\frac{du}{dx}\cdot x=f(1,u)$ Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. $x\frac{du}{dx}=f(1,u)-u;\ \frac{dx}{x}=\frac{du}{f(1,u)-u}$, далее - интегрируем по u и x. Подставим вместо $u=\frac{y}{x}$

Пример: $y'=\frac{xy}{x^2-y^2};\ y=u\cdot x;\ y'=u+u'\cdot x=\frac{x\cdot u\cdot x}{x^2-u^2\cdot x^2}=\frac{u}{1-u^2}$

$$u'\cdot x=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2};\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^3}{1-u^2};\frac{du(1-u^2)}{u^3}=\frac{dx}{x};(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x};$$

интегрируем:

$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|=\ln|c|;-\frac{1}{2u^2}=\ln|u\cdot x\cdot c|,\ u=\frac{y}{x}$, имеем: $-\frac{x^2}{y^2}=\ln(cy)$.

12.6. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка методом подстановки

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно y и y'. Оно имеет вид: $y' + p(x)\cdot y = f(x)$. Если $f(x)=0$, то это однородное уравнение, иначе не однородное.

Будем искать решение в виде $y=u(x)\cdot v(x)$, тогда $y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, подставим в уравнение: $u'v\cdot + uv' + p(x)uv = f(x)$, или $u(v' + p(x)v) + u'v = f(x)$ Выберем v такой, чтобы $v' + p(x)v = 0$, тогда $\dfrac{dv}{dx} = -pv;\ \dfrac{dv}{v} = -pdx;\ \ln v = -\int pdx + \ln c$, или $v = c_1 e^{-\int pdx}$, т.к. достаточно отличного от нуля решения, то $v = e^{-\int pdx}$ $(\neq 0)$. Подставим найденное значение v:

$u'v = f;\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{f}{v};\ u = \int \dfrac{f(x)}{v(x)}dx + c$ окончательно, $y = uv = v\left[\int \dfrac{f(x)}{v(x)}dx + c\right]$.

Пример: $y(1) = \dfrac{5}{4}$; $xy' + 2y = x^2$; $y' + \dfrac{2y}{x} = x$.

Пусть

$$y = uv,\ y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x,\ u(v' + \frac{2v}{x}) + u'v = x;$$

$$v' + \frac{2v}{x} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x};\ \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x};\ \ln v = -2\ln x + \ln c_1;\ v = \frac{c_1}{x^2},\ c_1 = 1,\ v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставим в исходное:

$$u(v' + \frac{2}{x}v) + u'\frac{1}{x^2} = x;\ \frac{du}{dxx^2} = x;\ du = x^3dx;\ u = \frac{x^4}{4} + c;\ y = \frac{1}{x^2}(\frac{x^4}{4} + c) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2};$$

$\dfrac{5}{4} = \dfrac{1^2}{4} + \dfrac{c}{1^2};\ c = 1$, частное решение: $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{x^2}$.

12.7. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка методом вариации произвольной постоянной

Найдём решение однородного уравнения: $y' + p(x) \cdot y = 0$, переменные

разделяются:

$$y = -p(x)y; \ \frac{dy}{y} = -p(x)dx; \ \ln y = \int -p(x)dx + \ln c; \ y = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Будем считать, что c - это функция от x: $c = c(x)$, тогда

$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = c(x)z_1$ (для удобства). Подставим в уравнение:

$c'z_1 + cz_1' + pcz_1 = f$

$$c'z_1 + c(z_1' + pz_1) = f; \ \frac{dc}{dx} = \frac{f}{z}; \ c(x) = \int \frac{f}{z_1}dx + c_1; \ y = z_1 c(x) = e^{-\int pdx} \cdot \left[\int \frac{f}{z_1} + c_1 \right].$$

Пример:

$$y' + \frac{2y}{x} = x;$$

$$y' + \frac{2y}{x} = 0; \ \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}; \ \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}; \ \ln(y) = -2\ln x + \ln c; \ y = \frac{c}{x^2};$$

считаем $c = c(x)$.

$$y' = \frac{c'x^2 - c2x}{x^4}; \ c'\frac{1}{x^2} - c\frac{2}{x^3} + \frac{2c}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = x; \ c' = x^3; \ c = \frac{x^4}{4} + c;$$

$$y = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + c\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}.$$

12.8. Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид: $y' + p(x)y = f(x)y^n$, $(n \neq 0; n \neq 1)$.

