Министерство образования и науки Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Горлов А.С.

Дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Белгород 2013

УДК 517.9(07)
ББК 22.161я7
Г 69

Составитель:
канд. техн. наук, доц. А.С. Горлов

Рецензент
канд.физ.-мат.наук, доц. каф. высшей математики и физико–математического моделирования ВГТУ, В.В. Ломакин;
канд.техн.наук, доц. кафедры физики БГТУ им. В.Г. Шухова, С.Ф. Миндолин

Г 69 Дифференциальные уравнения: учебное пособие /сост.: А.С. Горлов.–Белгород: Изд-во БГТУ, 2013.–87 с.

В пособии излагаются общие теоретические сведения о дифференциальных уравнениях и методы интегрирования отдельных типов уравнений первого и высших порядков, а также систем дифференциальных уравнений. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами.

Издание предназначено для студентов младших курсов технических направлений и специальностей.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 517.9(07)
ББК 22.161я7

Оглавление

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения применяются для описания многих процессов реальной действительности. Трудно представить себе область науки или производства, в которой не возникала необходимость использования дифференциальных уравнений.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов младших курсов технических направлений подготовки и специальностей. В пособии излагается материал о дифференциальных уравнениях, входящий в курсы высшей математики и математического анализа для студентов технических вузов.

В пособии излагаются общие теоретические сведения о дифференциальных уравнениях и методы интегрирования отдельных типов уравнений первого и высших порядков, а также систем дифференциальных уравнений. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами. Большое внимание уделено задачам из геометрии, механики, физики и техники, требующим составления и решения дифференциальных уравнений.

В пособии изложены основные теоремы, некоторые с доказательствами.

В приложении содержатся варианты индивидуальных домашних заданий.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1.1. Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются *дифференциальными* (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.). *Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ –первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях.

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют *обыкновенным;* в противном случае–дифференциальное уравнение *в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ –обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение $x^2 y' + 5xy = y^2$ – первого порядка; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ –дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием,* а график решения дифференциального уравнения–*интегральной кривой.*

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

1.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Решение геометрических и физических задач, требующих составления дифференциальных уравнений, обычно вызывает затруднения: специфика конкретных физических задач требует знания разнообразных законов физики. Универсального метода составления дифференциальных уравнений, пригодного во всех случаях, указать нельзя, можно лишь дать некоторые общие указания.

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка из условия геометрической или физической задачи обычно приходят к одному из следующих трех видов уравнений:

1) дифференциальные уравнения в дифференциалах;
2) дифференциальные уравнения в производных;
3) простейшие интегральные уравнения с последующим преобразованием их в дифференциальные уравнения.

Рассмотрим, как составляются уравнения каждого из приведенных видов в отдельности.

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка часто бывает целесообразно применять так называемый метод дифференциалов. Этот метод заключается в том, что из условия задачи составляется приближенным путем соотношение между дифференциалами. При этом делаются допущения, упрощающие задачу и вместе с тем не отражающиеся на результатах. Так, например, малые приращения величин заменяются их дифференциалами, неравномерно протекающие физические процессы (неравномерное движение точки, нагревание или охлаждение тела, истечение жидкости из сосуда и т.д.) в течение малого промежутка времени dt рассматриваются как равномерные, протекающие с постоянной скоростью. Эти допущения не отражаются на правильности окончательных результатов вследствие того, что замена приращений дифференциалами сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков малости. Так как отношение дифференциалов функции и аргумента является пределом отношения их приращений, то по мере того, как приращения стремятся к нулю, наши допущения выполняются с большей точностью. Получающиеся при этом дифференциальные уравнения оказываются точными, если они однородны и линейны относительно дифференциалов.

Во многих случаях можно составить дифференциальные уравнения, в которых вместо дифференциалов содержатся производные, рассматриваемые как скорости изменения величин. При этом в частности, используются геометрический смысл производной (угловой коэффициент касательной) и ее физический смысл (скорость протекания неравномерного процесса). Этот метод является видоизменением метода дифференциалов. Отсутствие бесконечно малых здесь только кажущееся, при этом методе используется готовое понятие скорости изменения величины, которое само появилось из рассмотрения бесконечно малых элементов.

Решение некоторых задач приводит к уравнениям, содержащим неизвестные функции под знаком интеграла. Такие уравнения называются интегральными. Они, в частности, возникают, когда используется геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции и другие интегральные формулы (длина дуги, площадь поверхности, объем тела, работа силы и т.д.). В простейших случаях удается путем дифференцирования преобразовать интегральные уравнения в дифференциальные, которые интегрируются обычными методами.

Задача 1.1. Материальная точка массы *m* замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости *V*. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3с после начала замедления, если *V*(0) = 100 м/с, а *V*(l) = 50 м/с.

Решение: Примем за независимую переменную время *t*, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки *V* будет функцией *t*, т. е. *V* = *V*(*t*). Для нахождения *V*(*t*) воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики): $m \cdot a = F$, где $a = V'(t)$ –есть ускорение движущегося тела, *F*– результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kV^2$, $k > 0$ –коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V = V(t)$ является решением дифференциального уравнения $m \cdot V' = -k \cdot V^2$ или $V' = -\dfrac{k}{m}V^2$. Здесь m –масса тела.

Как будет показано ниже (пример 2.5), $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорость точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры $\dfrac{k}{m}$ и c. Согласно условию задачи, имеем: $V(0) = \dfrac{1}{c} = 100$ и $V(1) = \dfrac{1}{\frac{k}{m} + c} = 50$

Отсюда $c = \dfrac{1}{100}$, $\dfrac{k}{m} = \dfrac{1}{100}$.

Следовательно, скорость точки изменяется по закону $V = \dfrac{100}{t+1}$. Поэтому $V(3) = 25$ м/с.

Задача 1.2. Найти кривую, проходящую через точку (4; 1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

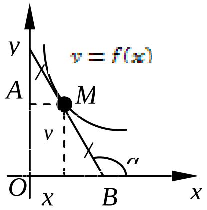

Рис. 1.1

Решение: Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (см. рис. 1.1).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: tgα есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x;\ y)$ он равен y', т. е. $y' = \mathrm{tg}\alpha$.

Из рис. 1.1 видно, что $\mathrm{tg}(\angle MBC) = \dfrac{MC}{BC}$.

Но $\mathrm{tg}(\angle MBC) = \mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$, $MC = y$. По условию задачи $AM = MB$, следовательно, $OC = CB = x$.

Таким образом, получаем $-\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ или $y' = \dfrac{y}{x}$. Решением полученного дифференциального уравнения является функция $y = \dfrac{4}{x}$ (гипербола). Решение будет приведено в п. 2.2 (пример 2.4).

Другие задачи

Можно показать, что:

–закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{dm}{dt} = -k \cdot m$, где $k > 0$–коэффициент пропорциональности, $m(t)$–масса радия в момент t;

–«закон охлаждения тел», т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$, где $T(t)$–температура тела в момент времени t, $к$–коэффициент пропорциональности, t_0 –температура воздуха (среды охлаждения);

–зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$, где k–коэффициент пропорциональности;

–«закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m't = k \cdot m$ то, где $k \geq 0$;

–закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$, где $p(h)$–атмосферное давление воздуха на высоте h, $к > 0$.

Уже приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (2.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \tag{2.2}$$

и называют дифференциальным уравнением *первого порядка, разрешенным относительно производной*. Мы в основном будем рассматривать эту форму записи дифференциального уравнения.

Уравнение (2.2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x;y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости *Oxy*. Таково геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x;y) = c$.

Пример 2.1. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

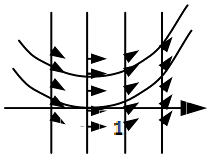

Рис. 2.1

Решение: Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения будет $2x = c$, т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси $Oy(x = \frac{c}{2})$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью *Ox* один и тот же угол α, тангенс которого равен с.

Так при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\mathrm{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$; поэтому $\mathrm{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\mathrm{arctg}\alpha = 2$, $\alpha = \mathrm{arctg}2 \approx 63°$ и т.д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси *Ox* под определенным углом (см. рис. 2.1), по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0\,, \tag{2.3}$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ –известные функции. Уравнение (2.3) удобно тем, что переменные *x и y в* нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи дифференциального уравнения можно перейти к другому.

Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{2}$ и вообще $y = x^2 + c$, где C –const.

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y = y_0$ называется *начальным условием.* Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y\big|_{x=x_0} = y_0. \qquad (2.4)$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi(x;c)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении c.

2. Каково бы ни было начальное условие (2.4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x; y; c_0) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x; y; c_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x, c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy;* частное решение $y = \varphi(x, c_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (2.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (2.4), называется *задачей Коши.*

Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (2.2) функция $f(x;y)$ и ее частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (2.4).

(Без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку $(x_0;y_a)$.

Рассмотрим теперь методы интегрирования дифференциального уравнения первого порядка определенного типа.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка является, уравнение *вида*

$$P(x)\cdot dx+Q(y)\cdot dy=0 \tag{2.5}$$

В нем одно слагаемое зависит только от *x*, а другое — от *y*. Иногда такие дифференциальные уравнения называют уравнениями с *разделенными переменными.* Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$\int P(x)\cdot dx+\int Q(y)\cdot dy=c$ — его общий интеграл.

Пример 2.1. Найти общий интеграл уравнения $x\cdot dx+y\cdot dy=0$.

Решение: Данное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Поэтому $\int x\cdot dx-\int y\cdot dy=c_1$ или $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=c_1$. Обозначим $\frac{c}{2}=c_1$.

Тогда $x^2-y^2=c$ — общий интеграл дифференциального уравнения.

