Министерство образования и науки Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
Им В.Г.Шухова

Прикладная математика.
Численные методы

Методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов направлений бакалавриата 151900 “ Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств “ и 150700 “Машиностроение”

Белгород
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
Им В.Г.Шухова

Кафедра высшей математики

Утверждено
Научно-методическим советом
университета

Прикладная математика.
Численные методы

Методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов направлений бакалавриата 151900 “ Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств “ и 150700 “Машиностроение”

Белгород
2015

УДК 519.6(07)
ББК 22.1я7
П 75

Составители: доц. Д.Э.Зубков
ст.преп. В.И.Дюкарева
ст.преп. С.В.Рябцева

Рецензент докт. техн. наук, проф. К.И.Логачев

П75 **Прикладная математика.Численные методы:** методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов направлений бакалавриата 151900 “ Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств “ и 150700 “Машиностроение”/сост.: : доц. Д.Э.Зубков, ст.преп. В.И.Дюкарева, ст.преп. С.В.Рябцева .- Белгород: Изд-во БГТУ,2015.- 68 с.

Методические указания разработанные на основе программы учебной дисциплины “Прикладная математика” содержит краткие теоретические сведения, примеры выполнения заданий, а также задания для самостоятельной работы по основным разделам “Численных методов”.

Методические указания предназначены для студентов направлений бакалавриата 151900 “ Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств “ и 150700 “Машиностроение”.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.6(07)
ББК 22.1я7
П 75

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. ИСТОЧНИКИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Числа, с которыми приходится иметь дело в практической деятельности, чаще всего получают в результате измерений некоторых величин. Известно, что любое измерение можно произвести с ограниченной точностью. Поэтому числа, выражающие результаты измерений, являются приближенными.

Выполняя действия над приближенными числами, в итоге также получают приближенные числа.

В ходе вычислений часто округляют исходные данные и конечные результаты, т.е. заменяют некоторые числа их приближенными значениями.

Сами формулы, по которым ведется расчет, могут быть точными и приближенными. Например, формула $s = \frac{ah}{2}$ – для вычисления площади треугольника – точная; формула Симпсона – для вычисления определенного интеграла – точная, если подынтегральная функция есть многочлен третьей или более низкой степени; в остальных случаях эта формула – приближенная.

Подчеркнем, что если вычисления произведены по приближенной формуле, то общая погрешность расчета складывается из погрешности вычислений (т.е. погрешности, полученной в результате действий над приближенными числами и округлений) и погрешности самой формулы.

Итак, приближенные числа возникают в результате измерений, округлений точных и приближенных чисел, действий над приближенными числами и при использовании приближенных формул.

1.2. ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Для оперирования с приближенными числами необходимо уметь решать следующие задачи:

1) оценивать точность приближенных чисел;

2) оценивать точность результата действий по известной точности исходных данных;

3) оценивать, с какой точностью надо взять исходные данные, чтобы получить результат заданной точности.

Умение решать эти задачи позволяет производить вычисления наиболее экономно и надежно.

1. 3. АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЧИСЛА

Пусть a – приближенное значение точного A. *Погрешностью приближенного числа a* называют разность $A - a$. Обычно точное число неизвестно и, следовательно, неизвестна погрешность приближенного числа. В этом случае для оценки близости приближенного числа к точному находят такое положительное число Δ_a, для которого выполняется неравенство

$$|A - a| < \Delta_a. \tag{1.1}$$

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называют такое число Δ_a, для которого справедливо неравенство (1.1). Очевидно, абсолютная погрешность приближенного числа определена неоднозначно. Например, если известно, что $|A - a| < 0{,}01$, то тем более $|A - a| < 1$. Ясно, что из двух оценок $\Delta_a = 0{,}01$ и $\Delta_a = 1$, первая дает лучшее представление о близости приближенного числа к точному. По этой причине всегда следует принимать в качестве Δ_a возможно меньшее число.

Неравенство (1.1) равносильно двойному неравенству:

$$a - \Delta_a < A < a + \Delta_a. \tag{1.2}$$

В вычислительной практике принято (для удобства записи) двойное неравенство (1.2) записывать в виде следующего равенства:

$$A = a \pm \Delta_a.$$

Число $a + \Delta_a$ дает приближение A по избытку, а число $a - \Delta_a$ – по недостатку.

1.4. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЧИСЛА

Абсолютная погрешность недостаточна для оценки точности измерения или вычисления. Например, если два стержня различной длины измерены с одинаковой абсолютной погрешностью, то тот из стержней измерен точнее, длина которого больше. Для характеристики точности измерения или вычисления вводят понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ_a *приближенного числа* a называют отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине этого числа:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \tag{1.3}$$

Обычно относительную погрешность выражают в процентах. Например, если $a = 0{,}32$ и $\Delta_a = 0{,}01$, то

$$\delta_a = \frac{0{,}01 \cdot 100}{0{,}32} = 3{,}125\ \%.$$

Пользуясь формулой (3), легко найти абсолютную погрешность приближенного числа, зная его относительную погрешность:

$$\Delta_a = \delta_a\, |a|. \tag{1.4}$$

Таким образом, *абсолютная погрешность приближенного числа равна произведению относительной погрешности этого числа на его абсолютную величину.*

1. 5. АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f\,(x)$. Пусть x – приближенное значение аргумента, Δx – его погрешность, тогда $x + \Delta x$ – точное значение аргумента.

Значение функции, соответствующее приближенному значению аргумента, будем называть приближенным; значение функции, соответствующее точному значению аргумента, будем называть точным.

Погрешностью функции назовем разность между ее точным и приближенным значениями, т.е. $f\,(x + \Delta x) - f\,(x)$.

Абсолютной погрешностью функции $f\,(x)$ назовем такое положительное число Δ_y, для которого справедливо неравенство

$$|f\,(x + \Delta x) - f\,(x)| < \Delta_y. \tag{1.5}$$

Теорема. *Абсолютная погрешность функции* $f\,(x)$ *равна произведению абсолютной величины ее производной на абсолютную погрешность аргумента*:

$$\Delta_y = |\,f'\,(x)|\,\Delta_x.$$

Доказательство. Пусть погрешность Δx аргумента x достаточно мала. Тогда приращение функции приближенно равно дифференциалу функции:

$$f\,(x + \Delta x) - f\,(x) \cong f'\,(x)\,\Delta x.$$

Перейдя к абсолютным величинам, получим

$$|f\,(x + \Delta x) - f\,(x)| \cong |\,f'\,(x)|\,|\Delta x|. \tag{1.6}$$

Обозначив абсолютную погрешность аргумента x через Δ_x, будем иметь

$$|(x + \Delta x) - x| < \Delta_x,$$

или

$$|\Delta x| < \Delta_x.$$

Теперь соотношение (6) можно записать так:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < |f'(x)|\,\Delta_x.$$

Отсюда и из соотношения (1.5) следует, что произведение $|f'(x)|\,\Delta_x$ можно принять в качестве абсолютной погрешности функции $f(x)$, т.е.

$$\Delta_y = |f'(x)|\,\Delta_x,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти абсолютную погрешность степенной функции $y = x^n$.

Решение. Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta_y = |(x^n)'|\,\Delta_x = n\,|x^{n-1}|\,\Delta_x.$$

1.6. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Относительной погрешностью функции $y = f(x)$ назовем отношение абсолютной погрешности функции к абсолютной величине приближенного значения функции:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\Delta_y}{|f(x)|}.$$

Теорема. *Относительная погрешность функции* $y = f(x)$ *равна произведению абсолютной величины логарифмической производной на абсолютную погрешность аргумента*:

$$\delta_y = \left|\frac{f'(x)}{f\ (x)}\right| \Delta_x.$$

Доказательство. По определению относительной погрешности функции

$$\delta_y \frac{\Delta_y}{|f(x)|}.$$

Подставив сюда $\Delta_y = |f'(x)|\ \Delta_x$, получим

$$\delta_y = \frac{|f'(x)\Delta_x|}{|f(x)|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \Delta_x. \tag{1.7}$$

Напомним, что отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называют логарифмической производной функции $f\,(x)$.

Пример. Найти относительную погрешность показательной функции $y = a^x$ $(a > 0)$.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\delta_y = \left|\frac{f'(x)}{f\ (x)}\right| \Delta_x,$$

получим

$$\delta_{a^x} = \left|\frac{a^x \ln a}{a^x}\right| \Delta_x = |\ln a| \Delta_x.$$

Таким образом, относительная погрешность показательной функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента.

Замечание. Легко получить формулу, связывающую относительные погрешности функции и аргумента. Действительно, по определению относительная погрешность аргумента равна:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|}.$$

Отсюда

$$\Delta x = [x]\,\delta_x. \tag{1.8}$$

Подставив (1.8) в (1.7), получим

$$\delta_y = \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta_x. \tag{1.9}$$

Пример. Найти относительную погрешность степенной функции $y=x^n$.

Решение. Воспользуемся формулой (9):

$$\delta_y = \left| x \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \delta_x = |n|\delta_x.$$

Таким образом, относительная погрешность степенной функции пропорциональна погрешности аргумента.

В частности, если $y = x^2$, то $\delta_{x^2} = 2\delta_x$.

Если $y = \sqrt{x}$, то $\delta_{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\,\delta_x$.

1.7. АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = f\,(x, y)$ двух независимых переменных.

Пусть x и y – приближенные значения независимых переменных и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ – точные их значения.

Погрешностью функции $f\,(x, y)$ назовем разность между ее точным и приближенными значениями, т.е. $f\,(x + \Delta x, y + \Delta y) - f\,(x, y) = \Delta z$.

Абсолютной погрешностью функции $f\,(x, y)$ назовем такое положительное число Δ_z, для которого справедливо неравенство:

$$|\Delta z| < \Delta_z. \tag{1.10}$$

Теорема. *Абсолютная погрешность функции* $f\ (x,\ y)$ *равна сумме произведений абсолютных величин частных производных на соответствующие абсолютные погрешности независимых переменных*:

$$\Delta_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_y.$$

Доказательство. Пусть Δx и Δy достаточно малы. Тогда полное приращение функции приближенно равно полному дифференциалу:

$$\Delta z \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Перейдя к абсолютным величинам, получим:

$$|\Delta z| \cong \left|\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y|.$$

Так как x и y – независимые переменные и следовательно,

$$|\Delta x| < \Delta_x,\ |\Delta y| < \Delta_y,$$

то

. $$|z| < \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_y \qquad (1.11)$$

Отсюда и из соотношения (1.10) следует, что правую часть (11) можно принять в качестве абсолютной погрешности функции $f\,(x,\,y)$, т.е.

$$\Delta_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_y. \qquad (1.12)$$

Замечание. Полученная оценка абсолютной погрешности функции двух независимых переменных может быть обобщена на дифференцируемую функцию большего числа независимых переменных.