Разделим на y^n: $\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{-n+1} = f(x)$ (а).

Сделаем замену: $z = y^{-n+1}$, $z_x' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$ подставим в (а):

Это линейное дифференциальное уравнение относительно z:

$\frac{z}{1-n} + pz = f(x); \ z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$. Находим z, затем находим y (вместо z подставим y^{-n+1}).

Пример:

$$xy' - y(2y\ln x - 1) = 0;\ xy' + y - 2y^2\ln x = 0;\ y' + \frac{1}{x}y = 2y^2\frac{\ln x}{x}$$ -

Бернулли!

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = 2\frac{\ln x}{x};\ y^{-1} = z;\ -y^{-2}y' = z';\ \frac{y'}{y^2} = -z';$$

$$-z' + \frac{1}{z}z = 2\frac{\ln x}{x};\ z' - \frac{1}{x}z = -2\frac{\ln x}{x}.$$

линейное относительно z :

$$z' - \frac{1}{x}z = 0;\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x};\ \ln z = \ln x + \ln c;\ z = x\cdot c(x)$$ методом вариации.

$$z' = c + x\cdot c';\ c + xc' - \frac{1}{x}xc = -2\frac{\ln x}{x};\ xc' = -2\frac{\ln x}{x};\ \frac{dc}{dx} = -2\frac{\ln x}{x^2};$$

$$c = \int\frac{-2\ln x}{x^2}dx = \left| u = \ln x;\ du = \frac{dx}{x};\ dv = \frac{dx}{x^2};\ v = \frac{-1}{x}\right| =$$

$$= (-2)(\frac{-1}{x})\ln x - (-2)\int(\frac{-1}{x})\frac{dx}{x} = 2\frac{\ln x}{x} - 2\int\frac{dx}{x^2} = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + c_1;$$

$$z = x\cdot c(x) = x(2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + c_1) = 2\ln x + 2 + c_1x;\ y^{-1} = z = 2\ln x + 2 + c_1x.$$

12.9. Понижение порядка в дифференциальных уравнениях.

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным.

Дифференциальное уравнение порядка

$n(n>1)$: $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Всякая функция $y = f(x)$ определённая

и n раз дифференцируемая, называется решением этого уравнения, если она обращает его в тождество.

Решение $-$ $F(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = 0$. Задача Коши: найти такое решение д.у., чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ при $x = x_0$ принимали бы заданные значения $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ где $x_0, y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$ заданные числа, называемые начальными условиями. Задача Коши – значение функции и производных задаются при одном и том же значении $x = x_0$.

Общее решение: если задачу Коши можно решить при любых начальных значениях, то $F(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ – общее решение.

Понижение порядка

I. $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение – интегрирование n раз: $y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n x^{n-1}$.

Пример: $y''' = \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$; $y''(1) = -2$.

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx};\; y'' = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c_1;\; y''(1) = -2;\; -2 = \ln 1 + c_1;\; c_1 = -2,$$

$$y' = \int (\ln x + 2)dx = \ln x - x - 2x + c_2;\; y'(1) = 2;\; 2 = 1 \cdot \ln 1 - 1 - 2 \cdot 1 + c_2; c_2 = 5$$

$$y = \int (x \ln x - 3x + 5)dx = \frac{x}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + c_3; 1 = 0 - \frac{7}{4} \cdot 1 + 5 \cdot 1 + c_3;\; c_3 = -\frac{9}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{7}{4} x^2 + 5x - \frac{9}{4}.$$

II. Уравнения, не содержащие искомой функции $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Порядок может быть понижен на *1:* $y' = P(x)$ получим уравнение $F(x, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0$. Если уравнение не содержит искомой функции y или её производных до порядка $(n-1)$, т.е. $F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0$, то порядок может быть понижен на n единиц: $y^{(n)} = P(x)$; $f(x, p, ..., p^{(n)}) = 0$.