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися переменными*, которые имеют вид

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy=0. \qquad (2.6)$$

Особенность уравнения (2.6) в том, что коэффициенты при *dx* и *dy* представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от *x*, другая — только от *y*.

Уравнение (2.6) легко сводится к уравнению (2.5) путем почленного деления его на $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy=0, \quad \int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\int\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\cdot dy=c \quad —$$

общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления дифференциального уравнения на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, — *особые решения*.

2. Уравнение $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ так же сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y'=\frac{dx}{dy}$ и разделит переменные

3. Уравнение $y'=f(ax+by+c)$, где *a*,*b*,*c* — числа, путем замены $ax+by+c=u$ сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Дифференцируя по *x*, получаем:

$$\frac{du}{dx}=a+b\cdot\frac{dy}{dx}, \text{ т.е. } \frac{du}{dx}=a+b\cdot f(u),$$

откуда следует

$$\frac{du}{a+b\cdot f(u)}=dx$$

Интегрируя это уравнение и заменяя *u* на *ax* + *by* + *c*, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2.2. Решить уравнение $(y+xy)\cdot dx+(x-xy)\cdot dy=0$

Решение: Преобразуем левую часть уравнения:
$y\cdot(1+x)\cdot dx+x\cdot(1-y)\cdot dy=0$

Оно имеет вид (2.6). Делим обе части уравнения на $xy\neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

Решением его является общий интеграл $x+\ln|x|+\ln|y|-y=c$, т.е. $\ln|xy|+x-y=c$.

Здесь уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ имеет вид $xy=0$. Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями данного дифференциального уравнения, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми.

Пример 2.3. Решить уравнение $y'=-\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию
$y(4) = 1$.

Решение: Этот пример представляет собой решение задачи 2 из п. 1.2. Имеем: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ Проинтегрировав, получим:

$$\ln|y|=\ln|c|-\ln|x|$$

т. е. $y=\frac{c}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Оно представляет собой, геометрически, семейство равносторонних гипербол. Выделим среди них одну, проходящую через точку (4; 1). Подставим $x = 4$ и $y = 1$ в общее решение уравнения: $1=\frac{c}{4}$, c = 4.

Получаем: $y=\frac{4}{x}$ - частное решение уравнения y

Пример 2.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $m \cdot V' = -k \cdot V^2$.

Решение: Этот пример демонстрирует решение задачи 1 из п. 1.2. Приведем данное уравнение к виду (2.5):

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -kV^2, \; m \cdot dV + kV^2 dt = 0, \; \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m} dt = 0.$$

Интегрируем: $\int \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m} \int dt = -c$, т.е. $-\frac{1}{V} + \frac{k}{m} t + c = 0$. Отсюда

$V = \dfrac{1}{\frac{k}{m} t + c}$ — общее решение уравнения.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n–го порядка* (*измерения*), если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т. е.

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$$

Например, функция $f(x, y) = x^2 - 2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{2.7}$$

называется *однородным*, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное дифференциальное уравнение (2.7) можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.8}$$

Если $f(x; y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$. Положив $\lambda=\dfrac{1}{x}$ получаем:

$$f(x,y)=f\left(\frac{x}{x},\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение (2.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\frac{y}{x}=u \text{ или, что то же самое, } y=u\cdot x. \tag{2.9}$$

Действительно, подставив $y=u\cdot x$ и $y'=u'\cdot x+u$ в уравнение (2.8), получаем $u'\cdot x+u=y\varphi(u)$ или $x\cdot\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)-u$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нем u на $\dfrac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)\cdot dy=0 \tag{2.10}$$

Дифференциальное уравнение(2.10) будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Переписав уравнение (2.10) в виде $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. При интегрировании уравнений вида (2.10) нет необходимости предварительно приводить их (но можно) к виду (2.8): подстановка (2.9) сразу преобразует уравнение (2.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2.5. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0.$$

Решение: Данное уравнение однородное, так как функции

$P(x,y)=x^2-y^2$ и $\theta(x,y)=2xy$ — однородные функции второго порядка.

Положим $y=ux$. Тогда $dy=xdu+udx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2-u^2x^2)dx+2xuxxdu+2xuxudx,$$

$$x^2(1-u^2+2u^2)dx+2ux^3du=0,$$

$$(1+u^2)dx+2uxdu=0$$

последнее — уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные и интегрируем

$$\ln|x|+\ln(1+u^2)=c_1,\ \ln(|x|\cdot(1+u^2))=c_1,\ |x|(1+u^2)=e^{c_1}$$

Обозначим $c=e^{c_1}$, $c>0$. Тогда $|x|\cdot(1+u^2)=c$

Заменяя u на $\dfrac{u}{x}$, получаем: $x^2+y^2=cx$ — общий интеграл исходного уравнения.

Отметим, что данное уравнение можно было сначала привести к виду (2.8):

$$x^2-y^2+2xy\cdot\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dx}{dy}=\frac{y^2-x^2}{2xy},\ y'=\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}{2\cdot\dfrac{y}{x}}$$

Затем положить $y=u\cdot x$, тогда $y'=u'\cdot x+u$ и т.д.

Замечание. Уравнение $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_2y+c_1}\right)$, где a,b,c,a_1,b_1,c_1 — числа, приводится к однородному или с разделяющимися переменными. Для этого вводят новые переменные u и v, положив $x — u+\alpha$, $y — v+\beta$, где α и β — числа. Их подбирают так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример 2.6. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+2y+1)dx-(2x+y-1)dy=0,$$

т.е. $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$

Решение: Положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получаем:

$$dx = du\,, dy = dv\,;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + \alpha + 2v + 2\beta + 1}{2u + 2\alpha + v + \beta - 1} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}\,.$$

Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

Находим, что $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Заданное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}$$

и будет являться однородным. Его решение получается, как это было по казано выше, при помощи подстановки $v = tu$. Заметим, что, решив его, следует заменить u и v соответственно на $x - 1$ и $y + 1$. В итоге получим $(y - x + 2)^3 = c(x + y)$ - общий интеграл данного уравнения.

2.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x)\,, \qquad (2.11)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, в частности — постоянные.

Особенность дифференциального уравнения (2.11): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода интегрирования дифференциального уравнения (2.11) — метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Метод И. Бернулли

Решение уравнения (2.11) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна (но не равна нулю — действительно любую функцию $y(x)$ можно записать как

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где $v(x) \neq 0$). Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (2.11), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x). \qquad (2.12)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим дифференциальное уравнение $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, т.е. $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot x$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c|.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять с = 1. Отсюда

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (2.12), получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x)$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x),\ du = g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} + c$$

Возвращаясь к переменной y, получаем решение

$$y = uv = (\int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} + c) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} \qquad (2.13)$$

исходного дифференциального уравнения (2.11).

Пример 2.7. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

Решение: Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т.е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2xv = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot x,\ \ln|v| = -x^2,\ v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2},\ du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx,\ u = e^{x^2} + c$$

Итак, общее решение данного уравнения есть

$$y = u \cdot v = (e^x + c) \cdot e^{-x^2}, \text{ т. е. } y - 1 + c \cdot e^{-x^2}.$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Уравнение (2.11) интегрируется следующим образом.

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, т. е. уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Оно называется *линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка*. В этом уравнении переменные делятся:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \text{ и } \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c_1|.$$

Таким образом, $\left|\dfrac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)dx}$, т.е.

$$y = \pm c_1 e^{-\int p(x)dx} \text{ или } y = ce^{-\int p(x)dx}, \text{ где } c = \pm c_1$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную с в полученном решении заменяем функцией $c(x)$, т. е. полагаем $c = c(x)$. Решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.14}$$

Находим производную:

$$y' = c'(x)\exp(-\int p(x)dx) + c(x)\exp(-\int p(x)dx) \cdot (-p(x)).$$

Подставляем значения y и y' *в* уравнение (2.11):

$$c'(x)\exp(-\int p(x)dx) - c(x)p(x)\exp(-\int p(x)dx) +$$

$$+c(x)p(x)\exp(-\int p(x)dx) = g(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

$$c'(x)\exp(-\int p(x)dx) = g(x)$$

Следовательно,

$$dc(x) = g(x)\exp(\int p(x)dx)dx.$$

Интегрируя, находим:

$$c(x) = \int g(x)\cdot\exp(\int p(x)dx)\cdot dx + c$$

Подставляя выражение $c(x)$ в равенство (2.14), получим общее решение дифференциального уравнения (2.11):

$$y = \left[\int g(x)\cdot\exp(\int p(x)dx)\cdot dx + c\right]\cdot\exp(-\int p(x)dx).$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли (ср. с (2.13)).

Пример 2.8. Решить пример 2.8 методом Лагранжа.

Решение: Решаем уравнение $y' + 2xy - 0$. Имеем $\dfrac{dy}{y} = -2x\cdot dx$, или $y = c\cdot e^{-x^2}$. Заменяем c на $c(x)$, т. е. решение ДУ $y' + 2xy = 2x$ ищем в виде $y = c(x)\cdot e^{-x^2}$. Имеем $y' = c'(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$

Тогда

$c'(x)\cdot e^{-x^2}\cdot -2xc(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = 2x$, т.е. $c'(x)\cdot e^{-x^2} = 2x$

или $c(x) = \int 2x\cdot e^{x^2}\cdot dx$, или $c(x) = e^{x^2} + c$.

Поэтому $y = (e^{x^2} + c)\cdot e^{-x^2}$, или $y = 1 + c\cdot e^{-x^2}$ - общее решение данного уравнения.

Замечание. Уравнение вида $(x\cdot P(y) + Q(y))\cdot y' = R(y)$, где $P(y), Q(y), R(y) \neq 0$ - заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y — аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством

$y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, получаем $\dfrac{x \cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$, т.е.