Пример 1. Найти абсолютную погрешность функции $z = x + y$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Подставив найденные значения частных производных в (1.12), получим

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y.$$

Итак, получена теорема: абсолютная погрешность суммы двух приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Пример 2. Найти абсолютную погрешность функции $z = xy$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y; \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Подставив найденные значения частных производных в соотношение (1.12), получим

$$\Delta_z = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y.$$

Итак, абсолютная погрешность произведения двух приближенных чисел равна сумме произведений модуля каждого из чисел на абсолютную погрешность другого числа.

1.8. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Относительной погрешностью дифференцируемой функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ *назовем отношение ее абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного значения функции*:

$$\delta_x = \frac{\Delta_z}{|z|}. \tag{1.13}$$

Теорема. *Относительная погрешность функции* $z = f(x, y)$ *равна сумме произведения абсолютных величин частных логарифмических производных на соответствующие абсолютные погрешности независимых переменных*:

$$\delta_z = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f(x,y)}\right|\Delta_x + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f(x,y)}\right|\Delta_y.$$

Доказательство. По определению относительной погрешности

$$\delta_x = \frac{\Delta_z}{|f(x,y)|}.$$

Подставив сюда правую часть соотношения (11), получим

$$\delta_z = \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta_y}{|f(x,y)|},$$

или окончательно

$$\delta_z = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f(x,y)}\right|\Delta_x + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f(x,y)}\right|\Delta_y.$$

Замечание. Полученная оценка относительной погрешности функции двух независимых переменных может быть обобщена на дифференцируемую функцию большего числа независимых переменных.

Пример 1. Найти относительную погрешность функции $z = xy$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y; \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Искомая относительная погрешность равна:

$$\delta_z = \left|\frac{y}{xy}\right| \Delta_x + \left|\frac{x}{xy}\right| \Delta_y,$$

или

$$\delta_z = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|}.$$

Отсюда $\delta_z = \delta_x + \delta_y$.

Получена теорема: относительная погрешность произведения двух приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Пример 2. Найти относительную погрешность функции $z = \frac{x}{y}$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Искомая относительная погрешность равна:

$$\delta_z = \left|\frac{1}{y} : \frac{x}{y}\right| \Delta_x + \left|-\frac{x}{y^2} : \frac{x}{y}\right| \Delta_y,$$

или

$$\delta_z = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

Получена теорема: относительная погрешность частного двух приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

Задачи

1. Найти абсолютную и относительную погрешности приближенных чисел, верных в написанных цифрах:
а) 114,1; б) 0,025; в) 4,6.

Ответ: а) $\Delta_a = 0,05$; $\delta_a = 0,044$ %;
б) $\Delta_a = 0,0005$; $\delta_a = 2$ %;
в) $\Delta_a = 0,05$; $\delta_a = 1,09$ %.

2. Найти сумму приближенных чисел:
а) 1,6 + 12,3 + 14,27 + 0,143 + 4,268;
б) 0,345 + 2,84 + 5,113 + 7,819 + 12,3.

Ответ: а) 32,6; б) 28,4.

3. Найти произведение приближенных чисел (без учета погрешностей), верных в написанных цифрах:
а) 26,1 · 3,813; б) 0,03 · 14,6.

Ответ: а) 99,5; б) 0,4.

4. Найти произведение приближенных чисел (с учетом погрешностей), верных в написанных цифрах:
а) 1,743 · 25,1; б) 73,56 · 12,2.

Ответ: а) 43,0 ± 0,9; б) 897 ± 4.

5. Найти частное приближенных чисел (без учета погрешностей), верных в написанных цифрах:
а) 26,18472 : 43,12; б) 1,413 : 2,3.

Ответ: а) 0,6073; б) 0,61.

6. Найти частное приближенных чисел (с учетом погрешностей), верных в написанных цифрах:
а) 5,684 : 5,032; б) 6,341 : 6,127.

Ответ: а) 1,1296 ± 0,0002; б) 1,0349 ± 0,0002.

7. Пользуясь правилами верных цифр, найти с тремя верными цифрами:

а) сумму $e + 5 + 7$;

б) произведение $\pi \cdot 3$;

в) частное $\frac{\cos 0{,}4}{\sin 0{,}3}$.

Ответ: а) 7,60; б) 5,44; в) 3,12.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, далеко не всякое уравнение может быть решено точно. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений, т.е. уравнений, в которых неизвестное x находится под знаком трансцендентной функции. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решать произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой.

Однако точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задачу отыскания корней уравнения можно считать практически решенной, если мы сумеем определить корни с нужной степенью точности.

Пусть дано уравнение $f(z) = 0$, где $f(z)$ – заданная функция действительного или комплексного аргумента z; в частности, $f(z)$ может быть многочленом степени n от z.

При отыскании приближенных значений корней этого уравнения приходится решать две задачи:

1) отделение корней, т.е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключен один и только один корень уравнения;

2) вычисление корней с заданной точностью.

Так как для алгебраических уравнений разработано больше методов отделения корней и методов их вычисления, то мы в дальнейшем будем более подробно останавливаться на алгебраических уравнениях.

2.1. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Пусть требуется выделить интервалы, в которых находятся действительные корни уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция в некотором конечном или бесконечном интервале.

Для отделения корней можно использовать следующую теорему.

Теорема. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. Корень этот заведомо будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянным знак внутри интервала (α, β), т.е. если $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при $\alpha < x < \beta$.

Процесс отделения корней происходит так: определяем знаки функции $f(x)$ в ряде промежуточных (из области определения) точек $x = x_1, x_2, \ldots$, выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$, то в силу теоремы в интервале (x_k, x_{k+1}) имеется корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным способом убедиться, является ли этот корень единственным.

Пример 1. $3x^3 + 2x - 2 = 0$.

x	$f(x)$
– 2	–
– 1	–
0	–
1	+

$f(x) = 3x^3 + 2x - 2$

$0 < \xi < 1$

$f'(x) = 9x^2 + 2 > 0$

при всех x действительный корень единственный.

Пример 2. $x^3 - 2{,}9x^2 - 1{,}1x + 3{,}1 = 0$.

x	– 2	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	–	+	+	+	–	+

$-2 < \xi_1 < -1$

$1 < \xi_2 < 2$

$2 < \xi_3 < 3$

Для отделения корней можно использовать графические методы. Действительные корни уравнения $f(x) = 0$ представляют собой абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox. Строим график функции $y = f(x)$ и определяем интервал, в который попадает точка пересечения графика с осью Ox. Иногда удобнее представить сначала уравнение в виде $\varphi\ (x) = \psi\ (x)$ и затем, построив графики функций $y = \varphi\ (x)$ и $y = \psi\ (x)$, найти приближенно абсциссы их точек пересечения или указать интервалы, в которые попадают эти точки.

Пример. $3^x + x - 2 = 0$.

$3^x = 2 - x$;

$y = 3^x$;

$y = 2 - x$.

$0 < \xi < 1$ – единственный действительный корень (рис.2.1).

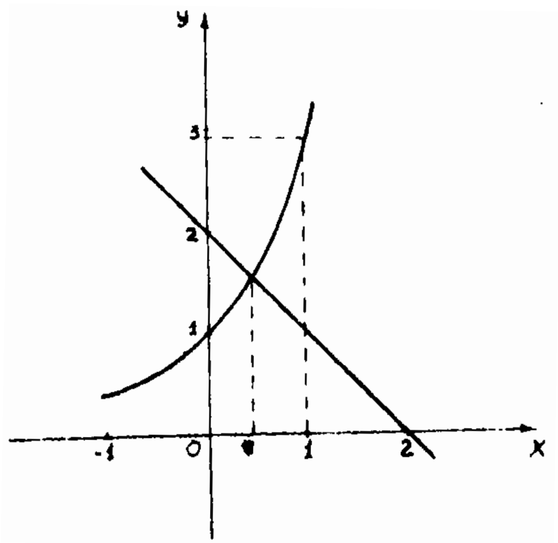

Рис. 2.1

Для отыскания приближенных значений комплексных корней уравнения $f\ (z) = 0$ или их отделения можно, положив $z = x + iy$, представить уравнение в виде $\varphi\ (x, y) + i\psi\ (x, y) = 0$, где $\varphi\ (x, y)$ и $\psi\ (x, y)$ – действительные функции действительных переменных x и y. Это уравнение эквивалентно системе двух уравнений $\begin{cases} \varphi\ (x, y) \\ \psi\ (x, y) \end{cases}$.

Построив кривые $\varphi\ (x, y) = 0$ и $\psi\ (x, y) = 0$, получим действительные и мнимые части корней уравнения $f\ (z) = 0$ как соответственно абсциссы и ординаты их точек пересечения.

Имеется много специально разработанных способов графического решения уравнений, приспособленных для отдельных типов уравнений.

2.2. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция на конечном или бесконечном интервале. И пусть найден интервал $[a, b]$, такой, что $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Предположим, на этом интервале корень уравнения единственный. Обозначим его ξ.

Для нахождения корня делим отрезок $[a, b]$ пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ и задача решена. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то выбираем ту из половин отрезка $[a, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и проводим то же рассмотрение и т.д. В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения, или же бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, … , $[a_n, b_n]$, таких, что

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$
$$b_n - a_n = \frac{1}{2} n\,(b - a). \qquad (2..1)$$

Так как левые концы $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образуют монотонную неубывающую ограниченную последовательность, а правые концы $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – монотонно невозрастающую ограниченную последовательность, то обе последовательности имеют пределы, причем эти пределы в силу (2.1) равны:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi_1.$$

Переходим к пределу в неравенстве $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, f^2(\xi_1) \leq 0$.

Отсюда $f(\xi_1) = 0$, т.е. $\xi_1 = \xi$ – корень уравнения. Если необходимо вычислить корень уравнения с точностью Ɛ, производим деление интервала $[a, b]$ до тех пор, пока $b_n - a_n < 2\varepsilon$. За приближенное значение корня берем среднюю точку интервала $\xi = \frac{a_n+b_n}{2}$. При этом:

$$\left|\xi - \frac{a_n+b_n}{2}\right| < \varepsilon; \left|\xi - \frac{a_n+b_n}{2}\right| < \frac{b-a}{2^{n+1}}. \qquad (2.2)$$

Метод половинного деления практически неудобен для вычисления корня с большой точностью ручным способом, так как требует большого объема вычислительной работы. Но он легко реализуется на ЭВМ.

Пример. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}005$ корень уравнения $x^3 + 1{,}76439x^2 + 2{,}21584x - 3{,}31344 = 0$, который находится на интервале [0; 1]:

$[a_0, b_0]$ = [0; 1]

x	***f*** **(*x*)**
0,500	– 1,639
0,750	– 0,237
0,875	0,646
0,812	0,184
0,781	– 0,030
0,797	0,076
0,789	0,023

$[a_1, b_1]$ = [0,5; 1]

$[a_2, b_2]$ = [0,75; 1] $\quad b_2 - a_2 = 0{,}25$

$[a_3, b_3]$ = [0,750; 0,875] $\quad b_3 - a_3 = 0{,}125$

$[a_4, b_4]$ = [0,750; 0,812] $\quad b_4 - a_4 = 0{,}062$

$[a_5, b_5]$ = [0,781; 0,812] $\quad b_5 - a_5 = 0{,}031$

$[a_6, b_6]$ = [0,781; 0,797] $\quad b_6 - a_6 = 0{,}016$

$[a_7, b_7]$ = [0,781; 0,789] $\quad b_7 - a_7 = 0{,}008$

$$b_7 - a_7 < 2\varepsilon$$

$$\xi \approx \frac{0{,}781+0{,}789}{2} = 0{,}785; \quad /\xi - 0{,}785/ < 0{,}004.$$

2.3. МЕТОД ХОРД

Решаем уравнение $f(x) = 0$.