Пример: $y'' = 5y'$; подстановка $y' = p(x),\; y'' = \frac{dp}{dx}$; тогда

$$\frac{dp}{dx} = 5p; \frac{dp}{dx} = 5dx; \ln p = 5x + \ln c; \ln \frac{p}{c_1} = 5x; \frac{p}{c_1} = e^{5x};\; p = c_1 e^{5x}; \frac{dy}{dx} = c_1 \cdot e^{5x};$$

$$y = \frac{c_1}{5} \cdot e^{5x} + c_2.$$

III. Уравнения, не содержащие независимой переменной $f(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Понижение порядка на

$$1: y = p(x)\;\; y'' = \left[p(x)\right]'_x = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;\; y''' = \left[\frac{dp}{dy} p\right]'_x = (\frac{dp}{dy} p)'_y \frac{dy}{dx} =$$

$$=(\frac{d^2p}{dy^2}p+\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy})p=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+(\frac{dp^2}{dy})p$$

Общее решение уравнения: $F(y,p,c,...,c_{n-1})=0$; $p=\dfrac{dy}{dx}$ - I-го порядка.

Пример:

$$(y')^2+2y\cdot y''=0;\ y''=p(y);\ y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p;\ p^2+2y\frac{dp}{dy}p=0$$

$$p(p+2y\frac{dp}{dy})=0,$$

а) $p=0,\ \dfrac{dy}{dx}=0,\ y=c$;

б) $p+2y\dfrac{dp}{dy}=0;\ \dfrac{2dp}{p}=-\dfrac{dy}{y};\ 2\ln p=-\ln y+\ln c_1^2$;

$$p^2=\frac{c_1^2}{y};\ p=\frac{c_1}{\sqrt{y}};\ \frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{\sqrt{y}};\ \sqrt{y}dy=c_1dx;\ \frac{2}{3}\sqrt{y^3}=c_1x+c_2;$$

$$y^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(c_1x+c_2);\ y=\left[\frac{3}{2}(c_1x+c_2)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

12.10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: свойства решений. Определитель Вронского

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции y и её производных y', y'' и т.д.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ (1), где $a_1, a_2, f(x)$ - заданные функции от x.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется однородным или уравнением без первой части.

Если $f(x)\neq 0$ то уравнение называется неоднородным или уравнением с правой частью.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''+a_1y'+a_2y=0$$

Теорема 1: если y_1 и y_2 –два частных решения (1), то $c_1y_1+c_2y_2$ – тоже решение.

Определитель Вронского.

Определение. Два решения уравнения (1) y_1 и y_2 называется линейно независимым на отрезке $[a,b]$, если их отношения на этом отрезке не являются постоянными, т.е. $\frac{y_1}{y_2}\neq const$. Иначе решения называются линейно зависимыми, тогда $y_1=\lambda y_2\,(\lambda=const)$.

Если y_1 и y_2 есть функции от x, то определитель $W=\begin{bmatrix} y_1y_2 \\ y_1'y_2' \end{bmatrix}=y_1\cdot y_2'-y_1'\cdot y_2$ называется определителем Вронского.

Теорема 2: если решения y_1 и y_2 – линейно зависимые на отрезке $[a,b]$, то $W=0$.

12.11. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: формула Лиувилля.