$x' - \dfrac{P(y)}{R(y)} \cdot x = \dfrac{Q(y)}{R(y)}$ – линейное относительно x уравнение. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — две неизвестные функции.

Пример 2.9. Найти общее решение уравнения $(x + y) \cdot y' = 1$.

Решение: Учитывая, что $y' = \dfrac{1}{x}$, от исходного уравнения переходим к линейному уравнению $x' = x + y$.

Применим подстановку $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получаем:

$u' \cdot v + u \cdot v' = u \cdot v + y$, или $u' \cdot v + u \cdot (v' - v) = y$.

Находим функцию v: $v' - v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$.

Находим функцию u: $u' - e^y + u \cdot 0 = y$, т. е. $u' = y - e^{-y}$, или $u = \int y \cdot e^{-y} \cdot dy$. Интегрируя по частям, находим: $u = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c$. Значит, общее решение данного уравнения:

$x = u \cdot v = (-y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c) \cdot e^y$ или $x = -y - 1 + c \cdot e^y$.

Уравнение Я. Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \; n \in R, \; n \neq 0, \; n \neq 1 \quad (2.15)$$

называется ***уравнением Бернулли***. Покажем, что его можно привести к линейному.

Если $n = 0$, то дифференциальное уравнение (2.15) — линейное, а при $n = 1$ — с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение (2.15) на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x) \quad (2.16)$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Отсюда находим $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно *z*. Решение его известно. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (2.15) к линейному. На практике дифференциальное уравнение (2.15) удобнее решать методом И. Бернулли в виде $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

2.5 Уравнение в полных дифференциалах Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y) = 0 \qquad (2.17)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции *u*(*x;y*), т. е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y).$$

В этом случае дифференциальное уравнение(2.17) можно записать в виде *du*(*x;y*) = 0, а его общий интеграл будет:

$$u(x,y) = c \qquad (2.18)$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема 2.2. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывны в некоторой области *D* плоскости *Oxy*, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (2.19)$$

Необходимость

Пусть Δ есть полный дифференциал, т. е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$$

Учитывая, что $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ имеем:

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x};\ Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Дифференцируя эти равенства по *y* и по *x*; соответственно, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$ равны между собой, получаем (2.19).

Достаточность

Пусть в области *D* выполняется условие (2.19). Покажем, что существует функция *u*(*x;y*) в области *D* такая, что

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (2.20)$$

Если в первом уравнении (2.20) зафиксировать *y* и проинтегрировать его по *x*, то получим:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)\,. \qquad (2.21)$$

Здесь произвольная постоянная $c=\varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (2.21) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию (2.21) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\int P(x,y)dx)_y+\varphi'(y)$$

Используя второе равенство (2.20), можно записать:

$$Q(x,y)=(\int P(x,y)dx)_y+\varphi'(y)$$

Отсюда

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-(\int P(x,y)dx)_y \qquad (2.22)$$

В равенстве (2.22) левая часть зависит от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx))=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx))=$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\int P(x,y)dx))=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(P)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

в силу условия (2.19).

Из равенства (2.22) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=\int(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx))dy+c\,, \text{ c - const}$$

Подставляя найденное значение для φ(у) в равенство (2.21), находим

функцию $u(x;\ y)$ такую, что $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Таким образом, при решении дифференциального уравнения вида (2.17) сначала проверяем выполнение условия (2.19). Затем, используя равенства (2.20), находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (2.18).

Пример 2.11. Решить уравнение $y' = \dfrac{5-2x}{3y^2+x^2}$

Решение: Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$$

Здесь $P(x,y)=2xy-5$, $Q(x,y)=3y^2+x^2$. Проверяем выполнение условия (2.19)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Условия (2.20) будут здесь выглядеть как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x,y)=\int(2xy-5)dx=x^2y-5x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2y-5x+\varphi(y))'_y=x^2+\varphi'(y).$$

Далее

$$3y^2+x^2=x^2+\varphi'(y),\ \varphi'(y)=3y^2,$$

$$\varphi(y)=y^3+c_1,\ u(x,y)=x^2y-5x+y^3+c_1.$$

Общим интегралом является $x^2y-5x+y^3+c_1=c_2$, или $x^2y-5x+y^3=c$, где $c=c_2-c_1$

Если условие (2.19) не выполняется, то дифференциальное уравнение (2.17) не является уравнением в полных дифференциалах.

Однако это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $t(x;y)$, называемую *интегрирующим множителем.*

Чтобы уравнение $t(x,y)\cdot P(x,y)dx+t(x,y)\cdot Q(x,y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}(t(x,y)\cdot P(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(t(x,y)\cdot Q(x,y))$$

Выполнив дифференцирование $\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot t=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot t$ приведя подобные слагаемые, получим

$$\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P-\frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q=t(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}) \qquad (2.23)$$

Для нахождения $t(x;\ y)$ надо проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение в частных производных. Решение этой задачи не простое. Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если допустить существование t как функции только одного аргумента x либо только y. Пусть, например, $t = t(x)$. Тогда уравнение (2.23) принимает вид

$$-\frac{dt}{dx}\cdot Q=t(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}),\ \text{или}\ \frac{dt}{t}=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}\cdot dx\ .$$

При этом выражение $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$ — должно зависеть только от x.

Аналогично получаем, что если $t = t(y)$ (t не зависит от x), то

$$t(y)=\left(\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\cdot dy\right), \qquad (2.24)$$

а подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

Пример 2.11.Решить уравнение $(x^2-y)\cdot dx+(x^2y^2+x)\cdot dy=0$.

Решение: Здесь $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy^2+1$; т.е. $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$

Однако,

$$-\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\frac{-1-2xy^2-1}{x^2y^2+x}=\frac{-2}{x}$$

зависит только от x.

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, выражение которого может быть получено при помощи формулы (2.24). В нашем случае получим, что

$$t(x)=\exp\left(-\int\frac{2}{x}dx\right)=\exp(-2\ln|x|)=\frac{1}{x^2}$$

Умножая исходное уравнение на $t=\dfrac{1}{x^2}$ получаем:

$$\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y^2+\frac{1}{x}\right)dy=0,$$

т.е. уравнение в полных дифференциалах! Решив его, найдем, что общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x+\frac{y}{x}+\frac{y^3}{3}=c.$$

2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Рассмотрим дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной. К ним, в частности, относятся уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y'), \tag{2.25}$$

где φ и ψ — известные функции от $y'=\dfrac{dy}{dx}$, называется *уравнением*

Лагранжа.

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (2.25) примет вид

$$y=x\cdot\varphi(p)+\psi(p). \tag{2.26}$$

Дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x \cdot \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

т.е. $p - \varphi(p) = (x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx}$, или

$$(p - \varphi(p)) \cdot \frac{dx}{dp} - x \cdot \varphi'(p) = \psi'(p). \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.27) есть линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Решив его, найдем

$$x = \lambda(p, c). \qquad (2.28)$$

Исключая параметр p из уравнений (2.26) и (2.28), получаем общий интеграл уравнения (2.25) в виде $y = \gamma(x, c)$.

Отметим, что, переходя к уравнению (2.27), мы делили на $\frac{dp}{dx}$. При этом могли быть потеряны решения, для которых $\frac{dp}{dx} = 0$, т.е.

$$p = p_0 = \text{const}.$$

Это значение p_0 является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$ (см. (2.27)).

Решение $y = x \cdot \varphi(p_0) + \psi(p_0)$ является *особым* для уравнения (2.25) (см. понятие особого решения в п. 2.2).

Уравнение Клеро

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$.

Уравнение (2.25) принимает вид

$$y = x \cdot y' + \psi(y') \qquad (2.29)$$

и называется ***уравнением Клеро.***

Положив $y' = p$, получаем:

$$y = xp + \psi(p) \qquad (2.30)$$

Дифференцируя по x, имеем:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \text{ или } (x + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

Если $\dfrac{dp}{dx}=0$, то $p = c$. Поэтому, с учетом (2.30), дифференциальное уравнение (2.29) имеет общее решение

$$y = xc + \psi(c) \tag{2.31}$$

Если $x+\psi'(p)=0$, то получаем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$x = -\psi'(p),\ y = xp + \psi(p). \tag{2.32}$$

Это решение — *особое* решение уравнения Клеро: оно не содержится в формуле общего решения уравнения.

Пример 2.12. Решить уравнение Клеро $y = xy' + y'^2$.

Решение: Общее решение, согласно формуле (2.31), имеет вид $y = cx + c^2$. Особое решение уравнения получаем согласно формулам (2.32) в виде $x = -2p$, $y = xp + p^2$.Отсюда следует: $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{4}$, т.е. $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями *высших порядков*. Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{3.1}$$

или, если это возможно, в виде, *разрешенном относительно старшей производной:*

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{3.2}$$

Будем в основном рассматривать уравнение вида (3.2): от него всегда можно перейти к (3.1).

Решением дифференциального уравнения (3.2) называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения **(3.2)** называется функция $y = \varphi(x;c_1;c_2)$, где c_1 и c_2 — не зависящие от a; произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x;\ c_1;c_2)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения c_1 и c_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\Big|_{x=x_0}=y'_0. \tag{3.3}$$

существуют единственные значения постоянных $c_1=c_1^0$ и $c_2=c_2^0$, такие, что функция $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ является решением уравнения (3.2) и удовлетворяет начальным условиям (3.3).

Всякое решение $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ уравнения (3.2), получающееся из общего решения $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, называется *частным решением.*

Решения дифференциальное уравнения (3.2), записанные в виде $\Phi(x,y,c_1,c_2)=0$, $\Phi(x,y,c_1^0,c_2^0)=0$, называются *общим и частным интегралом* соответственно.

График всякого решения дифференциального уравнения второго порядка называется *интегральной кривой.* Общее решение дифференциального уравнения (3.2) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение — одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0;\ y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y^1$.