Пусть найден отрезок $[a_0, b_0]$ такой, что на концах его функция $f(x)$ имеет разные знаки, т.е. $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ и $f'(x)$, $f''(x)$ на отрезке сохраняют знак. Положим для определенности $f(a_0) <0$, $f(b_0) >0$, $f'(x)>0$, $f''(x) > 0$ (при $a_0 \leq x \leq b_0$). За приближенное значение корня принимаем точку пересечения с осью Ox хорды, проходящей через точки $A[a_0, f(a_0)]$, $B[b_0, f(b_0)]$.

Составим уравнение хорды:

$$\frac{y-f(a_0)}{f(b_0)-f(a_0)} = \frac{x-a_0}{b_0-a_0}.$$

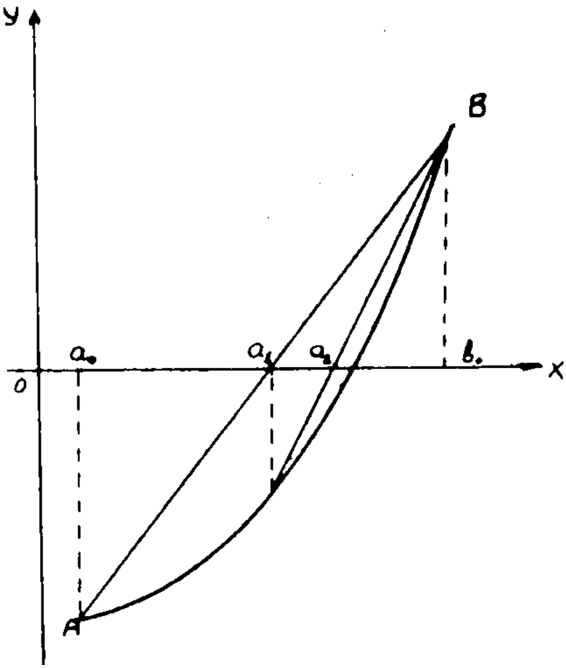

Рис. 2.2

Точку пересечения с осью Ox найдем, положив $y = 0$. Обозначим абсциссу точки пересечения хорды с осью Ox через a_1:

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot (b_0 - a_0).$$

Принимая a_1 за конец нового отрезка $[a_1, b_0]$, можно опять провести хорду и получить приближение a_2:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f(b_0) - f(a_1)} \cdot (b_0 - a_1)$$

и т.д.

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f(b_0) - f(a_k)} \cdot (b_0 - a_k), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2.3)$$

Метод хорд дает приближение с того конца интервала, где $f \cdot f'' < 0$.

Докажем сходимость этого процесса.

Доказательство проводим для случая $f(a_0)<0$; $f(b_0)>0$; $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ на $[a_0, b_0]$.

Последовательные приближения $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ образуют монотонно возрастающую ограниченную последовательность

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < \xi < b_0.$$

Монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

Пусть

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \xi_1.$$

Переходим к пределу в формуле (26):

$$\xi_1 = \xi_1 - \frac{f(\xi_1)}{f(b_0) - f(\xi_1)} \cdot (b_0 - \xi_1).$$

Отсюда $f(\xi_1) = 0$; $\xi_1 = \xi$, так как корень на интервале $[a_0, b_0]$ – единственный.

2.4. МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ)

Пусть найден отрезок $[a_0, b_0]$ такой, что $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ и $f'(x), f''(x)$ на этом отрезке сохраняют знак. Пусть для определенности $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ при $a_0 \le x \le b_0$.

В точке $B[b_0, f(b_0)]$ проведем касательную к кривой (рис. 2.3). Точку пересечения касательной с осью *Ox* принимаем за приближенное значение корня уравнения. Обозначим абсциссу точки пересечения с осью *Ox* через b_1. Имеем уравнение касательной:

$$y - f(b_0) = f'(b_0)(x - b_0),$$
$$y = 0$$
$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}.$$

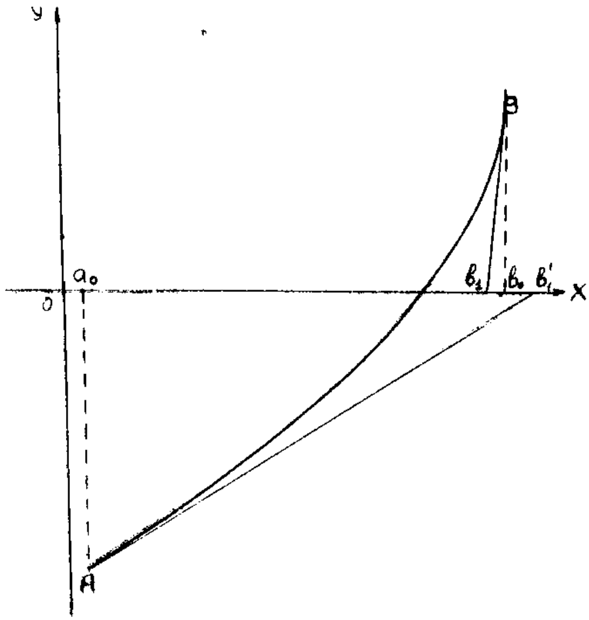

Рис. 2.3

Принимая b_1 за конец нового отрезка $[a_0, b_1]$, можно повторить предыдущий шаг и найти b_2:

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} \quad \text{и т.д.}$$

$$b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Заметим, что если применить метод касательных не к правому концу отрезка (где $f\,(b_0) \cdot f''\,(b_0) > 0$), а к левому (где $f\,(a_0) \cdot f''\,(a_0) < 0$), то, как видно на чертеже, получим точку b_1', лежащую вне отрезка $[a_0, b_0]$. Таким образом, касательную проводим на том конце отрезка, где совпадают знаки функции и ее второй производной.

2.5. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

Пусть $f\,(b_0) \cdot f\,(a_0) < 0$ и $f\,'\,(x)$, $f\,''(x)$ сохраняют знак на интервале $[a_0,b_0]$ (рис.2. 4).

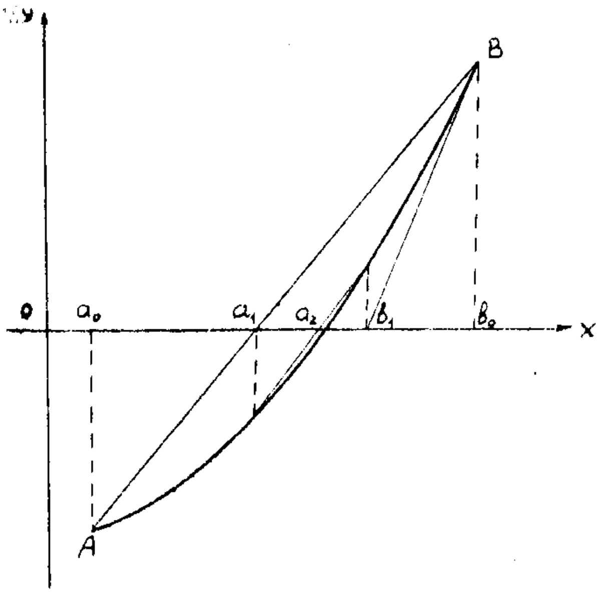

Рис.2.4

Сочетая метод хорд и касательных, получаем комбинированный метод, позволяющий на каждом этапе находить значения корня уравнения $f(x) = 0$ с недостатком и избытком. Отсюда, в частности, следует, что цифры, общие для a_k и b_k, принадлежат точному корню ξ.

Четыре возможных комбинации знаков производных $f'(x)$ и $f''(x)$ определяют четыре типа расположения кривой $y = f(x)$ (рис. 2.5).

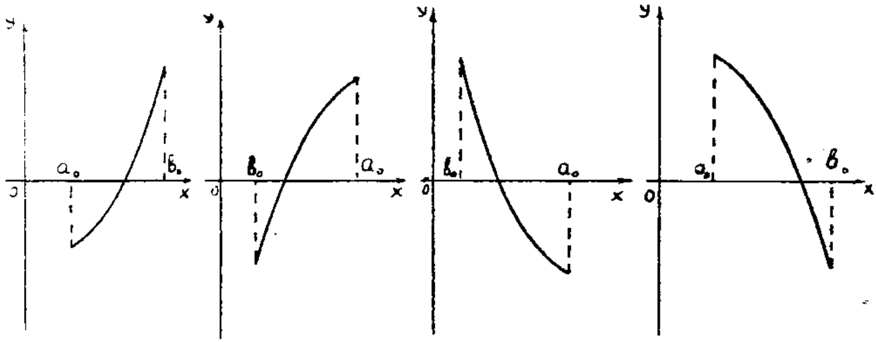

Рис.2. 5

Условимся через b_0 обозначать тот конец отрезка, на котором знак функции $f(x)$ и знак ее второй производной $f''(x)$ совпадают.

Расчетные формулы комбинированного метода имеют вид:

$$a_{k+1} = a_k - \Delta a_k; \quad \Delta a_k = \frac{f(a_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}; \tag{2.5}$$
$$b_{k+1} = b_k - \Delta b_k; \quad \Delta b_k = \frac{f(b_k)}{f'(b_k)},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Если абсолютная погрешность приближенного корня задана заранее и равна Ɛ, то процесс вычисления корня можно прекращать в тот момент, когда $|b_k - a_k| < 2\varepsilon_0$.

По окончании процесса за значение корня ξ взять среднее арифметическое последних полученных значений

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(a_k + b_k).$$

Все вычисления удобно представлять в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

$f(x) =$ $f'(x) =$ $f''(x) =$				$a_0 =$ $f(a_0) =$ $b_0 =$ $f(b_0) =$		$a_{k+1} = a_k - \Delta a_k$; $b_{k+1} = b_k - \Delta b_k$; $\Delta a_k = \frac{f(a_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$; $\Delta b_k = \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}$			
k	a_k	b_k	$b_k - a_k$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k) - f(a_k)$	$f'(b_k)$	Δa_k	Δb_k

Задачи

1. Найти методом хорд действительные корни уравнений:

а) $x^3 + 3x - 1 = 0$;

б) $x^3 + x + 1 = 0$.

Ответ: а) 0,322; б) -0,69 $\pm$ 0,01

2. Найти методом касательных действительные корни уравнений:

а) $x^3 - 2x + 2 = 0$;

б) $x^3 - x + 2 = 0$.

Ответ: а) -1,78 $\pm$ 0,02; б) -1,53 $\pm$ 0,01

3. Найти комбинированным методом хорд и касательных действительные корни уравнений:

а) $x^3 - x + 1 = 0$;

б) $x^3 + x - 1 = 0$.