Теорема 3: Если определитель Вронского $W(y_1,y_2)$, составленный для решений y_1 и y_2 уравнения (1), не равен 0 при каком-нибудь значении x_0 на отрезке $[a,b]$, где коэффициенты непрерывны, то он $\neq 0$ ни при каком значении x на $[a,b]$.

$W=W_0e^{-\int adx}$-формула Лиувилля.

Теорема 4: Если y_1 и y_2 – линейно независимые решения (1), то $y=c_1y_1+c_2y_2$ – общее решение (1).

12.12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$y''+py'+pq=0$ (1), p,q – действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого дифференциального уравнения, надо найти два линейно независимых частных решения.

Ищем частные решения в виде: $y=e^{kx}$ тогда $y'=ke^{kx}m\ y''=k^2e^{kx}$. Подставим в (1): $k^2e^{kx}, k^2e^{kx}+kpe^{kx}+q\cdot e^{kx}+0,\ e^{kx}(k^2+pk+q)=0,\ e^{kx}$, значит, $k^2+pk+q=0$. Если k удовлетворяет уравнению, то e^{ux} –

решение. Характеристическое уравнение по отношению к (1). Пусть корни уравнения k_1 и k_2.

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Возможны 3 случая:

1.) k_1 и k_2 – действительные числа, $k_1 \neq k_2$.

2.) $k_1 = k_2$ – действительные числа.

3) k_1 и k_2 – комплексные числа.

1. в этом случае частные решения: $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, эти решения линейно независимые $(\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const(k_1 \neq k_2)$.Общее решение: $y_{00} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x})$

Пример:

$y'' - 3y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение:

$k^2 - 3k + 2 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ \ y_{00} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2. $k_1 = k_2$. получаем одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$. Найдём второе линейно независимое решение $(e^{k_2 x} \equiv e^{k_1 x})$. Ищем его в виде: $y_2 = u(x) e^{k_1 x}$.

$y_2' = u' e^{k_1 x} + u k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u)$;

$y_2'' == k_1 e^{k_1 x}(u' + k_1 u) + e^{k_1 x}(u'' + k_1 u') = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$.

Подставим в уравнение (1):

$e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u) + p e^{k_1 x}(u' + k_1 u) + q u e^{k_1 x} = 0$ или:

$e^{k_1 x}\left[u'' + u'(2k_1 + p) + u(k_1^2 + p u_1 + q)\right] = 0;\ k_1^2 + p k_1 + q = 0$.

$k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, т.е. $2k_1 + p = 0$ значит, $u'' = 0;\ u' = A;\ u = Ax + b$.

Выберем частное решение, $A = 1,\ B = 0$, т. е. $u = x$.

$y_2 = x e^{k_1 x};\ \dfrac{y_2}{y_1} = x \neq const$ – линейно независимое, $y_{00} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$.

Пример: $y^u - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$ Характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0;\ k_1 = k_2 = 1;\ y_1 = e^x,\ y_2 = x e^x;\ y_{00} = c_1 e^x + c_2 x e^x$, $y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$, тогда $\begin{cases} 2 = c, \\ 4 = c_1 + c_2, \end{cases} \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$.

3. Комплексные корни. Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ Частные решения: $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Если какая-либо комплексная функция действительного аргумента $y = u(x) + iv(x)$ удовлетворяет уравнению, то этому уравнению удовлетворяют и функции $u(x)$ и $v(x)$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$. Выберем действительные функции $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ которые будут решениями уравнения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ линейно независимые: $\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = ctg\beta \neq const$.

Общее решение: $y_{00} = c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$.

Пример: $y'' - 4y' + 5y = 0,\quad k^2 - 4k + 5 = 0,\quad k_1 = 2 + i, k_2 = 2 - i$, $y_1 = e^{2x}\cos x,\ y_2 = e^{2x}\sin x,\ y_{00} = e^{2x}(\cos x c_1 + c_2\sin x)$ - общее решение.

12.13. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной.