Переписав дифференциальное уравнение(3.1) в виде

$$F\left(x,y,y',\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\cdot(1+y'^2)^{3/2}\right)=0,$$

видим, что дифференциальное уравнение второго порядка устанавливает связь между координатами точки $(x;y)$ интегральной кривой, угловым коэффициентом $k=y'$ касательной к ней и кривизной

$K = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ в точке $(x;y)$. В этом состоит геометрическое истолкование дифференциального уравнения второго порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3.3), называется *задачей Коши.*

Теорема 3.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (3.2) функция $f(x;y;y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ *ED* существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.3).

Примем теорему без доказательства.

Аналогичные понятия и определения имеют место для дифференциального уравнения *n–го порядка,* которое в общем виде записывается как

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.4}$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для дифференциального уравнения (3.4) имеют вид

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y'_0,\ y''\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \tag{3.5}$$

Общее решение дифференциального уравнения n–го порядка является функцией вида $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Решение дифференциального уравнения (3.4), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, …, $c_n = c_n^0$ называется *частным решением.*

Задача Коши для дифференциального уравнения n–го порядка: найти решение дифференциального уравнения (3.4), удовлетворяющее начальным условиям (3.5).

Проинтегрировать (решить) дифференциальное уравнение n–го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения n–го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды дифференциального уравнения высших порядков.

3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x) \tag{3.6}$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем дифференциальное уравнение первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (3.6).

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$, уравнение (3.6) можно записать в виде $dy' = f(x)dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)dx$, или $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)dx$, т.е. $y = \varphi_2(x) + c_1(x) + c_2$ - общее решение данного уравнения.

Если дано уравнение

$y^{(n)} = f(x)$, то, проинтегрировав его последовательно *n* раз, найдем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + c_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n .$$

Пример 3. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

Решение: Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1 ,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx + \int c_1 dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2 ,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 ,$$

$$y' = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1 \frac{x^3}{2} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 .$$

II. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x, y'), \tag{3.7}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (3.7) принимает вид $p' = f(x, p)$. Пусть $p = \varphi(x, c_1)$ — общее решение полученного дифференциального уравнения первого порядка. Заменяя функцию *p* на *y*', получаем дифференциальное уравнение: $y' = \varphi(x, c_1)$. Оно имеет вид (3.6). Для отыскания *y* достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (3.7) будет иметь вид $y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$. Частным случаем уравнения (3.7) является уравнение

$$y'' = f(y'), \tag{3.8}$$

не содержащее также и независимую переменную *x*. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.9}$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p', ... y^{(n)} = p^{(n-k)}$ уравнение (3.9) примет вид $F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0$. Частным случаем уравнения (3.9) является уравнение

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

С помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$ это уравнение сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример 3.1. Решить уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Решение: Полагаем $y' = p(x)$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда $p' - \dfrac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x}$, $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1 x|$, $p = c_1 x$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $y'=c_1x$, $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2$ — общее решение уравнения.

III. Рассмотрим уравнение

$$y''=f(y,y'), \tag{3.10}$$

которое *не содержит* явно *независимой переменной x*.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p=p(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y'=p$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $p=p(y(x))$:

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot p,$$

т.е. $y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$. Теперь уравнение (3.10) запишется в виде

$$\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

Пусть $p=\varphi(y,c_1)$ является общим решением этого дифференциального уравнения первого порядка. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем $y'=\varphi(y,c_1)$ — дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (3.10):

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,c_1)}=x^2+c_2 .$$

Частным случаем уравнения (3.10) является дифференциальное уравнение

$$y''=f(y).$$

Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки:

$$y''=p\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Так же поступаем при решении уравнения $F(y;y';y'';\ldots;y^{(n)})=0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y'=p$, где $p=p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$. Затем найдем

$$y'''=\frac{d}{dx}(p\cdot p'_y)=\frac{d}{dy}(p\cdot p'_y)\cdot\frac{dy}{dx}=p((p'_y)^2+pp''_{yy})\ \text{ и т.д.}$$

Замечание. Уравнение (3.8) также можно решать, применяя подстановку $y'=p$, где $p=p(y)$.

Пример 3.2. Найти частное решение уравнения $y''-(y')^2+y'(y-1)=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

Решение: Уравнение имеет вид (3.10). Положив $y'=p(y)$, $y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$ получаем:

$$p\cdot\frac{dp}{dy}-p^2+p(y-1)=0.$$

Так как $p\neq 0$ (иначе $y'=0$, что противоречит начальному условию $y'=2$), то $\dfrac{dp}{dy}-p+y-1=0$ — получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Проведем решение полученного линейного дифференциального уравнения методом Бернулли (п. 2.4). Полагаем $p=u\cdot v$. Имеем: $u'v+uv'-uv+y-1=0$, или $u'v+u(v'-v)=1-y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v'-v=0$. Тогда $\dfrac{dv}{v}=dy$, $v=e^y$. Получаем:

$u'\cdot e^y+u\cdot 0=1-y$, т.е. $du-(1-y)\cdot e^{-y}dy$.

Интегрируя это равенство, находим, что $u=-(1-y)\cdot e^{-y}+e^{-y}+c_1$. Следовательно,

$$p = uv = ((-1+y)\cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1)\cdot e + y \text{ или } p = c_1 \cdot e^y + y.$$

Заменяя p на $y' = c_1 \cdot e^y + y$, получаем: $y' - c_1 \cdot e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим c_1:

$$2 = c_1 e^2,\ c_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим С2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$. Таким образом, $y = 2e^x$ — частное решение данного дифференциального уравнения.

3.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков
Основные понятия

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям. Уравнение вида

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + ... + b_n(x)y = g(x), \quad (3.11)$$

где $b_0(x) \pm 0$, $b_0(x),..., b_n(x), g(x)$ — заданные функции (от x), называется *линейным дифференциальным уравнением n–го порядка*.

Оно содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени. Функции $b_0(x), b_1(x),..., b_n(x)$ – называются *коэффициентами* уравнения (3.11), а функция $g(x)$ — его *свободным членом*.

Если свободный член $g(x) = 0$, то уравнение (3.11) называется *линейным однородным* уравнением; если $g(x) \neq 0$, то уравнение (3.11) называется *неоднородным*.

Разделив уравнение (3.11) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x),..., \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x), \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (3.11) в *приведенном* виде:

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + b_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x). \quad (3.12)$$

Далее будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения вида (3.12) и считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (3.12) являются непрерывными функциями (на некотором интервале $(a;b)$). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения (3.12) (см. теорему. 3.1).

3.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3.13}$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 3.2. Если функция $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (3.13), то решением этого уравнения является также функция

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3.14}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Подставим функцию $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ и ее производные в левую часть ЛОДУ (3.13). Получаем:

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$= c_1y_1'' + c_2y'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$= c_1(y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 =$$
$$= c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0$$

так как функции y_1 и y_2 — частные решения уравнения (3.13) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = c_1y_1 + c_2y_2$ также является решением
уравнения (3.13).

Из теоремы 3.2, как следствие, вытекает, что если y_1 и y_2 — решения уравнения (3.13), то решениями его будут также функции $y = y_1 + y_2$ и $y = c \cdot y_1$.

Функция (3.14) содержит две произвольные постоянные и является решением уравнения (3.13). Может ли она являться общим решением уравнения (3.13)?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале (*a;b*), если равенство

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \tag{3.15}$$

где $a_1, a_2 \in R$, выполняется тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = 0$. Если хотя бы одно из чисел a_1 или a_2 отлично от нуля и выполняется равенство (3.15), то функции y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми* на (*a;b*).

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. для всех $x \in$ (*a;b*) выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, или $y_1 = y_2 \lambda$, λ – const.

Например, функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ — линейно зависимы: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = \text{const}$; функции y_1 и $y_3 = e^{2x}$; линейно независимыми: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq \text{const}$; функция $y_4 = \sin x$ и $y_5 = \cos x$ являются линейно независимыми: равенство $a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0$ выполняется для всех $x \in R$ лишь при $a_1 = a_2 = 0$ (или $\frac{y_4}{y_5} = \text{tg} x \neq \text{const}$).

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый *определитель Вронского* или *вронскиан* (Ю.

Вронский — польский математик).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на (*a;b*), то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то в равенстве (3.15) значение a_1 или a_2 отлично от нуля. Пусть $a_1 \neq 0$, тогда $y_1 = -\frac{a_2}{a_1} y_2$; поэтому для любого *x*∈ (*a;b*).

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{a_2}{a_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{a_2}{a_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 3.4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые
решения уравнения (3.13) на (*a;b*), то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Доказательство теоремы опустим.

Из теорем 3.3 и 3.4 следует, что *вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала* (*a;b*) *тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.*

Совокупность любых двух линейно независимых на интервале (*a;b*) частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет ***фундаментальную систему решений*** этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как их линейная комбинация:

$$y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x).$$

Пример 3.4 Частные решения $y_1 = \sin x$; и $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$; и $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество!) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_5 = 0$ и $y_6 = \cos x$ — не образуют.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция (3.14) будет общим решением уравнения (3.13).

Теорема 3.5 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (3.13) образуют на интервале (*a;b*) фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{3.16}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Согласно теореме 3.2, функция (3.16) является решением уравнения (3.13). Остается доказать, что это решение общее, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = (x_0). \tag{3.17}$$

Подставив начальные условия (3.17) в решение (3.14), получим систему уравнений,

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y_0' = c_1' y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$ с неизвестным c_1 и c_2.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

равен значению вронскиана $W(x)$ при $x = x_0$ Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $(a;b)$ и $x \in (a;b)$ то, согласно теореме 3.4, $W(x_0) = 0$. Поэтому система уравнений имеет единственное решение:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

$$c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(\mathrm{x}_0) & y_0 \\ y_1'(\mathrm{x}_0) & y_0' \end{vmatrix}.$$

Решение $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу теоремы единственности) уравнения (3.13), удовлетворяющим начальным условиям (3.17). Теорема доказана.