Ответ: а) -1,36 $\pm$ 0,19; б) 0,58 $\pm$ 0,01

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

3.1. ТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Многочисленные методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на два вида:

1) точные методы;
2) итерационные методы.

Точный метод позволяет за конечное число шагов получить точное решение. В действительности часто вследствии округлений промежуточных вычислений в ходе решения системы, точные методы приводят к приближенному результату.

К числу точных методов относятся: метод Крамера, метод последовательного исключения неизвестных Гаусса и др.

Сущность итерационных методов состоит в последовательном уточнении некоторого первоначального решения. К числу итерационных методов относятся : метод простой итерации, метод Зейделя и др.

3.2. МЕТОД ГАУССА

Наиболее распространенным приемом решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных. Этот метод носит название метода Гаусса. Метод Гаусса принадлежит к группе точных методов. Для простоты рассуждений и для того, чтобы провести выкладки до конца, рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \qquad (3.1)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Разделим коэффициенты первого из уравнений (3.1) на коэффициент a_{11}, который мы будем называть «ведущим» элементом, и обозначим

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j > 1). \qquad (3.2)$$

Получим новое уравнение

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}. \qquad (3.3)$$

Пользуясь уравнением (3.3), легко исключить переменную x_1 из системы (3.1). Для этого достаточно последовательно умножить уравнение (3.3) на a_{21} и a_{31} и вычесть его из соответствующих уравнений системы (3.1). Коэффициенты новой системы, полученной в результате исключения одной переменной, обозначим a_{ij}:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \qquad (i, j \geq 2). \qquad (3.4)$$

Итак, пришли к системе:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = a'_{24} \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = a'_{34} \end{cases}. \qquad (3.5)$$

Делим одно уравнение системы (3.5) на «ведущий» элемент a'_{22}

$$x_2 + b'_{23}x_3 = b'_{24}, \qquad (3.6)$$

где

$$b'_{2j} = \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} \qquad (j > 2).$$

Умножая уравнение (3.6) на a'_{32} и вычитая его из второго уравнения системы (3.5), получим

$$a''_{33}x_3 = a''_{34}, \qquad (3.7)$$

где

$$a''_{3j} = a'_{3j} - a'_{32} \cdot b_{2j} \qquad (j \geq 3). \qquad (3.8)$$

Наконец, разделив уравнение (19) на a''_{33}, получим

$$x_3 = \frac{a''_{34}}{a''_{33}} = b''_{34}. \tag{3.9}$$

Объединив все уравнения с коэффициентами b (т.е. уравнения (3.3), (3.6), (3.9)), получим треугольную систему, эквивалентную данной; ее решение будет решением системы:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \\ x_2 + b'_{23}x_3 = b'_{24} \\ x_3 = b''_{34} \end{cases}. \tag{3.10}$$

Решение системы:

$$\begin{gathered} x_3 = b''_{34}; \\ x_2 = b'_{24} - b'_{23}x_3; \\ x_1 = b_{14} - b_{13}x_3 - b_{12}x_2. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Итак, для решения данной системы сначала строим вспомогательную треугольную систему, а затем решаем ее. Процесс нахождения коэффициентов треугольной системы будем называть *прямым ходом*, а процесс получения ее решения – *обратным ходом*. Приведенная схема носит название *схемы единственного деления.* Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех «ведущих» элементов.

Целесообразно применять при вычислении по схеме единственного деления контроль, который основан на следующем. Если в данной системе сделать замену $\overline{x_1} = x_1 + 1$, $\overline{x_2} = x_2 + 1$, $\overline{x_3} = x_3 + 1$, то для определения $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$ мы получим систему с прежними коэффициентами и свободными членами, равными суммам коэффициентов строк (включая и свободные члены). Проверим это на одном из уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14},$$

$$\overline{x_1} = x_1 - 1; \overline{x_2} = x_2 - 1; \overline{x_3} = x_3 - 1.$$

Подставляя x_1, x_2, x_3 в уравнение, получим

$$a_{11}\overline{x_1} + a_{12}\overline{x_2} + a_{13}\overline{x_3} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}.$$

Образовав суммы коэффициентов каждой строки (контрольные суммы), будем производить над ними все те операции, что и над остальными элементами строк. При отсутствии ошибок в вычислениях элементы столбца контрольных сумм равны суммам элементов соответствующих преобразованных строк. Это обстоятельство служит контролем прямого хода. Обратный ход контролируется нахождением $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$ и их совпадением с числами $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$.

Все вычисления удобно оформлять в виде табл. 3.1

Таблица 3.1

x_1	x_2	x_3	Свободные члены	$\sum$
a_{11} a_{21} a_{31} 1	a_{12} a_{22} a_{32} b_{12}	a_{13} a_{23} a_{33} b_{13}	a_{14} a_{24} a_{34} b_{14}	a_{15} a_{25} a_{35} b_{15}
	a'_{22} a'_{32} 1	a'_{23} a'_{33} b'_{23}	a'_{24} a'_{34} b'_{24}	a'_{25} a'_{35} b'_{25}
		a''_{33} 1	a''_{34} b''_{34} (x_3)	a''_{35} b''_{35} $(\overline{x_3})$
  1	 1	1	x_3 x_2 x_1	$\overline{x_3}$ $\overline{x_2}$ $\overline{x_1}$

В обратном ходе используются строки, содержащие единицы. Расставленные в конце схемы единицы помогают находить соответствующие данной переменной коэффициенты в нужных строках. Во избежание накопления погрешностей от округления весь расчет ведем с двумя запасными знаками, которые при записи решения системы отбрасываем.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}.$$

x_1	x_2	x_3	**Свободные члены**	$\sum$
2	1	– 2	– 3	– 2
3	2	1	7	13
4	4	– 3	– 5	0
1	0,5	– 1	– 1,5	– 1
	0,5	4	11,5	16
	2	1	1	4
	1	8	23	32
		– 15	– 45	– 60
		1	3	4
			(x_3)	$(\overline{x_3})$
		1	3	4
	1		– 1	0
1			2	3
Ответ: $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 3$				

Задачи

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8 \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$

Ответ: а) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$;
б) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Первоначальной задачей интерполяции было отыскание значений функции, соответствующих промежуточным значениям аргумента, отсутствующим в таблице.

Рассмотрим линейную интерполяцию.

Пусть значения некоторой функции $y = f(x)$ известны при значениях аргумента x_0 и $x_1 = x_0 + h$, т.е. $f(x_0) = y_0$ и $f(x_1) = f(x_0 + h) = y_1$, но не известны значения функции при промежуточных значениях аргумента x. Заменим на этом участке данную функцию функцией линейной $y = kx + b$, принимающей те же значения, что и данная, при $x = x_0$, $x = x_0 + h$. Тогда приближенное значение функции $y = f(x)$ во внутренней точке отрезка $[x_0, x_0 + h]$ определяется по формуле

$$y = y_0 + \frac{y_1 + y_0}{h}(x - x_0), \tag{4.1}$$

так как для функции $y = kx + b$ в данном случае

$$k = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad b = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} x_0.$$

Формула (4.1) есть формула линейной интерполяции.

Итак, линейная интерполяция заключается в приближенной замене рассматриваемой функции $y = f(x)$ линейной функцией $y = kx + b$, совпадающей с $f(x)$ в некоторых двух точках.

Пример. Найти значение функции $y = e^x$ при x = 0,833, если значения этой функции при $x_0 = 0{,}83$ равно $y_0 = 2{,}2933$ и при $x_1 = x_0 + h =$ = 0,84 – $y_1 = 2{,}3164$.

Применяя формулу (4.1), подставив в нее вместо h = $x_1 - x_0 = 0{,}84$ – – 0,83 = 0,01, вместо $x - x_0$ = 0,833 – 0,83 = 0,003, вместо y_1 – y_0 = =2,3164 – 2,2933 = 0,0231, будем иметь:

$$e^{0.833} \approx 2{,}2933 + \frac{0{,}0231}{0{,}01} \cdot 0{,}003 = 2{,}2933 + 0{,}0069 = 2{,}3002.$$

В целях облегчения интерполяции часто в таблицах печатаются разности между соседними значениями функции.

В настоящее время задача интерполяции понимается шире. Она в известном смысле обратна задаче табулирования функции. В задаче табулирования по известному аналитическому выражению функции составляется таблица значений функции, а в задаче интерполирования по таблице значений строится ее аналитическое выражение.

Если задана таблица значений функции $y = f(x)$

$\boldsymbol{x}$	x_0	x_1	…	x_n
$\boldsymbol{y}$	y_0	y_1	…	y_n

,

то геометрически задача сводится к построению кривой, проходящей через заданные точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, … , $A_n(x_n, y_n)$. А так как через n + 1 точку можно провести сколько угодно кривых, то задача не является определенной, следовательно, функций можно построить бесчисленное множество.

Задача приобретает определенный характер, если функцию, значения которой совпадают в заданных точках со значениями функции $y = f(x)$, искать в виде многочлена степени на единицу меньшей, чем число известных табличных значений.

Задача интерполяции

Найти многочлен $P(x) = P_n(x)$ степени не выше n, значения которого в точках x_i (i = 0, 1, … , n) совпадают с заданными значениями $y_i = f(x_i)$ функции $y = f(x)$, т.е.

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Геометрически нужно найти кривую вида $y = a_0x^n + \dots + a_n$, проходящую через заданную систему точек $A_i(x_i, y_i)$ (i = 0, 1, … , n) (рис.4.1).

В этой постановке задача интерполирования называется параболической. Многочлен $P_n(x)$ называется интерполяционным многочленом, а формулы для его построения – интерполяционными. Точки x_i (i=0,1,…,n) – узлы интерполяции.

Замена функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ производится и тогда, когда аналитическое выражение $f(x)$ довольно сложное, а $f(x)$ должна подвергаться различным операциям (например, интегрированию).

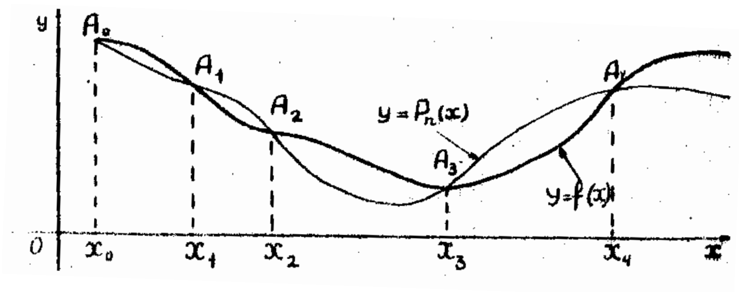

Рис. 4.1

Пусть имеем

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \tag{4.2}$$

причем

$$\begin{gathered} f(x_0) = P_n(x_0), \\ f(x_1) = P_n(x_1), \\ \dots \\ f(x_n) = P_n(x_n), \end{gathered} \tag{4.3}$$

где $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ – известные значения функции при заданных значениях аргумента.

Теорема. Многочлен (4.2), удовлетворяющий условиям (4.3), – единственный. Доказательство будем вести от противного.