Пусть имеем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$. (1)

Теорема 1: Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения $\tilde{y}$ и общего решения (y_{00}) соответствующего однородного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Для нахождения частного решения используют метод вариации производных постоянных. В общем решении однородного уравнения $y_{00} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (3), считаем c_1 и c_2 как функции от *X*.

$y_{00}=c_1'y_1+c_1y_1'+c_2'y_2+c_2y_2'$ Подберём c_1 и c_2 так, чтобы $c_1'y_1+c_2'y_2=0$ тогда $y_{00}'=c_1y_1'+c_2y_2'\cdot y_{00}''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2'$.

Подставим в (1): $(c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2')+a_1(c_1y_1'+c_2y_2')+a_2(c_1y_1+c_2y_2)=f(x)$

$c_1(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+c_2(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+c_1'y_1'+c_2'y_2'=f(x)$ если $c_1'y_1'+c_2'y_2'=f(x)$

Функция (3) будет решением неоднородного дифференциального уравнения (1), если $\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'=f(x) \end{cases}$ (4)

y_1 и y_2 – линейно независимы, $W(y_1;y_2)\neq 0$, поэтому: $c_1'=\phi_1(x);\ c_2'=\phi_2(x)$.

Интегрируя, получим: $c_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+\bar{c}_1;\, c_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+\bar{c}_2$.

Подставим $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (3) и получим общее решение: $y=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2$.

Пример:

$y''+y=\dfrac{1}{\cos x};\ y(0)=1;\ y'(0)=0$;

$k^2+1=0;\ k=\pm i;\ y_{00}=c_1\cos x+c_2\sin x;\ y_1=\cos x;\ y_2=\sin x$.

Составим систему (4):

$$\begin{cases} c_1'\cos x+c_2'\sin x=0 \\ c_1'(-\sin x)+c_2'x=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases};\ c_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}=-tgx;\ c_2'=\frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1}=1.$$

$c_1=-\int tgxdx=\ln|\cos x|+\bar{c}_1;\ c_2=\int dx=x+\bar{c}_2$;

$y=(\ln|\cos x|+\bar{c}_1)\cos x+(x+\bar{c}_2)\sin x$;

$y(0)=1;\ y'(0)=0\Rightarrow$

$1=(0+\bar{c}_1)\cdot 1+(0+\bar{c}_2)\cdot 0;\ \ 0=tg0\cdot\cos 0+(0+1)\cdot 0+0+(0+c_2)\cdot 1$;

$c_1=1;\ c_2=0\Rightarrow y=(\ln|\cos x|+1)\cos x+x\sin x$.

12.14. Неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью.

Пусть имеем уравнение: $y'' + py' + qy = f(x)$ где p и q – действительные числа. Пусть правая часть имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right]$ где α и β вещественные числа, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены одной или разных степеней. Если они разной степени, то пусть n – их наибольшая степень. Решение можно определить методом вариации произвольных постоянных, однако можно отыскать решение более простым методом неопределённых коэффициентов.

Рассмотрим два случая:

1. число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного д.у. В этом случае частное решение ищем в виде: (1) $y = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right]$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени $P(x)$ и $Q(x)$. Необходимо определить коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$.

2. Если число $\alpha + \beta i$ является корнем кратности $k(k \geq 1)$ характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

(2) $\bar{y} = x^k \cdot e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right]$. Ищем коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$.

В обоих случаях определяем коэффициенты многочленов так: в данное уравнение подставляем $\bar{y}$ и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получаем систему уравнений, из которых определяем коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$.

Пример 1:

$$y'' - 8y' + 7x = x^2 + 7x + 8;\ k^2 - 8k + 7 = 0;\ k_1 = 1,\ k_2 = 7;\ y_{00} = c_1 \cdot e^x + c_2 e^{7x}.$$

В правой части отсутствует множитель $e^{\alpha x}$, следовательно, $\alpha = 0$ и правая часть не содержит $\sin x$ и $\cos x$, это значит, что $\beta = 0 \cdot (\sin 0 \cdot x = 0, \cos\cdot 0 \cdot x = 1)$. Число $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде (1), где $\alpha = 0, \beta = 0$, степень многочлена $q(x)$ – вторая (x^2).