Пример 3.4. На основании теоремы 3.5 общим решением уравнения $y'' + y = 0$ (см. пример 3.4) является функция $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

3.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Полученные результаты можно распространить на линейные однородные дифференциальные уравнения n–го порядка, имеющие вид

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) y = 0. \quad (3.18)$$

1. Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots y_n = y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (3.18), то его решением является и функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

2. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми* на $(a;b)$, если равенство $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n$ выполняется лишь в

случае, когда все числа $a_i = 0\,(i = 1, 2, ..., n)$; в противном случае (если хотя бы одно из чисел a_i не равно нулю) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ — *линейно зависимы*.

3. Определитель Вронского имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

4. Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (3.18) образуют *фундаментальную систему решений* на $(a;b)$, если ни в одной точке этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т. е. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$.

5. Общее решение ЛОДУ (3.18) имеет вид $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, где $c_i\ (i = 1, ..., n)$ — произвольные постоянные, y_i — частные решения уравнения (3.18), образующие фундаментальную систему.

Пример 3.5. Показать, что функции $y_1 = e^x$, $y_2 = x \cdot e^x$, $y_3 = x^2 \cdot e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого ЛОДУ третьего порядка (дополнительно: составить это уравнение).

Решение: Найдем $W(x)$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2 \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}\cdot(4x+2-4x)=2e^{3x}$$

Ясно, что $W(x) \neq 0$ для всех $x \in R$. Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ третьего порядка. В общем виде ЛОДУ третьего порядка выглядит так:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 .$$

Подставив функции y_1, y_2, y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $a_1(x), a_2(x), a_3(x) = 0$. Решая ее, получим ЛОДУ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; его общее решение:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x .$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются *ЛОДУ* с *постоянными коэффициентами*.

Пусть дано ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 , \qquad (4.1)$$

где p и q постоянны.

Для нахождения общего решения уравнения (4.1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 3.5).

Будем искать частные решения уравнения (4.1) в виде $y = e^{kx}$, где k — некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для *y, y' и y'' в* уравнение (4.1), получим: $k^2 \cdot e^{kx} + p - k \cdot e^{kx} + \theta \cdot e^{kx} = 0$, т. е. $e^{kx}(k^2 + pk + \theta) = 0$, или

$$k^2 + pk + \theta = 0 (e^{kx} \neq 0). \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (4.1) (для его составления достаточно в уравнении (4.1) заменить y'', y' *и* y соответственно на, k^2,k и 1).

При решении характеристического уравнения (4.2) возможны следующие три случая.

Случай 1. Корни k_1 и k_2 уравнения (4.2) действительные и различные:

$$k_1 \neq k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q \succ 0 \right).$$

В этом случае частными решениями уравнения (4.1) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), т. к. их вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} =$$
$$= e^{(k_1 + k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.1), согласно формуле (3.16), имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}. \tag{4.3}$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Решаем его: k_1= 2, k_2 = 3. Записываем общее решение данного уравнения: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (формула (4.3)).

Случай 2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (4.2) действительные и равные: $k_1 = k_2 \left(D = \dfrac{p^2}{4} - q = 0, \;\; k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} \right)$.

В этом случае имеем лишь одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$. Покажем, что наряду с y_1 решением уравнения (4.1) будет и $y_2 = xe^{k_1 x}$. Действительно, подставим функцию y_2 в уравнение (4.1). Имеем:

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = (xe^{k_1 x})'' + p(xe^{k_1 x})' + q(xe^{k_1 x}) =$$
$$= (2k_1 e^{k_1 x} + xk_1^2 e^{k_1 x}) + p(e^{k_1 x} + xk_1 e^{k_1 x}) + q(e^{k_1 x}) =$$
$$= e^{k_1 x}(2k_1 + k_1^2 x + p + pxk_1 + qx) =$$
$$= e^{k_1 x}(x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1))$$

Но $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, т.к. k_1 есть корень уравнения (4.2); $p + 2k_1 = 0$, т. к. по условию $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$.

Поэтому $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, т. е. функция $y_2 = xe^{k_1 x}$ является решением уравнения (4.1).

Частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = xe^{k_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений: $W(x) = e^{2k_1 x} \neq 0$. Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (4.1) имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 xe^{k_1 x}. \qquad (4.4)$$

Случай 3. Корни k_1 и k_2 уравнения (4.2) комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i \left(D = \dfrac{p^2}{4} - q \prec 0, \; \alpha = -\dfrac{p}{2} \; \beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}} \succ 0 \right)$.

В этом случае частными решениями уравнения (4.1) являются функции $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x}$. Согласно формулам Эйлера (см. Часть 1, п. 27.3) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ имеем

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x .$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (4.1). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \tilde{y}_1 \text{ и } \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \tilde{y}_2 .$$

Функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ являются решениями уравнения (4.1), что следует из свойств решений ЛОДУ второго порядка (см. теорему 3.2).Эти решения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ образуют фундаментальную систему решений, так как $W(x) \neq 0$ (убедитесь самостоятельно!). Поэтому общее решение уравнения (4.1) запишется в виде $y_1 = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, или

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) . \tag{4.5}$$

Пример 4.1. Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение: Имеем: $k^2 - 6k + 25 = 0$, $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$. По формуле (4.5) получаем общее решение уравнения:

$$y = e^{3x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) .$$

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (4.1) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (4.2) и использованию формул (4.3) –(4.5) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

4.2. Интегрирование ЛОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения *ЛОДУ n–го порядка* ($n > 2$) с *постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0 \tag{4.6}$$

где $p_i, i = \overline{1,n}$ — числа, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сформулируем необходимые утверждения и рассмотрим примеры.

Частные решения уравнения (4.6) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k — постоянное число.

Характеристическим для уравнения (4.6) является алгебраическое уравнение n–го порядка вида

$$k^{(n)} + p_1 k^{(n-1)} + p_2 k^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0 \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) имеет, как известно, n корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Замечание. Не все из корней уравнения (4.7) обязаны быть различными. Так, в частности, уравнение $(к - 3)^2 = 0$ имеет два равных корня:

$k_1 = k_2 = 3$. В этом случае говорят, что корень один ($k = 3$) и имеет *кратность* $m_k = 2$. Если кратность корня равна единице: $m_k = 1$, его называют *простым*.

Случай 1. Все корни уравнения (4.7) действительные и простые (различные). Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, …, $y_n = e^{k_n x}$ являются частными решениями уравнения (4.6) и образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы). Поэтому общее решение уравнения (4.6) записывается в виде

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}.$$

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Следовательно, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ — общее решение данного уравнения.

Случай 2. Все корни характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому простому корню $к$ соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m > 1$ соответствует m частных решений: e^{kx}, xe^{kx},x^2e^{kx}…,$x^{m-1}e^{kx}$

Пример 4.3. Решить уравнение $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k+2)(k-1)^3 = 0$$

имеет корни k_1 = - 2, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 1. Следовательно, $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$ — общее решение уравнения.

Случай 3. Среди корней уравнения (4.7) есть комплексно–сопряженные корни. Тогда каждой паре $\alpha \pm \beta i$ простых комплексно–сопряженных корней соответствует два частных решения $e^{ax} cos\ \beta x$ и e^{ax} $sin\beta x$, а каждой паре $\alpha \pm \beta i$ корней кратности $m > 1$ соответствуют $2m$ частных решений вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Эти решения, как можно доказать, образуют фундаментальную систему решений.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Решение: Характеристическое уравнение

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+i)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

имеет корни k_1 = –1, k = i, k_3 = – i, k_4 = i, k_5 = – i. Следовательно, $y = c_1 e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 x\cdot\cos x + c_5 x\cdot\sin x$ — общее решение уравнения.

5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{5.1}$$

где $a_1(x)$,$a_2(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные на (a; b) функции.

Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{5.2}$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (5.1), называется ***соответствующим*** ему ***однородным уравнением***.

Теорема 5.1 (структура общего решения ЛНДУ). Общим решением

y
уравнения (5.1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\overset{\frown}{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ соответствующего однородного уравнения (5.2),т.е.

$$y = y^* + \overset{\frown}{y}\,. \tag{5.3}$$

Убедимся, что функция (5.3) — решение уравнения (5.1). Так как y^* есть решение уравнения (5.1), а $\widehat{y}$ — решение уравнения (5.2), то

$(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x)$ и

$(\widehat{y})'' = a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y} = 0$

В таком случае имеем:

$$(y^* + \widehat{y})'' + a_1(x)(x^* + \widehat{y})' + a_2(y^* + \widehat{y}) =$$
$$= ((y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^*)$$

Это означает, что функция $(y^* + y)$ является решением уравнения (5.1). Покажем теперь, что функция

$$y = y^* + c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{5.4}$$

является общим решением уравнения (5.1). Для этого надо доказать, что из решения (5.4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_0'\,. \tag{5.5}$$

Продифференцировав функцию (5.4) и подставив начальные условия (5.5) в функцию (5.4) и ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0 - (y^*)'(x_0) \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2. Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = x_0$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), т. е. $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$. Решение $y = y^* + c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ является частным решением уравнения (5.1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (5.5). Теорема доказана.

5.2. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ (5.1). Его общим решением является функция (5.3), т. е.

$$y = y^* + \hat{y}.$$

Частное решение y^* уравнения (5.1) можно найти, если известно общее решение y соответствующего однородного уравнения (5.2), *методом вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа), состоящим в следующем. Пусть $\hat{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ — общее решение уравнения (5.2).