Пусть существует два многочлена $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, удовлетворяющие условию (31), тогда их разность $P_n(x) - Q_n(x)$ есть также многочлен степени не выше n, равный нулю при $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. имеющий n+1 корень, а следовательно, тождественный нуль, так как многочлен n-ой степени имеет только n корней. Отсюда

$$P_n(x) = Q_n(x).$$

Теорема доказана.

Различают интерполирование в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$, и экстраполирование, когда x лежит вне отрезка $[x_0, x_n]$.

Итак, чтобы решить задачу интерполяции, нужно составить интерполяционный многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, а для его построения необходимо найти коэффициенты a_i (i = 0, 1, … , n). В общем случае эти коэффициенты могут быть найдены как решения системы n + 1 уравнения с n+1 неизвестным $a_0, a_1, \dots, a_n$, т.е. следующей системы:

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = y_1 \\ \ldots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_n = y_n \end{cases}. \qquad (4..4)$$

где $y_i = P_n(x_i)$ (i = 0, 1, … , n).

4.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

Можно составить интерполяционный многочлен несколько искусственно. Составим последовательно многочлены $Q(x)$, принимающие значения y_i при x_i (i = 0, 1, … , n), а при остальных значениях x из данных $x_0, x_1, \dots, x_n$ обращающиеся в нули, т.е. их можно записать в таком виде:

$$Q_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0,$$

$$Q_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1,$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \tag{4.5}$$

$$Q_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

Следовательно, за многочлен, удовлетворяющий задаче интерполирования, можно взять сумму многочленов $Q_i(x)$ (i = 0, 1, … , n), т.е.

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x)$$

или

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \\ + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Пример. Составить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей

x	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 4$	$x_3 = 5$
y	$y_0 = 2$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$

,

В данном примере узлов интерполяции четыре, следовательно, интерполяционным многочленом Лагранжа будет являться

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3$$

или, подставив табличные значения, будем иметь

$$P_3(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} \cdot 1 +$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} \cdot 3,$$

или

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x-4)(x-5) + \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-5) -$$
$$- \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-5) + \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-4).$$

4.3. ТАБЛИЦА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Пусть рассматриваемые значения аргумента функции $y = f(x)$ являются равностоящими, т.е. образуют арифметическую прогрессию:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh,$$

где $x_{i+1} - x_i = h = const$ (i = 0, 1, … , n) называется шагом таблицы (т.е. узлы интерполяции равноотстоящие).

Определение. Конечными разностями функции $y = f(x)$ называются разности вида: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – конечные разности первого порядка, …, $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – конечные разности k-го порядка, (i=0,1,…,n).

Конечные разности располагают в форме таблиц. Применяются две формы таких таблиц. Диагональная – таблица, в которой разности записываются в каждом столбце между строчек с соответствующими значениями уменьшаемого и вычитаемого (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	…
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2			
…	…			…	
		…	…		
x_{n-2}	y_{n-2}				
		Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_{n-3}$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$		
		Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

Так как разности невелики, то их записывают в единицах последнего знака, без нулей впереди.

Выразим конечные разности через значения функций.

Первые разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2 \quad \text{и т.д.}$$

Вторые разности:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1 \quad \text{и т.д.}$$

Третьи разности:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + $$
$$+ 3y_1 - y_0 \quad \text{и т.д.}$$

Таблица 4.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	…
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	…
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	…
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	…
…	…	…	…	…	…	…
x_{n-4}	y_{n-4}	Δy_{n-4}	$\Delta^2 y_{n-4}$	$\Delta^3 y_{n-4}$	$\Delta^4 y_{n-4}$	
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$		
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$			
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}				
x_n	y_n	Δy_n				

Заметив, что коэффициенты в указанных выражениях являются коэффициентами бинома $(y-1)^n$, если показатели степени y считать его индексами, т.е. вместо y^k писать y_k и вместо $1 = y^0$ писать y_0, можно записать формулу для разности любого порядка:

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \ldots + (-1)^k y_0,$$

…

$$\Delta^k y_m = y_{k+m} - k \cdot y_{m+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{m+k-2} + \ldots + (-1)^k y_{\mathrm{m}}.$$

Иногда удобно выражать значения функции через конечные разности.

Так как $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, то $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Из $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ следует $\Delta y_1 = \Delta y_0 - \Delta^2 y_0$, тогда $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 =$ $= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$ и т.д.

Или чисто символически $y_k = (1+\Delta)^k y_0$. В данном случае $(1+\Delta)^k$ раскрывается как бином Ньютона, а произведения $\Delta^k \cdot y_0$ рассматриваются как разности соответствующих порядков.

4.4. СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Если $y = c$, то $\Delta y = \Delta c = 0$;

2. $\Delta(cy) = c\Delta y$;
3. $\Delta(y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2$;
4. Если n целое, то для функции $y = x^n$:

$$\Delta y = \Delta(x^n) = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \ldots + nh^{n-1}x + h^n.$$

4.5. ПЕРВАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Будем рассматривать значения функции $y = f(x)$, заданные для равноотстоящих значений аргумента x_0, $x_1 = x_0 + h$, … , $x_n = x_0 + nh$. Обозначим их:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0), \\ y_1 &= f(x_1), \\ &\ldots \\ y_n &= f(x_n). \end{aligned}$$

Требуется подобрать многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, имеющий одинаковые значения с функцией $y = f(x)$ для $n + 1$ значения аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Как уже было доказано, существует единственный многочлен $P_n(x)$ степени n, для которого $P_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Запишем искомый многочлен $P_n(x)$ в следующем виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_n). \quad (4.7)$$

Для определения $n + 1$ коэффициента имеем $n + 1$ условие (4.3). Последовательно полагая в выражении (4.6) x равным x_0, x_1, … , x_n и применяя условия (4.3), найдем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Так, при $x = x_0$ имеем $P_n(x_0) = y_0 = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. При $x = x_1$ имеем $P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$, откуда получим, подставляя $a_0 = y_0$, $x_1 - x_0 = h$ и $y_1 - y_0 = \Delta y_0$, $a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$. При $x = x_2$ имеем $P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. Отсюда

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad \text{или} \quad a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Аналогично выражая значения функций с помощью конечных разностей согласно (4.5), получим:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3},$$
$$\dots$$
$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k},$$

т.е. многочлен запишется в следующем виде:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (4.8)$$

Полученная формула (4.8) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. В формулу Ньютона входят многочлены повышающихся степеней, причем коэффициентами при них являются последовательные конечные разности, деленные на факториалы.

Преобразуем полученную формулу к виду, удобному для практического использования, для чего введем переменную $t = \frac{x - x_0}{h}$.

Тогда

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$
$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2,$$
$$\dots$$
$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_0 - (n-1)h}{h} = t - (n - 1).$$

Итак, первая формула Ньютона имеет следующий вид:

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4.9)$$

Если в формуле (4.9) принять t равным целому числу k ($k \leq n$), то в правой части формулы будут стоять $n+1$ слагаемые, причем последнее будет иметь вид:

$$\frac{k(k-1)\dots(k-k+1)}{k!}\Delta^k y_0 = \Delta^k y_0,$$

а во всех последующих слагаемых будет содержаться множитель $(k-k)$ и, следовательно, они будут равны нулю, откуда

$$P_n(x_0+kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0,$$

т.е.

$$P_n(x_0+kh) = y_k.$$

Если же t не является целым, то получаем значения многочлена $P_n(x_0+th)$ для значений аргумента, отсутствующих в таблице.

Формулу (4.9) следует использовать при вычислении приближенных значений функции $f(x)$ для значений аргумента, лежащих между x_0 и x_1. Если же $x_1 < x < x_2$, то за x_0 удобнее принимать узел интерполяции x_1.

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования в точках x, близких к началу таблицы x_0. Она называется интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед. Число n следует выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_k$ были практически постоянными.

4.6. ВТОРАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Для интерполирования в конце таблицы первая интерполяционная формула оказывается непригодной, так как в этом случает оказывается мало соответствующих разностей.

Для получения формулы, которая применяется для интерполирования в конце таблицы, рассмотрим искомый многочлен в следующем виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$
$$+ a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1). \qquad (4.10)$$

Применяя условие (4.3), будем иметь при $x = x_n$ $a_0 = y_n$. При $x = x_{n-1}$ имеем $y_{n-1} = y_n + a_1(x_{n-1} - x_n)$, а так как $x_{n-1} - x_n = -h$, то $a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}$, при $x = x_{n-2}$ имеем $a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$.

Аналогичные рассуждения приведут к общей формуле для коэффициентов:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Подстановка полученных выражений для коэффициентов в формулу (4.10) преобразует многочлен $P_n(x)$ к следующему виду:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) называется второй интерполяционной формулой Ньютона.

Для удобства практического применения ее следует преобразовать аналогично первой. Введем новую переменную

$$t = \frac{x - x_n}{h} \quad \text{или} \quad x = x_n + th.$$

Выразив в формуле (4.11) множители, содержащие x, через t, т.е.

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - (x_n - h)}{h} = t + 1,$$
$$\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - (x_n - 2h)}{h} = t + 2,$$
$$\ldots$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - [x_n - (n-1)h]}{h} = t + n - 1,$$

будем иметь

$$P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4.12)$$

Получили интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования назад.

Пример. Задана таблица 4.3 значений функции $y = \sin x$ в пределах от x = 15° до x = 35° с шагом h = 5°. Найти $\sin 16°$ и $\sin 37°$.

Таблица 4.3

x	$y = \sin x$
15°	0,2588
20°	0,3420
25°	0,4226
30°	0,5000
35°	0,5736

Решение. Составим таблицу разностей (табл. 4.4). В данной таблице третьи разности постоянны, следовательно, ими можно ограничиться.

Таблица 4.4

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>Δy</th><th>$\Delta^2 y$</th><th>$\Delta^3 y$</th></tr>
<tr><td>15°</td><td>0,2588</td><td rowspan="2">832</td><td rowspan="3">– 26</td><td rowspan="4">– 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">20°</td><td rowspan="2">0,3420</td></tr>
<tr><td rowspan="2">806</td></tr>
<tr><td rowspan="2">25°</td><td rowspan="2">0,4226</td><td rowspan="2">– 32</td></tr>
<tr><td rowspan="2">774</td><td rowspan="4">– 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">30°</td><td rowspan="2">0,5000</td><td rowspan="3">– 38</td></tr>
<tr><td rowspan="2">736</td></tr>
<tr><td>35°</td><td>0,5736</td></tr>
</table>

Для вычисления $\sin 16°$ воспользуемся интерполяционной формулой для начала таблицы:

$$P_3(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0,$$

при этом $x_0=15°$, $x = 16°$, $t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{16°-15°}{5°}=0{,}2$.
Подставив числовые значения в формулу, будем иметь

$$\sin 16° \approx P_3(16°)=0{,}2588+\frac{0{,}2}{1!}0{,}0832+\frac{0{,}2(-0{,}8)}{2!}(-0{,}0026)+$$
$$+\frac{0{,}2\cdot(-0{,}8)\cdot(-1{,}8)}{3!}(-0{,}0006)\approx 0{,}2588+0{,}0166+0{,}0002=0{,}2756.$$

(В таблице Брадиса $\sin 16°= 0{,}2756$.)

Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона могут быть использованы для экстраполирования функции, т.е. нахождения значений функции, соответствующих лежащим вне пределов таблиц значениям аргумента. Для $x<x_0$, но близких к x_0, применяется первая интерполяционная формула Ньютона.

Пример (продолжение). Значение 37° находится вне пределов таблицы значений аргумента, но близко к x_n. В данном случае следует применить вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_3(x_4+th)=y_4+\frac{t}{1!}\Delta y_3+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1,$$

где $x_4=35°$, а $t=\frac{x-x_4}{h}=\frac{37°-35°}{5°}=0{,}4$.

Подставив в формулу значения y_4, t и соответствующих разностей, будем иметь

$$\sin 37° \approx P_3(37°)=0{,}5736+\frac{0{,}4}{1}0{,}0736+\frac{0{,}4\cdot 1{,}4}{2}(-0{,}0038)+$$
$$+\frac{0{,}4\cdot 1{,}4\cdot 2{,}4}{3}(-0{,}0006)\approx 0{,}5736+0{,}02944-0{,}00106-0{,}00027\approx 0{,}6017.$$

(В таблице Брадиса $\sin 37°= 0{,}6018$.)

Как видим, экстраполяция менее точна, чем интерполяция.

4.7. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА

Обозначим $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$. Можно показать, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

а так как узлы интерполяции равноотстоящие, $x_{i+1} - x_i = h$ (i=0,1,…,n), то, обозначив $\frac{x-x_0}{h} = t$, получим $R_n(x)$для первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{4.13}$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполяции $x_0, \ldots, x_n$ и точкой x;
и для второй интерполяционной формулы Ньютона

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.14}$$

Так как обычно интерполяционные формулы Ньютона обрываются на членах, содержащих разности, которые в пределах заданной точности можно считать постоянными, то считая, что $\Delta^{n+1}y$ почти постоянны для $f(x)$ и h достаточно мало, будем иметь:

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{n\to 0}\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}} \quad \text{или} \quad f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}.$$

Отсюда можно записать остаточный член для первой интерполяционной формулы:

$$R_n(x) \approx \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0 \tag{4.15}$$

и остаточный член для второй интерполяционной формулы

$$R_n(x) \approx \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_n. \qquad (4.16)$$

4.8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В практических задачах приходится находить производные функции, заданной таблично, либо дифференцировать функцию, имеющую сложное аналитическое выражение. В этих случаях пользуются приближенным дифференцированием. Для этого заменяют функцию $y=f(x)$ на интересующем отрезке $[a, b]$ многочленом $P\,(x)$, после чего считают, что $f'\,(x) \approx P'\,(x)$, если x принадлежит $[a, b]$.

Если известна погрешность $R\,(x) = f\,(x) - P\,(x)$, то погрешность производной $P'\,(x)$ вычисляется по формуле

$$z\,(x) = f'\,(x) - P'\,(x) = R'\,(x).$$

Приближенное дифференцирование является менее точной операцией, чем интерполирование.

Если многочлен $P\,(x)$ определяется с помощью формул Ньютона по значениям функции $y = f\,(x)$ в равноотстоящих точках x_i (i = 0, 1, …, n) отрезка $[a, b]$, то для нахождения производной $y' = f'\,(x)$ на $[a, b]$ (предполагается, что она существует) необходимо продифференцировать многочлен и взять полученное выражение за приближенное выражение производной функции $y = f\,(x)$, т.е. $f'\,(x) \approx P'\,(x)$. Для конкретной точки x это будет числовое значение-производной.

Для первой интерполяционной формулы Ньютона

$$y\,(x) = f\,(x) \approx y_0 + t\Delta\, y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}\Delta^n y_0,$$

будем иметь

$$y'\,(x) = f'\,(x) \approx \frac{1}{h}\,(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 +$$

$$+\frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3-9t^2+Ht-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots),$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$, а, следовательно, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h}$.

Для второй интерполяционной формулы Ньютона

$$y(x) = f(x) \approx y_n + t\Delta\, y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$

будем иметь

$$y'(x) = f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!}\Delta^2 y_0 +$$
$$+ \frac{3t^2+6t+2}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots).$$

Подобным образом находятся все производные высших порядков.

Пример. Функция $y = \lg x$ задана табл. 4.5 значений:

Таблица 4.5

x	*f(a)*
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3, 0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Найти $f\ '(1005)$.

Пользуемся формулой: $f'(x) \approx P'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 +$
$$+ \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots),$$

в которой $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1005-x_0}{10} = 0{,}5$, а разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, … , определяются из таблицы разностей 4.8

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 +$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Таблица 4.6

<table>
<tr><th>x</th><th>f (x)</th><th>Δy</th><th>$\Delta^2 y$</th><th>$\Delta^3 y$</th></tr>
<tr><td>1000</td><td>3,0000000</td><td rowspan="2">43214</td><td rowspan="3">– 426</td><td rowspan="4">8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1010</td><td rowspan="2">3,0043214</td></tr>
<tr><td rowspan="2">42788</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1020</td><td rowspan="2">3,0086002</td><td rowspan="2">–418</td></tr>
<tr><td rowspan="2">42370</td><td rowspan="4">9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">130</td><td rowspan="2">3, 0128372</td><td rowspan="4">–409</td></tr>
<tr><td rowspan="2">41961</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1040</td><td rowspan="2">3,0170333</td></tr>
<tr><td rowspan="2">41560</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td>1050</td><td>3,0211893</td><td>–401</td></tr>
</table>

$$f'\,(1005) \approx \frac{1}{10}\,[0{,}0043214 + 0 \cdot (-0{,}0000426) +$$

$$+\frac{3-0{,}25+2}{2\cdot 3}\cdot 0{,}0000008] =$$

$$= \frac{1}{10}\,(0{,}0043214 - 0{,}0416667\cdot\, 0{,}0000008) \approx 0{,}0004321.$$

Задачи

1. Построить интерполяционные многочлены Лагранжа для функций, заданных таблицами:

а)

x	0	4	6
y	1	3	2

б)

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

в)

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

Ответ: а) $-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x+1$;

б) $x^3-4x^2+3;$

в) $x^3+x^2-x+2.$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей:

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Ответ: $-0{,}2x^2+3x+5{,}2.$

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Если отыскание первообразной функции затруднительно или невозможно, прибегают к приближенному интегрированию. В частности, если функция $f(x)$ задана таблично, то невозможно найти первообразную. Существуют различные способы приближенного интегрирования. Ниже описаны методы, основанные на линейной и параболической интерполяции.

5.2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ОСНОВАННОЕ НА ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ

Разобьем отрезок интегрирования $[a,\ b]$ на n равных частей. При этом шаг интегрирования будет равен $h = \frac{b-a}{n}$. Введем обозначения делящих точек:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh.$$

Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ на каждом частичном отрезке $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, … , $[x_{n-1},\ x_n]$ линейной функцией, для чего воспользуемся линейной интерполяцией:

$$y = y_k + \frac{x-x_k}{h}\Delta y_k. \tag{5.1}$$

Тогда на частичном отрезке $[x_0,\ x_1]$ функция $f(x)$ будет заменена линейной функцией

$$y = y_0 + \frac{x-x_k}{h}\Delta y_0.$$

Заметим, что эти же формулы получаются из интерполяционного многочлена Ньютона при $n = 1$.

Приняв во внимание, что

$$x_1 = x_0 + h, \Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_0+h} \left[y_0 + \frac{x - x_0}{h}(y_1 - y_0)\right] dx.$$

Выполнив выкладки, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong \frac{y_0+y_1}{2}h. \tag{5.2}$$

Заменив подынтегральную функцию линейной функцией на остальных частичных отрезках, аналогично найдем:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \cong \frac{y_1+y_2}{2}h,$$
$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \cong \frac{y_2+y_3}{2}h,$$
$$\dots$$
$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h.$$

Сложив левые и правые части этих приближенных равенств и заменив h через $\frac{b-a}{n}$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]. \tag{5.3}$$

Эту формулу называют формулой трапеций. Название формулы связано с ее геометрическим смыслом: площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменяется суммой площадей прямолинейных трапеций (рис. 5.1).

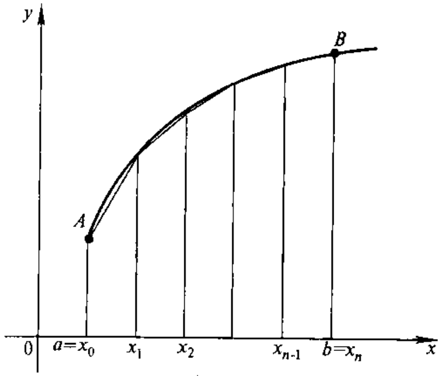

Рис. 5.1

Можно доказать, что если подынтегральная функция имеет непрерывную вторую производную, то погрешность формулы трапеций оценивается так:

$$|R_{\text{ф}}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \qquad (5.4)$$

где M_2 – наибольшее значение модуля второй производной $f''(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определим, пользуясь этой формулой, число делений отрезка интегрирования, при котором погрешность формулы трапеций не превысит наперед заданного положительного числа ε.

Из неравенства

$$\frac{(b-a)^3 M_2}{12\, n^2} \leq \varepsilon$$

найдем

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}.$$

Замечание. Погрешность, которую допускают при использовании приближенной формулы, складывается из погрешности $R_ф$ самой формулы и погрешности $R_{выч}$, вычислений, которые производят над приближенными числами, входящими в формулу. Очевидно, надо стремиться к тому, чтобы погрешность вычислений была мала сравнительно с погрешностью формулы. По этой причине вычисления следует вести с некоторым числом запасных знаков. Например, легко показать, что погрешность вычислений по формуле трапеций равна

$$R_{выч} = (b - a)\Delta f(x),$$

где $\Delta f(x)$ – погрешность значений функции $f(x)$ в узлах интерполяции. Пользуясь этой формулой, легко определить нужное число запасных знаков.

Например, пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int^{31} f(x)\,dx$ с двумя верными десятичными знаками, т.е. с погрешностью, не превышающей 0,005. Если вычислить $f(x)$ в узлах интерполяции с двумя запасными знаками, т.е. с четырьмя десятичными знаками, то погрешность вычислений будет равна

$$R_{выч} = (3 – 1)\,\Delta f(x) = 20{,}00005 = 0{,}001.$$

Как видим, два запасных знака позволили получить погрешность вычислений значительно меньшую (0,0001) заданной погрешности формулы трапеций (0,005).

Пример. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций с двумя верными десятичными знаками, т.е. с погрешностью $\varepsilon \leq 0{,}005$.