$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$. Найти *A,B,C*. $\tilde{y}' = 2Ax + B,\ \tilde{y}'' = 2A$ Подставим в уравнение:

$$2A-8(2Ax+B)+7(Ax^2+Bx+C)=x^2+7x+8;$$
$$7Ax^2+x(7B-16A)+2A-8B+7C=x^2+7x+8.$$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} 7A=3 \\ 7B-16A=7 \\ 2A-8B+7C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{3}{7} \\ B=(7+\dfrac{16}{7}=9\dfrac{2}{7})\dfrac{1}{7}=\dfrac{65}{49} \\ C=\dfrac{1}{7}(8+8\cdot\dfrac{65}{49}-2\dfrac{1}{7})=\dfrac{898}{343} \end{cases}$$

$$y=y_{00}+y=c_1e^x+c_2e^{7x}+\frac{1}{7}x^2+\frac{65}{49}x+\frac{898}{343}.$$

Пример 2: $y''+2y'-3y=4e^{-x}$; $k^2+2k-3=0$; $k_1=1$; $k_2=-3$;

$y_{00}=c_1e^x+c_2e^{-3x}$. $\alpha=-1,\beta=0$,

$-1+0i$ не корень, характеристическое уравнение, поэтому $\tilde{y}=Ae^{-x}$, $\tilde{y}'=-Ae^{-x}$, $\tilde{y}''=Ae^{-x}$.

$Ae^{-x}+2(-Ae^{-x})-3Ae^{-x}=4e^{-x}$; $A-5A=4$; $a=A=-1$.

$y=y_{00}+\tilde{y}=c_1e^x+c_2e^{-3x}-e^{-x}$.

Пример 3: $y''+y=5\sin 2x$; $y''+y=0$; $k^2+1=0$; $k=\pm i$, - не корень.

$y_{00}=c_1\cos x+c_2\sin x$; $\alpha=0$; $\beta=1$; $0+i$

$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$; $\tilde{y}'=-2A\cos 2x+2B\sin 2x$; $\tilde{y}''=4A\cos 2x-4B\sin 2x$;

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=5\sin 2x$,

$\cos 2x(-4A+A)+\sin 2x(-4B+B)=5\sin 2x$; $-3A=0$; $-3B=5$; $B=-\dfrac{5}{3}$;

$$y=y_{00}+\tilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{5}{3}\sin 2x.$$

Пример 4:

$y''-6y'+8y=3e^{2x}$;

$k^2-6k+8=0$; $k_1=2$; $k_2=4$; $y_{00}=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}$; $\alpha=2,\beta=0,\alpha=2$ - решение характеристического уравнения.

$\tilde{y}=xAe^{2x}\cdot\tilde{y}'=Ae^{2x}+2Ae^{2x}$; $y''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}$;

$2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}-6(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+8xAe^{2x}=3e^{2x}$.

$2A+2A+4Ax-6A-12Ax'+8Ax=3$; $A=-\dfrac{3}{2}$; $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}-\dfrac{3}{2}xe^{2x}$.

12.15. Системы дифференциальных уравнений.

При решении многих задач требуется найти функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциального уравнения , содержащих аргумент *x*, искомые функции y_i и их производные.

Рассмотрим систему дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

y_i – искомая функция, *x* – аргумент.

Система называется нормальной, если в левой части стоят производные, а правые части их не содержат.