Заменим в общем решении постоянные c_1 и c_2 неизвестными функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^* = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \qquad (5.6)$$

была решением уравнения (5.1). Найдем производную

$$y^* = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Подберем функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ так, чтобы

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \qquad (5.7)$$

Тогда

$$(y^*)' = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x),$$

$$(y^*)'' = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Подставляя выражение для $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в уравнение (5.1), получим:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_1(x)\cdot y_1''(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)+c_2(x)\cdot y_2''(x)+$$
$$+a_1(x)[c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)]+a_2(x)[c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)]=$$
$$=f(x)$$

или

$$c_1(x)\cdot[y_1''(x)+a_1(x)\cdot y_1'(x)+a_2(x)\cdot y_1(x)]+$$
$$+c_2(x)\cdot[y_2''(x)+a_1(x)\cdot y_2'(x)+a_2(x)\cdot y_2(x)]+$$
$$+c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x)$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (5.2), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а потому

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \tag{5.8}$$

Таким образом, функция (5.6) будет частным решением y^* уравнения (5.1), если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (5.7) и (5.8):

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases} \tag{5.9}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (5.2). Поэтому система (5.9) имеет единственное решение: $c_1'(x)=\varphi_1(x)$ и $c_2'(x)=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — некоторые функции от x. Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем по формуле (5.6) составляем частное решение уравнения (5.1).

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение: Найдем общее решение y соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем: $k^2 + 1 = 0$, $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Следовательно, $\widehat{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного уравнения. Оно ищется в виде (5.6):

$$y^* = c_1(x) \cdot \cos(x) + c_2(x) \cdot \sin(x).$$

Для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему уравнений вида (5.9):

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \cos x + c_2'(x) \cdot \sin x = 0 \\ c_1'(x) \cdot (-\sin x) + c_2'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\mathrm{tg}\, x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\mathrm{tg}\, x, \; c_1(x) = \int (-\mathrm{tg} x) dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \; c_2(x) = \int 1 \cdot dx = x.$$

Запишем частное решение данного уравнения: $y^* = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x.$$

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

Теорема 5.2 (о наложении решений). Если правая часть уравнения (5.1) представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* — частные решения уравнений $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением данного уравнения.

Действительно,

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^* + y_2^*)' + a_2(x) \cdot (y_1^* + y_2^*) =$$
$$= ((y_1^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^*)' + a_2(x) \cdot y_1^*) + ((y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_2^*)' +$$
$$+ a_2(x) \cdot y_2^*) = f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

5.3. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим *ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами,* т. е. уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{5.10}$$

где p и Θ — некоторые числа.

Согласно теореме 5.1, общее решение уравнения (5.10) представляет собой сумму общего решения y соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (5.10) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (п. 5.2).

Для уравнений с постоянными коэффициентами (5.10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (5.10) имеет так называемый «специальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

или

II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов,* состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (5.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (5.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (5.10) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha \in R, P_n(x)$ — многочлен степени n. Уравнение (5.10) запишется в виде

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \tag{5.11}$$

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \tag{5.12}$$

где r — число, равное **кратности** $\boldsymbol{\alpha}$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + \theta = 0$ (т. е. r — число, показывающее, сколько раз a является корнем уравнения $k^2 + pk + \theta = 0$), а $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ - многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами $(i = 1,2,\ldots,n)$.

а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

т. е. $\alpha \neq k_{1,2}$. Следовательно,

$$r = 0, \; y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \; (y^*)' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha,$$
$$(y^*)'' = Q_n''(x) \cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha^2.$$

После подстановки функции y^* и ее производных в уравнение (5.11), сокращения на e^{ax}, получим:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x) = P_n(x) \tag{5.13}$$

Слева — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа — многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему (n+1) алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

б) Пусть α является однократным (простым) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + \theta = 0$, т. е. $a = k_1 \neq k_2$

В этом случае искать решение в форме $y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ нельзя, т. к. $\alpha^2 + p\alpha + \theta = 0$, и уравнение (5.13) принимает вид

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) = P_n(x)$$

В левой части — многочлен степени (n — 1), в правой части — многочлен степени n. Чтобы получить тождество многочленов в решении y^*, нужно иметь многочлен степени (n + 1). Поэтому частное решение y^* следует искать в виде $y^* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ (в равенстве (5.12) положить r = 1).

в) Пусть α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + \theta = 0$, т.е. $a = k_1 = k_2$. В этом случае $\alpha^2 + p\alpha + \theta = 0$ и $2\alpha + p = 0$, а поэтому уравнение (5.13) принимает вид $Q_n'(x) = P_n(x)$.

Слева стоит многочлен степени n - 2. Понятно, чтобы иметь слева многочлен степени n, частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}.$$

(в равенстве (5.12) положить r = 2).

Случай 2. Правая часть (5.10) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x),$$

где $P_n(x)$ и $\Theta_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, α и β — действительные числа. Уравнение (5.10) запишется в виде

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$$
(5.14)

Можно показать, что в этом случае частное решение y^* уравнения (5.14) следует искать в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x), \qquad (5.15)$$

где r — число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l — наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $l = \max(n,m)$.

Замечания.

1. После подстановки функции (5.15) в (5.14) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.
2. Форма (5.15) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x)\equiv 0$ или $\Theta_m(x)\equiv 0$.
3. Если правая часть уравнения (5.10) есть сумма функций вида I или II, то для нахождения y^* следует использовать теорему 5.2 о наложении решений.

Пример 5.1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корень $k_1 = 1$ кратности 2. Значит, $\widehat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x - 4 = (x-4)e^{0\cdot x}$ есть формула вида $P_1(x) \cdot e^{0\cdot x}$, причем α=0, не является корнем характеристического уравнения: $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле (5.12), частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0\cdot x}$, т. е. $y^* = Ax + B$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)' = 0$. Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$-2A+Ax+B=x-4$, или $Ax+(-2A+B)-x-4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A=1 \\ -2A+B=-4 \end{cases}$$

Отсюда A = 1, *B* = –2. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^*=x-2$. Следовательно,

$$y=(\widehat{y}+y^*)=c_1\cdot e^x+c_2 x\cdot e^x+x-2$$

— искомое общее решение уравнения.

Пример 5.2. Решить уравнение $y''-4y'+13y=40\cdot\cos 3x$.

Решение: Общее решение ЛНДУ имеет вид $y=\widehat{y}+y^*$. Находим решение однородного уравнения $\widehat{y}$: $y''-4y'+13y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$ имеет корни $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$. Следовательно, $\widehat{y}=e^{2x}\cdot(c_1\cdot\cos 3x+c_2\cdot\sin 3x)$.

Находим частное решение y^*. Правая часть ЛНДУ в нашем случае имеет вид $f(x)=e^{0\cdot x}\cdot(40\cos 3x+0\cdot\sin 3x)$. Так как $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\alpha+\beta i = 3i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Согласно формуле (5.15), частное решение ищем в виде $y^*=A\cos 3x+3B\sin 3x$. Подставляем y^* в исходное уравнение. Имеем:

$$(y^*)'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,$$

$$(y^*)''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$$

Получаем:

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x-4(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+13(A\cos 3x+$$
$$+3B\sin 3x)$$

или

$$(-9A-12B+13A)\cos 3x+(-9B+12A+13B)\sin 3x=$$
$$\vdots \qquad =40\cos 3x+0\cdot\sin 3x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A = 1$, $B = -3$. Поэтому $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$. И, наконец, $y = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ — общее решение уравнения.

Пример 5.3. (*Для самостоятельного решения.*) Для предложенных дифференциальных уравнений получить вид частного решения:

а) $y'' = 3y' + 2y = 5 + e^x$;

б) $y'' - 2y' + y = 2$;

в) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$;

г) $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$;

д) $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

Ответы:

а) $A + x \cdot B \cdot e^x$;

б) A;

в) $x(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\cos 7x + D\sin 7x$;

г) $(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$;

д) $x(Ax^2 + Bx + C) + D\cos x + E\sin x$.

5.4. Интегрирование ЛНДУ n-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n–го ($n > 2$) порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$,..., $a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $(a;b)$. Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

Теорема 5.3 (о структуре общего решения ЛНДУ n–го порядка). Общее решение y ЛНДУ n–го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т. е. $y = y^* + \tilde{y}$.

Частное решение y^* ЛНДУ n–го порядка может быть найдено, если известно общее решение y однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде

$$y^* = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x) + \ldots + c_n(x)\cdot y_n(x),$$

где $y_i(x), i = \overline{1}, \overline{n}$ — частные решения, образующие фундаментальную систему, однородного уравнения.

Система уравнений для нахождения неизвестных $c_i(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + \ldots + c_n'y_n = 0, \\ c_1'y' + c_2'y_2' + c_3'y_3' + \ldots + c_n'y_n' = 0, \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \ldots + c_n'y_n'' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + c_3'y_3^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Однако для ЛНДУ n–го порядка с *постоянными коэффициентами*, правая часть которого имеет специальный вид, частное решение y^* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Метод подбора частного решения y^* уравнения

$$y^{(n)} + p_1\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x),$$

где p_i — числа, а правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, описанный в п. 5.3 для случая $n = 2$, переносится без всякого изменения и на случай уравнения, имеющего порядок $n > 2$.

Пример 5.4. Решить уравнение $y^{IV} - y' = 2x$.