Решение. 1. Найдем вторую производную от подынтегральной функции $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$,

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

2. Найдем M_2 – наибольшее значение модуля второй производной на отрезке [0, 1]. Легко убедиться, что $f''(x)$ принимает наибольшее значение по абсолютной величине значение при $x = 0$, т.е.

$$M_2 = |f''(0)| = 2.$$

3. Найдем число делений отрезка интегрирования:

$$n \geq \sqrt{\frac{2}{12 \cdot 0{,}005}} \cong 5{,}8.$$

В качестве n примем ближайшее целое число 6.

4. Найдем шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}.$$

5. Составим таблицу значений подынтегральной функции для

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$x_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ x_5 = \frac{5}{6},\ x_6 = 1.$$

Поскольку интеграл требуется вычислить с двумя верными десятичными знаками, значения функции $y_k = f(x)$ будем вычислять с большей точностью, а именно, с четырьмя верными десятичными знаками:

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{x_{k^2}}$	$\mathbf{1} + \boldsymbol{x_{k^2}}$	$\boldsymbol{y_k = \frac{1}{1+x_{k^2}}}$
0	0	0	1	1,0000
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{37}{36}$	0,9730
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{9}$	0,9000
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0,8000
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{9}$	0,6923
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{61}{36}$	0,5902
6	1	1	2	0,5000

6. Вычислим искомый интеграл по формуле трапеций:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \cong \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2}1 + 0{,}9730 + 0{,}9000 + 0{,}8000 + 0{,}6923 +$$
$$+ 0{,}5902 + \frac{1}{2}0{,}5\Big) \cong 0{,}78.$$

5. 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ОСНОВАННОЕ НА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. ФОРМУЛА СИМПСОНА

Пусть требуется приближенно вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.В пункте 24 подынтегральная функция была заменена на каждом из частичных отрезков интегрирования линейной функцией. Для того чтобы повысить точность интегрирования, воспользуемся параболической, в частности квадратической, интерполяцией. С этой целью разобьем отрезок интегрирования $[a,\ b]$ на четное число $2n$ равных частей. При этом шаг интегрирования будет равен $h = \frac{b-a}{2n}$. Введем обозначения делящих точек:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_{2n} = x_0 + 2nh.$$

Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ на каждом удвоенном частичном отрезке длиною $2h$ (т.е. на отрезках $[x_0,\ x_2]$, $[x_2,\ x_4]$, … , $[x_{2n-2},\ x_{2n}]$), интерполяционным многочленом Ньютона, положив n=2.

В качестве узлов интерполяции на отрезке $[x_0, x_2]$ примем x_0, x_1, x_2; тогда на этом отрезке подынтегральная функция будет заменена интерполяционным многочленом:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Приняв во внимание, что

$$(x - x_0)(x - x_1) = (x - x_0)[x - (x_0 + h)] = (x - x_0)[(x - x_0) - h] =$$
$$= (x - x_0)^2 - (x - x_0)h,$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \text{ и } \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) =$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0,$$

найдем:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} \left[y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)\right] dx =$$
$$= \int_{x_0}^{x_0+2h} \left\{y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}[(x - x_0)^2 - (x - x_0)h]\right\} dx =$$
$$\left| y_0 x + \frac{y_1 - y_0}{h}\frac{(x - x_0)^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}\left[\frac{(x - x_0)^3}{3} - \frac{(x - x_0)^2}{2}h\right]\right|_{x_0}^{x_0 + 2h}.$$

Выполнив выкладки, получим

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]. \qquad (5.5)$$

Заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона второго порядка, на остальных отрезках $[x_2,\ x_4]$, $[x_4, x_6]$, … , $[x_{2n-2}, x_{2n}]$, аналогично найдем:

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2],$$

$$\int_{x_4}^{x_0} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6],$$

$$\ldots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}].$$

Сложив левые и правые части этих приближенных равенств и заменив h через $\frac{b-a}{2n}$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$
$$+2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}]. \quad (5.6)$$

Эту формулу называют формулой парабол Симпсона. Название формулы связано с ее геометрическим смыслом: площадь криволинейной трапеции *aABb* заменяется суммой *n* площадей параболических трапеций, каждая из которых ограничена сверху дугой параболы с вертикальной осью симметрии (рис. 5.2).

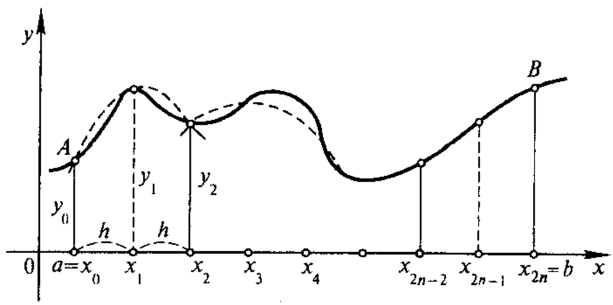

Рис. 5.2

Можно доказать, что если подынтегральная функция имеет непрерывную четвертую производную, то погрешность формулы Симпсона оценивается так:

$$|R_\text{ф}| \lesssim \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4, \tag{5.7}$$

где M_4 – наибольшее значение модуля $f^{(IV)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определим, пользуясь этой формулой, число делений отрезка интегрирования, при котором погрешность формулы Симпсона не превысит наперед заданного положительного числа ε.

Из неравенства

$$\frac{(b-a)^5 M_4}{180(2n)^4} \lesssim \varepsilon$$

найдем:

$$2n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}.$$

Замечание 1. Если $f(x)$ есть многочлен третьей или более низкой степени, то погрешность формулы Симпсона $R_\text{ф} = 0$ (так как $M_4 = = f^{(IV)}(x) = 0$), и значит, в этих случаях формула Симпсона дает точное значение интеграла.

Отсюда следует, что если шаг интегрирования выбран произвольно, затем составлена таблица разностей функции $f(x)$ и оказалось, что разности второго или третьего порядка практически постоянны, то можно пользоваться формулой Симпсона при выбранном шаге интегрирования. Действительно, наличие практически постоянных разностей второго или третьего порядка свидетельствует о том, что функция $f(x)$ хорошо интерполируется многочленом второй или третьей степени, а для таких многочленов формула Симпсона дает точное значение интегралов.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ задана таблично, то погрешность формулы Симпсона оценивается так:

$$\left|R_{\text{ф}}\right| \lesssim \frac{(b-a)max\left|\Delta^4 y\right|}{180}.$$

Этой же оценкой можно пользоваться, если вычисление $f^{(IV)}\,(x)$ затруднительно.

Замечание 3. Желая избежать использования указанных ранее оценок погрешности формулы Симпсона, можно вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ дважды: при некотором числе $2n$ делений отрезка интегрирования и при вдвое большем числе делений. Тогда первые совпавшие десятичные знаки у обоих результатов считают верными. Как и в случае формулы трапеций можно показать, что в случае формулы Симпсона погрешность вычислений $R_{\text{выч}} = (b-a)\Delta\, f(x)$.

Пример. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Симпсона с четырьмя верными десятичными знаками, т.е. с погрешностью ε < 0,00005.

Решение. 1. Найдем четвертую производную от подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$f^{(IV)}\,(x) = \frac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5}.$$

2. Найдем M_4 – наибольшее значение модуля $\left|f^{(IV)}\,(x)\right|$ на отрезке [0;1]:

$$M_4 = f^{(IV)}\,(0) = 1.$$

3. Найдем число делений $2n$ отрезка интегрирования:

$$2n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{1}{180\cdot 0{,}00005}} \approx 3{,}25.$$

В качестве $2n$ примем ближайшее целое число, т.е. положим $2n = 4$.

4. Составим таблицу значений подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ для $x_0 = 0$, x_1 =0,25, x_2 =0,5, x_3 =0,75, x_4 =1. Поскольку интеграл требуется найти с четырьмя верными десятичными знаками, значения функции $y_k = f(x_k)$ будем вычислять с большей точностью, а именно, с пятью десятичными знаками*. Результаты вычислений запишем в табл. 5.1:

Таблица 5.1

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{x_{k^2}}$	$\boldsymbol{1 + x_{k^2}}$	$\boldsymbol{y_k = \frac{1}{1+x_{k^2}}}$
0	0	0	1,00000	1,00000
1	0,25	0,06250	1,06250	0,94118
2	0,50	0,25000	1,25000	0,80000
3	0,75	0,56250	1,56250	0,64000
4	1	1,00000	2,00000	0,50000

5. Вычислим искомый интеграл по формуле Симпсона:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{b-a}{3\cdot 2n}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4] =$$

$$= \frac{1}{12}[1{,}00000 + 4(0{,}94118 + 0{,}64000) + 2\cdot 0{,}80000 + 0{,}50000] = 0{,}7854.$$

В заключение заметим, что известная из общего курса анализа формула прямоугольников для приближенного вычисления интегралов получается на основании интерполяции, заменив подынтегральную функцию на каждом частичном отрезке первым членом интерполяционного многочлена Ньютона, т.е. постоянной.

Таким образом, формулы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона) получаются на основании интерполяции, заменив подынтегральную функцию на каждом частичном отрезке интерполяционным многочленом Ньютона, положив в нем *n* равным соответственно 0,1 и 2.

---

* Взят лишь один запасный знак, потому что все значения y_k, кроме y_1, являются точными числами.

Задачи

1. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций с погрешностью ε, не превышающей 0,05.

Ответ: 0,708.

2. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ по формуле Симпсона с погрешностью ε, не превышающей 0,05.

Ответ: 1,100.

3. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ по формуле трапеций, приняв n = 6.

Ответ: 0,817.

4. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ по формуле Симпсона, приняв $2n$ = 10.

Ответ: 1,37.

5. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$ по формуле Симпсона, приняв: а) $2n$ = 10; б) $2n$ = 20.

Ответ: а) 0,948; б) 0,948.

6. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$: а) по формуле трапеций, б) по формуле Симпсона с точностью 0,05.

Ответ: а) 0,6398 ≈ 0,64, б) 0,635 ≈ 0,64.

7. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0{,}1 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$ по формуле Симпсона, приняв: а) $2n = 10$, б)$2n$=12.

Ответ: а) 1,531, б) 1,531.

6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ
6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = f(x, y).$$

Предположим, что задано начальное условие: при $x = x_0$ неизвестная функция $y = y_0$. Известно, что если $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) функция непрерывная по обоим аргументам и частная производная $\frac{\sigma f}{\sigma y}$ ограничена в этой окрестности, то рассматриваемое дифференциальное уравнение в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет единственное частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Геометрически частное решение изображается интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). Рассмотрим два основных метода приближенного (численного) дифференцирования – метод Эйлера и метод Рунге-Кутта.

6.2. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Сущность метода Эйлера состоит в том, что интегральную кривую заменяют ломаной линией (ее называют ломаной Эйлера), проходящей через точку (x_0, y_0); звенья ломаной имеют одинаковые горизонтальные проекции, равные h (рис. 6.1).