Проинтегрировать систему – найти функции y_i, удовлетворяющие системе уравнений (1) и начальным условиям $y_1(x_0) = y_{1(0)}, y_2(x_0) = y_{2(0)}, ..., y_n(x_0) = y_{n(0)}$. (2)

Дифференцируем по *x* первое уравнение системы:

$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{df_1}{dy_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}$. Заменив выражение $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ..., \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, ..., f_n$ из уравнений (1), получим $\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x_1, y_1, y_2, ..., y_n)$. Далее снова дифференцируем по *x* полученное уравнение:

$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x_1, y_1, y_2, ..., y_n)$, продолжая далее, получим уравнение:

$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x_1, y_1, y_2, ..., y_n)$.

Итак, получена система:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x_1, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x_1, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x_1, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Из первых $n-1$ уравнений определяем $y_2, y_3, ..., y_n$, выразив их через x, y и производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y, y_1, y_1'', ..., y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y, y_1, y_1'', ..., y_1^{(n-1)}) \\ y_n = \varphi_n(x, y, y_1, y_1'', ..., y_1^{(n-1)}) \end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя эти выражения в последние из уравнений (3), получим уравнение *n*-го порядка для определения y_i:

(4а) $\dfrac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}$ Решая его, определим y_i: $y_1 = \Psi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n)$. Дифференцируя $(n-1)$ раз, найдём производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \dfrac{d^{(n-1)} y_1}{dx^{n-1}}$ как функции x, $c_1, c_2, ..., c_n$. Подставляя эти функции в (4) определим $y_2, y_3, ..., y_n$.

$$\begin{cases} y_1 = \Psi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ y_2 = \Psi_2(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ y_n = \Psi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n) \end{cases} \qquad (5)$$

Далее обычным образом определяем $c_1, ..., c_n$ с помощью начальных условий.

Замечание 1. Если система (1) линейна относительно искомых функций, то уравнение (4а) будет линейным.

Пример:

Проинтегрировать систему $\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = y + z + x \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 0$.

Дифференцируем

$1^{-е}$ уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1,\ \frac{d^2y}{dx^2}=y+z+x-4y-3z+2x+1$.

или $\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1$. Из $1^{го}$ уравнения системы выразим z: $z=\frac{dy}{dx}-y-x$ и подставляем в полученное уравнение:

$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\frac{dy}{dx}+2y+2x+3x+1,\ y''+2y'+y=5x+1$

$k^2+2k+1=0,\ k_1=k_2=-1,\ y_{00}=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$.

$\tilde{y}=Ax+B;\tilde{y}'=A_1\tilde{y}''=0;2A+Ax+B=5x+1;\ A=5;B=-9$, тогда

$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+5x-9$.

Ищем $\frac{dy}{dx}:\frac{dy}{dx}=-c_1e^{-x}+c_2e^{-x}-c_2xe^{-x}+5$, тогда

$z=-c_1e^{-x}+c_2e^{-x}-c_2xe^{-x}+5-c_1e^{-x}-c_2xe^{-x}-5x+9-x=$

$=e^{-x}(c_2-2c_1-2c_2x)-6x+14=z$.

Найдём c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$\begin{cases}1=c_1-9\\0=c_2-2c_1+14\end{cases}\begin{cases}c_1=10\\c_2=6\end{cases}$ Решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$y=10e^{-x}+6xe^{-x}+5x-9,\ z=(-14-12x)e^{-x}-6x+14$.

Замечание 2. Мы предполагали, что из первых $(n-1)$ уравнений системы (3) можно определить функции $y_2,y_3,...,y_n$. Может случиться, что переменные $y_2,y_3,...,y_n$, исключаются не из *n*, а из меньшего числа уравнений. Тогда для определения *y* мы получаем уравнение, порядок которого ниже n.

Библиографический список

Основной

1.Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. -236 с.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.- С.-Пб.: Профессия, 2003.-224 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2- М.: Интеграл-Пресс, 2000, 2001. (любого другого года издания)

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича.- М. : Астрель, 2001,2004.

5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.:Физматлит, 2003.-720 с.

6. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высш. школа,1994.- 231 с.

Дополнительный

7.Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988. – 224с.

8.Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

9.Шипачев И.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – 480 с.

Содержание