Решение: Находим $\widehat{y}$:

$$k^4 - k = 0,\ \ k(k-1)\cdot(k^2+k+1) = 0,$$
$$k_1 = 0,\ \ k_2 = 1, k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$\widehat{y} = c_1 + c_2 e^x + e^{(-\frac{1}{2x})}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Находим

$$y^* : f(x) = 2x(e^{0\cdot x}\cdot P_1(x)),\ r = 1,\ y^* = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx,$$

отсюда

$$(y^*)' = 2Ax + B,\ (y^*)'' = 2A,\ (y^*)''' = 0,\ (y^*)^{IV} = 0$$

Тогда $-(2Ax+B)=2x$. Отсюда $A = -1$, $B = 0$ и получаем $y^* = -x^2$: Следовательно, функция

$$y = (y^* + \widehat{y}) = c_1 + c_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - x^2$$

является общим решением уравнения.

6. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций I порядка; отыскания векторных линий поля и других) нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы дифференциального уравнения первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, следующий:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ .... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

Система дифференциального уравнения первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \quad (6.1)$$

называется *нормальной системой дифференциального уравнения*. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (6.1).

Так, система трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y, z, t, x', y', z'), \\ .... \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x, y, z, t, x', y', z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных: $\dfrac{dx}{dt} = u$, $\dfrac{dy}{dt} = v$, $\dfrac{dz}{dt} = w$ приводится к нормальной системе дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dz}{dt} = w, \\ \dfrac{du}{dt} = F_1(x, y, z, t, u, v, w), \\ \dfrac{dv}{dt} = F_2(x, y, z, t, u, v, w), \\ \dfrac{dw}{dt} = F_3(x, y, z, t, u, v, w) \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x, y, y', y'')$ путем замены $y' = p$, $y'' = p' = \theta$ сводится к нормальной системе дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = q \\ q' = f(x, y, p, q) \end{cases}$$

Из сказанного выше следует полезность изучения именно нормальных систем.

Решением системы (6.1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (6.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0 \tag{6.2}$$

Задача Коши для системы (6.1) ставится следующим образом: найти решение системы (6.1), удовлетворяющее начальным условиям (6.2).

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 6.1 (Коши). Если в системе (6.1) все функции $f_i(x; y_1, \ldots, y_n)$

непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D((n + 1)–мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ...y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$,…, $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (6.2).

Меняя в области D точку M_0 (т. е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = (\varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n)..., y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, ...c_n).$$

Это решение является *общим*, если по заданным начальным условиям (6.2) можно однозначно определить постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x, c_1, c_2, ...c_n) = y_1^0, \\ .... \\ \varphi_n(x, c_1, c_2, ...c_n) = y_n^0 \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных c_1, c_2 ,..., c_n, называется *частным решением системы* (6.1).

6.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений является *метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка*. (Обратная задача — переход от дифференциального уравнения к системе рассмотрена выше на примере.) Техника этого метода основана на следующих соображениях.

Пусть задана нормальная система (6.1). Продифференцируем по x любое, например, первое, уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ... \frac{dy_n}{dx}$ из системы (6.1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot f_n,$$

или, коротко,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots y_n)$$

Продифференцировав полученное равенство еще раз и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx},\ldots\frac{dy_n}{dx}$ из системы (6.1), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\ldots y_n)$$

Продолжая этот процесс (дифференцируем — подставляем — получаем), находим:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots y_n).$$

Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\ldots y_n),\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots y_n),\\ \frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\ldots y_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots y_n)\end{cases}\qquad(6.3)$$

Из первых (n — 1) уравнений системы (6.3) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через x, функцию y_1 и ее производные $y_1', y_1'', y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}), \\ .... \\ y_n = \psi_n(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{6.4}$$

Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (6.3). Получим одно дифференциальное уравнение n–го порядка относительно искомой функции $y_1 : \dfrac{d^n y_1}{dx} = \varphi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)})$. Пусть его общее решение есть $y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n)$.

Продифференцировав его (n — 1) раз и подставив значения производных $y_2, y_3, ..., y_n : y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (6.4), найдем функции $y_2, y_3, ..., y_n$:

$$y_2 = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n), ..., y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n).$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - 3z \end{cases}$$

Решение: Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство: $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$, $y'' - 4y' + 6y = 9z$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3}. \tag{6.5}$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3}$$

т. е. $y'' - y' - 6y = 0$. Получили одно ЛОДУ второго порядка. Решаем его: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ и $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ — общее решение уравнения. Находим функцию *z*. Значения *y* и $y' = (c_1e^{-2x} + c_2e^{3x})' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}$ подставляем в выражение *z* через *y и y'* (формула (6.5)). Получим:

$$z = c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, $z = c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}$.

Замечание. Систему уравнений (6.1) можно решать *методом интегрируемых комбинаций*. Суть метода состоит в том, что посредством арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т. е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Проиллюстрируем технику этого метода на следующем примере.

Пример 6.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$$

Решение: Сложим почленно данные уравнения: $x' + y' = x + y + 2$ или $(x + y)' = (x + y) + 2$. Обозначим $x + y = z$. Тогда имеем $z' = z + 2$.

Решаем полученное уравнение:

$$\frac{dz}{z+2} = dt, \quad \ln(z+2) - \ln c_1 = t, \quad \frac{z+2}{c_1} = e^t, \quad z + 2 = c_1e^t \text{ или}$$

$x + y = c_1e^t - 2$.

Получили так называемый *первый интеграл системы*. Из него можно выразить одну из искомых функций через другую, тем самым уменьшить на единицу число искомых функций. Например, $y = c_1e^t - 2 - x$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$x' = c_1e^t - 2 - x + 1,\ \text{т.е.}\ x' + x = c_1e^t - 1.$$

Найдя из него x (например, с помощью подстановки $x = uv$), найдем и y.

Замечание. Данная система «позволяет» образовать еще одну интегрируемую комбинацию: $x' - y' = y - x$, т. е. $(x - y)' = -(x - y)$. Положив $x - y = p$, имеем: $p' = -p$, или $\dfrac{dp}{p} = -dt$, $\ln p - \ln c_2 = -t$, $p = c_2e^{-t}$ или $x - y = c_2e^{-t}$. Имея два первых интеграла системы, т. е. $x + y = c_1e^t - 2$ и $x - y = c_2e^{-t}$, легко найти (складывая и вычитая первые интегралы), что $x = \dfrac{1}{2}c_1e^t + \dfrac{1}{2}c_2e^{-t} - 1$, $x = \dfrac{1}{2}c_1e^t - \dfrac{1}{2}c_2e^{-t} - 1$.

6.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования нормальной системы уравнений (6.1) в случае, когда она представляет собой *систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*, т. е. систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2, *и* y_3:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases} \tag{6.6}$$

где все коэффициенты a_{ij} (i , j = 1,2,3) — постоянные. Будем искать частное решение системы (6.6) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, \; y_2 = \beta \cdot e^{kx}, \; y_2 = \gamma \cdot e^{kx} \tag{6.7}$$

где α, β, γ, k — постоянные, которые надо подобрать (найти) так, чтобы функции (6.7) удовлетворяли системе (6.6).

Подставив эти функции в систему (6.6) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Систему (6.8) можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен – нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) называется *характеристическим уравнением* системы (6.6). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: κ_1, κ_2, κ_3. Для каждого корня k_i (i = 1, 2, 3) напишем систему (6.8) и определим коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (один из коэффициентов можно считать равным единице). Таким образом, получаем:

для корня k_1 частное решение системы (6.6):

$$y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}, y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{k_1 x};$$

для корня $k_2 - y_1^{(2)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}, y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{k_2 x}$;

для корня $k_3 - y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{k_3 x}, y_2^{(3)} = \beta_3 e^{k_3 x}, y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{k_3 x}$

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему, общее решение системы (6.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 a_1 e^{k_1 x} + c_2 a_1 e^{k_1 x} + c_3 a_3 e^{k_3 x}, \\ y_2 &= c_1 \beta_1 e^{k_1 x} + c_2 \beta_2 e^{k_2 x} + c_3 \beta_3 e^{k_3 x}, \\ y_3 &= c_1 \gamma_1 e^{k_1 x} + c_2 \gamma_2 e^{k_2 x} + c_3 \gamma_2 e^{k_2 x} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Пример 6.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + y_2 \end{cases}$$

Решение: Характеристическое уравнение (6.9) данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix}$$

или $1 - 2k + k^2 - 4 = 0$, $k^2 - 2k - 3 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$ Частные решения данной системы ищем в виде $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$ и $y_1^{(2)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$.

Найдем α_i и b_i (i = 1,2). При $k_1 = -1$ система (6.8) имеет вид

$$\begin{cases} (1-(-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -4\alpha_1 + (1+(-1))\beta_1 = 0 \end{cases},$$

т. е.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\alpha_1 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим a_1=1, тогда β_1 = 2. Получаем частные решения

$$y_1^{(1)} = e^{-x} \text{ и } y_2^{(1)} = 2e^{-x}$$

При k_2 = 3 система (6.8) имеет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Положим a_2 = 1, тогда β_2 = – 2. Значит, корню k_2 = 3 соответствуют частные решения:

$$y_1^{(2)} = e^{3x} \text{ и } y_2^{(2)} = -2e^{3x}$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (6.10), запишется в виде: $y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, $y_2 = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x}$.

Случай 2. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, k_3– Вид частных решений в этой ситуации определяют так же, как и в случае 1.