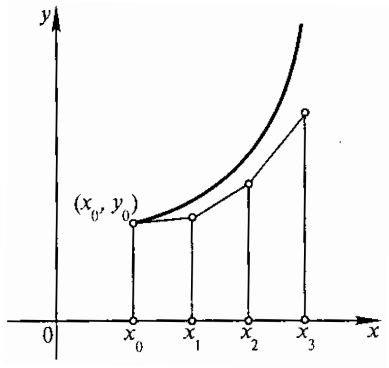

Рис. 6.1

Поставим своей задачей найти численное решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[x_o, b]$ по заданному начальному условию, т.е. будем искать частное решение в виде таблицы значений неизвестной функции, соответствующих равноотстоящим значениям независимой переменной *x*. С этой целью разобьем отрезок интегрирования $[x_o, b]$ на n равных частей $\left(\text{длиною } h = \frac{b-x_0}{n}\right)$ точками $x_o,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h$ и т.д.

Заменим на частичном отрезке $[x_o, x_1]$ интегральную кривую отрезком прямой линии, проходящей через точку (x_0, y_0), приняв ее угловой коэффициент равным $f(x_0, y_0)$; таким образом, первое звено ломаной Эйлера будет отрезком касательной, проведенной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0). Напишем уравнение этой касательной:

$$Y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Положив здесь $x = x_1$ будем иметь

$$Y - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Отсюда

$$Y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Заменим на частичном отрезке $[x_1, x_2]$ интегральную кривую отрезком прямой линии, проходящей через точку (x_1, y_1), приняв ее угловой коэффициент равным $f(x_1, Y_1)$. Напишем уравнение этой прямой

$$y - Y_1 = f(x_1, Y_1)(x - x_1).$$

Положив здесь $x = x_2$, получим

$$Y_2 - Y_1 = f(x_1, Y_1)(x_2 - x_1).$$

Отсюда

$$y_2 = Y_1 + f(x_1, Y_1)h.$$

Поступая также на остальных частичных отрезках, аналогично получим

$$Y_{h+1} = Y_k + f(x_k, Y_k)h. \tag{6.1}$$

Эту формулу примем в качестве рабочей для численного интегрирования методом Эйлера. Результаты вычислений целесообразно записывать в табл. 6.1:

Таблица 6.1

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{Y_k}$	$\boldsymbol{f(x_k, Y_k)}$	$\boldsymbol{f(x_k, Y_k)h}$

Пример. Составить методом Эйлера на отрезке [0; 0,5] с шагом h=0,1 таблицу приближенных значений частного решения дифференциального уравнения $y' = 2xy$, удовлетворяющего начальному условию: при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Решение. 1. Запишем в первый столбец значения k: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

2. Запишем во второй столбец значения x_k: 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

3. Запишем в первую строку: $y_0 =$ 1,0000; $f(x_0, y_0) = f(0, 1) =$ =2·0·1= 0; $f(x_0, y_0)h$ = 0 · 0,1 = 0.

4. Запишем во вторую строку:

$$Y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + 0{,}01 = 1;$$
$$f(x_1, Y_1) = f(0{,}1;\, 1) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}2;$$
$$f(x_1, Y_1)h = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02.$$

Аналогично заполняются остальные строки таблицы. В итоге получим табл. 6.2:

Таблица 6.2

k	x_k	Y_k	$f(x_k, Y_k)$	$f(x_k, Y_k)h$
0	0	1,0000	0,0000	0,0000
1	0,1	1,0000	0,2000	0,0200
2	0,2	1,0200	0,4080	0,0408
3	0,3	1,0608	0,6365	0,0636
4	0,4	1,1241	0,8995	0,0899
5	0,5	1,2143		

Замечание. Недостаток метода Эйлера состоит в том, что по мере удаления от начальной точки x_0 происходит накапливание погрешностей, т.е. вычисленные значения неизвестной функции все более уклоняются от истинных значений. Для того чтобы уменьшить погрешности, достаточно уменьшить шаг h; однако очень малый шаг потребует значительного числа вычислений. По этой причине в случаях, когда требуется высокая точность, прибегают к другим, более совершенным методам, один из которых описан в пункте 27.

6.3. МЕТОД РУНГЕ-КУТТА

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

Допустим, что существует частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0$, $y = y_0$. Требуется численно найти это решение на отрезке $[x_o, b]$ с шагом h, т.е. надо вычислить значения неизвестной функции y_1, y_2, y_3 и т.д., соответствующие значениям независимой переменной $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$ и т.д.

Для того чтобы найти значение неизвестной функции y_1, соответствующее $x_1 = x_0 + h$, поступают так.

1. Последовательно находят числа $K_1^{(0)}$, $K_2^{(0)}$, $K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$ по формулам:

$$K_1^{(0)} = hf(x_0, y_0),$$
$$K_2^{(0)} = hf(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{K_1^{(0)}}{2}),$$
$$K_3^{(0)} = hf(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{K_2^{(0)}}{2}),$$
$$K_4^{(0)} = hf(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + K_3^{(0)}). \qquad (6.1)$$

2. Находят Δy_0 по формуле

$$\Delta y_0 = \tfrac{1}{6}\left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}\right) = \tfrac{1}{6}\textstyle\sum_0. \qquad (6.2)$$

3. Находят y_1 по формуле $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. (6.3)

Таким образом, значение неизвестной функции y_1, соответствующее $x = x_1$, найдено.

Отправляясь от уже известной точки (x_1, y_1), находят y_2; отправляясь от точки (x_2, y_2), находят y_3 и т.д. В общем случае расчет производят последовательно по формулам:

1. $K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$,

2. $K_2^{(i)} = hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{K_1^{(i)}}{2})$,

3. $K_3^{(i)} = hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{K_2^{(i)}}{2})$,

4. $K_4^{(i)} = hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + K_3^{(i)})$,

5. $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right) = \frac{1}{6}\sum_i$,

6. $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Сущность метода Рунге-Кутта состоит в следующем: представим y_{i+1} по формуле Тэйлора, ограничившись первыми пятью членами:

$$y_{i+1} \approx y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \frac{y_i'''}{3!}h^3 + \frac{y_i^{(IV)}}{4!}h^4.$$

Представим y_{i+1} по методу Рунге-Кутта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right). \qquad (6.4)$$

Оказывается, что все написанные члены правых частей этих двух равенств соответственно совпадают между собой. Поскольку доказательство этого утверждения громоздко, здесь оно не приводится.

Метод Рунге-Кутта обладает рядом достоинств: метод дает хорошую точность, он применим и для переменного шага и не требует специального вычисления первоначальных значений неизвестной функции, как это имеет место в некоторых других методах (например, в методе Адамса-Штермера).

К недостаткам метода относятся: большая трудоемкость, отсутствие контроля вычислений, затруднительная точная оценка погрешности метода.

Замечание. Для того чтобы проверить правильность выбора шага h, можно руководствоваться следующим грубым критерием: если модуль разности $[k_2 - k_3]$ не превышает нескольких процентов модуля разности $|k_2 - k_1|$, то шаг выбран правильно; в противном случае шаг надо уменьшить.

Все вычисления следует записывать в табл.6.3:

Таблица 6.3

i	x	y	$f(x,y)$	$K=hf(x,y)$	$\frac{K}{2}$	Δy
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$K_1^{(0)}$	$\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2})$	$K_2^{(0)}$	$\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2})$	$K_3^{(0)}$	–	$2K_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+K_3^{(0)}$	$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+K_3^{(0)})$	$K_4^{(0)}$	–	$K_4^{(0)}$
	–	–	–	–	–	$\Delta y_0=\frac{1}{6}\sum_0$
1	x_1	$y_1=$ $=y_0+\Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$K_1^{(1)}$	$\frac{K_1^{(1)}}{2}$	$K_1^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{K_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{K_1^{(1)}}{2})$	$K_2^{(1)}$	$\frac{K_2^{(1)}}{2}$	$2K_2^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{K_2^{(1)}}{2})$	$K_3^{(1)}$	–	$2K_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+K_3^{(1)}$	$f(x_1+\frac{h}{2}, y_1+K_3^{(1)})$	$K_4^{(1)}$	–	$K_4^{(1)}$
	–	–	–	–	–	$\Delta y_1=\frac{1}{6}\sum_1$

Аналогично вычисляют следующие строки таблицы.

Пример. Найти методом Рунге-Кутта на отрезке [0; 0,2] с шагом h=0,1 частное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющего начальному условию при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Решение. 1. Вычислим величины:

$$K_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(0 + 1) = 0{,}1;$$

$$K_2^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}) = 0{,}1[0{,}05 + (1 + 0{,}05)] = 0{,}11;$$

$$K_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}) = 0{,}1[0{,}05 + (1 + 0{,}055)] = 0{,}1105;$$

$$K_4^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + K_3^{(0)}) = 0{,}1[0{,}1 + 1{,}1105] = 0{,}12105.$$

2. Вычислим Δy_0: $\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}\right) =$

$$= \frac{1}{6}(0{,}1 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}1105 + 0{,}12105) = 0{,}11034.$$

3. Вычислим y_1: $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}11034 = 1{,}11034.$

4. Проверим правильность выбора шага на участке [0; 0,1], так как

$$\frac{\left|K_2^{(0)} - K_3^{(0)}\right|100}{\left|K_2^{(0)} - K_1^{(0)}\right|} = \frac{|0{,}11 - 0{,}1105|100}{|0{,}11 - 0{,}1|} = 5\%,$$

то шаг выбран правильно.

Аналогично находят y_2. Результаты всех вычислений приведены в табл.6.4:

Таблица 6.4

i	x	y	$x + y$	$K = 0{,}1(x + y)$	$\frac{K}{2}$	Δy
0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	1	0,1	0,05	0,1
	0,05	1,05	1,1	0,11	0,055	0,22
	0,05	1,055	1,105	0,1105		0,2210
	0,1	1,1105	1,2105	0,12105		0,12105
						0,11034
1	$\boxed{0{,}1}$	$\boxed{1{,}11034}$	1,21034	0,12103	0,06052	0,12103
	0,15	1,17086	1,32086	0,13209	0,06604	0,26418
	0,15	1,17638	1,32638	0,13264	–	0,26528
	0,2	1,24298	1,44298	0,14430	–	0,14430
						0,13246
2	$\boxed{0{,}2}$	$\boxed{1{,}24280}$				

Числа, обведенные рамками во втором и третьем столбцах, представляют искомое частное решение.

Задачи

1. Найти методом Эйлера на отрезке [0; 1] с шагом h = 0,1 частное решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = \frac{xy}{2}$, б) $y' = x - y$, в) $y' = xy$ по начальному условию при $x_0 = 0, y_0 = 1$.

2. Найти методом Рунге-Кутта на отрезке [0, 0,4] с шагом h = 0,1 частное решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = x^2 + y$, б) $y' = x + y^2$, в) $y' = x^2 - y$ по начальному условию при $x_0 = 0, y_0 = 2$.

Учебное издание

Прикладная математика. Численные методы

Методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов направлений бакалавриата 151900 “ Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств “ и 150700 “Машиностроение”

Составители: доц. Д.Э.Зубков
ст.преп. В.И.Дюкарева
ст.преп. С.В.Рябцева

Подписано в печать 24.02.15. Формат 60 х 84/16. Уч-изд. л.5.Тираж 150 экз. Заказ№ Цена .
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете им.В.Г.Шухова
308012, г.Белгород, ул.Костюкова 46