Замечание. Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации (п. 4.1, случай 3), применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cdot \cos bx$, $e^{ax} \cdot \sin bx$;. Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения (можно показать, что они тоже являются решениями уравнения). При этом понятно, что комплексно–сопряженный корень $k_2 = a - ib$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Пример 6.3. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3 \end{cases},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(0) = 7, y_2(0) = 2, y_3(0) = 1.$$

Решение: составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-k)\cdot\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(1-k)(k^2-2k+4)-(k-1)=0, \quad (1-k)(k^2-2k+5)=0,$

$k_1 = 1, \; k_2 = 1+2i, \; k_3 = 1-2i.$

Для $k_1 = 1$ получаем:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1 + \beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0 \\ -\alpha_1 + 0\cdot\beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ 0\cdot\alpha_1 + 3\beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0 \end{cases}$$

(см. (6.8)). Отсюда находим: $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ (положили), $\gamma_1 = -1$. Частное решение системы: $y_1^{(1)} = e^x, y_2^{(1)} = 0, y_3^{(1)} = -e^x$. Для $k_2 = 1+2i$ получаем (см. (6.8)):

$$\begin{cases}-2i\alpha_2+\beta_2=0\\ -\alpha_2-2i\beta_2-\gamma_2=0\\ 3\beta_2-2i\gamma_2=0\end{cases}$$

Отсюда находим: $\alpha_2 = 1$ (положили), $\beta_2 = 2i$, $\gamma_2=3$. Частное комплексное решение системы: $y_1^{(2)}=e^{(1+2i)x}$, $y_2^{(2)}=ie^{(1+2i)x}$, $y_3^{(2)}=3e^{(1+2i)x}$.

В найденных решениях выделим действительную (Re) и мнимую (Im) части:

$y_1^{(2)}=e^{(1+2i)x}=e^x(\cos 2x+i\sin 2x)$,

$\operatorname{Re} y_1^{(2)}=e^x\cos 2x$, $\operatorname{Im} y_1^{(2)}=e^x\sin 2x$;

$y_2^{(2)}-2ie^{(1+2i)x}=e^x(2i\cos 2x-2\sin 2x)$,

$\operatorname{Re} y_2^{(2)}=-2e^x\sin 2x$, $\operatorname{Im} y_2^{(2)}=2e^x\cos 2x$;

$y_3^{(2)}=3e^{(1+2i)x}=e^x(3\cos 2x+i3\sin 2x)$,

$\operatorname{Re} y_3^{(2)}=3e^x\cos 2x$, $\operatorname{Im} y_3^{(2)}=3e^x\sin 2x$.

Как уже отмечено, корень $k_3=1-2i$ приведет к этим же самым решениям. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$y_1=c_1e^x+c_2e^x\cos 2x+c_3e^x\sin 2x$$

$$y_1=c_1\cdot 0-2c_2e^x\sin 2x+2c_3e^x\cos 2x$$

$$y_1=-c_1e^x+3c_2e^x\cos 2x+3c_3e^x\sin 2x$$

Выделим частное решение системы. При заданных начальных условиях получаем систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases}7=c_1+c_2+0,\\ 2=0-0+2c_3,\Rightarrow c_1=5, c_2=2, c_3=1\\ 1=-c_1+3c_2+0\end{cases}$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y_1 = 5e^x + 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x\,,$$
$$y_2 = -4e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x\,,$$
$$y_3 = -5e^x + 6e^x \cos 2x + 3e^x \sin 2x\,.$$

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет корень k кратности $m(m = 2{,}3)$. Решение системы, соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

а) если m=2, то $y_1 = (A + Bx)e^{kx}$, $y_2 = (C + Dx)e^{kx}$, $y_3 = (E + Fx)e^{kx}$;

б) если $m = 3$, то $y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}$, $y_2 = (D + Ex + Fx^2)e^{kx}$; $y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}$.

Это решение зависит от m произвольных постоянных. Постоянные $A,B,C,\ldots ,N$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (6.6).

Пример 6.4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(1 - k)(2 - 2k - k + k^2 - 1) - 1(-2 + k + 1) = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$. Корню $k_1 = 2$ соответствует система (см. (6.8)):

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ -\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \alpha - 1 - \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\alpha_1 = 1$. Получаем одно частное решение исходной системы: $y_1^{(1)} = e^{2x}$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = e^{2x}$. Двукратному корню $k = k_2 = k_3 = 1$ ($m = 2$) соответствует решение вида $y_1^{(2,3)} = (A + Bx)e^x$, $y_2^{(2,3)} = (C + Dx)e^x$, $y_3^{(2,3)} = (E + Fx)e^x$

Подставляем эти выражения (решения) в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} B \cdot e^x + (A + Bx)e^x = (A + Bx)e^x - (C + Dx)e^x + (E + Fx)e^x \\ D \cdot e^x + (C + Dx)e^x = (A + Bx)e^x - (C + Dx)e^x + (E + Fx)e^x \\ F \cdot e^x + (E + Fx)e^x = -(C + Dx)e^x + 2(E + Fx)e^x \end{cases}$$

или, после сокращения на $e^x \neq 0$ группировки,

$$\begin{cases} (D - F)x + B + C - E = 0 \\ (B - F)x + A - D - E = 0 \\ (D - F)x + C + F - E = 0 \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются лишь в случае, когда

$$\begin{cases} D - F = 0 \\ B - F = 0 \\ B + C - E = 0 \\ A - D - E = 0 \\ C + F - E = 0 \end{cases}$$

Выразим все коэффициенты через два из них (m = 2), например через A и B. Из второго уравнения имеем $F = B$. Тогда, с учетом первого уравнения, получаем $D = B$. Из четвертого уравнения находим $E = A — D$, т. е. $E = A — B$. Из третьего уравнения: $C = E — B$, т. е. $C = A —$

B — B, или *C* = *A* — 2*B*. Коэффициенты *A* и *B* — произвольные.

Полагая *A* = 1, *B* = 0, находим: *C* = 1, *D* = 0, *E* = 1, *F* = 0.

Полагая A = 0, B = 1, находим: C = –2, *D* = 1, E = –1, F = 1.

Получаем два линейно независимых частных решения, соответствующих двукратному корню *k* = 1:

$$y_1^{(2)} = e^x, y_2^{(2)} = e^x, y_3^{(2)} = e^x \text{ и}$$

$$y_1^{(3)} = xe^x, y_2^{(3)} = (-2+x)e^x, y_3^{(3)} = (-1+x)e^x$$

Записываем общее решение исходной системы:

$$y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3xe^x$$

$$y_2 = c_2e^x + c_3(x-2)e^x$$

$$y-3 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3(x-1)e^x$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1. $y' = e^{x^2}x\left(1+y^2\right)$

1.2. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$

1.3. $3^{y^2-x^2} = yy'/x$

1.4. $ctgx\cos^2 ydx + \sin^2 xtgydy = 0$

1.5. $\left(1+e^{3y}\right)xdx = e^{3x}dy$

1.6. $\sin y\cos xdy = \cos y\sin xdx$

1.7. $y' = e^{2x}/\ln y$

1.8. $e^{x+3y}dy = xdx$

1.9. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$

1.10. $y'\sin x = y\ln y$

1.11. $e^x\sin ydx + tgydy = 0$

1.12. $y' = (2x-1)ctgy$

1.13. $\left(1+e^x\right)ydy - e^ydx = 0$

1.14. $\sec^2 x tg y dy + \sec^2 y tg x dy = 0$

1.15. $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$

1.16. $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$

1.17. $e^x tg y dx = \left(1-e^x\right)\sec^2 y dy$

1.18. $(\sin(2x+y)-\sin(2x-y))dx = dy/\sin y$

1.19. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

1.20. $\left(y^2+3\right)dx - \left(e^x/x\right)y dy = 0$

1.21. $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$

1.22. $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y' = \sec x$

1.23. $\sin x tg y dx - dy/\sin x = 0$

1.24. $3e^x \sin y dx + \left(1-e^x\right)\cos y dy = 0$

1.25. $1+(1+y')e^y = 0$

1.26. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$

1.27. $y' ctg x + y = 2$

1.28. $y' = (2y+1)tg x$

1.29. $\left(e^{-x^2}dy\right)/x + dx/\cos^2 y = 0$

1.30. $(\sin(x+y)+\sin(x-y))dx + dy/\cos y = 0$

2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

2.1. $y'\sqrt{1+y^2} = x^2/y$

2.2. $y' = \left(1+y^2\right)/\left(1+x^2\right)$

2.3. $y - xy' = 2\left(1+x^2y'\right)$

2.4. $(x+4)dy - xy dx = 0$

2.5. $y - xy' = 1 - x^2y'$

2.6. $y' + y + y^2 = 0$

2.7. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

2.8. $y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0$

2.9. $(x^2 y - y)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1$

2.10. $(1+x^3)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0$

2.11. $(xy - x)^2 dy + y(1-x)dx = 0$

2.12. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$

2.13. $2xyy' = 1 - x^2$

2.14. $y' = 2xy + x$

2.15. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$

2.16. $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$

2.17. $(y^2 x + y^2)dy + xdx = 0$

2.18. $(xy^3 + x)dx + (x^2 y^2 - y^2)dy = 0$

2.19. $xy' - y = y^2$

2.20. $(1+y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$

2.21. $\sqrt{y^2+1}\,dy = xydy$

2.22. $y' + 2y - y^2 = 0$

2.23. $y' - xy^2 = 2xy$

2.24. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0$

2.25. $2x^2 yy' + y^2 = 2$

2.26. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0$

2.27. $(xy + x^3 y)y' = 1 + y^2$

2.28. $(y+1)y' = y/\left(\sqrt{1-x^2}\right) + xy$

2.29. $y'/7^{y-x} = 3$

2.30. $xyy' = (1-x^2)/(1-y^2)$

3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.1. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$

3.2. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$

3.3. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$

3.4. $xy' + y\left(\ln(y/x) - 1\right) = 0$

3.5. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

3.6. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$

3.7. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$

3.8. $\left(y^2 - 2xy\right)dx - x^2dy = 0$

3.9. $y' = y/x - 1$

3.10. $x^2y' = y(x + y)$

3.11. $y'x + x + y = 0$

3.12. $y' = x/y + y/x$

3.13. $y - xy' = x\sec(y/x)$

3.14. $(x + 2y)dx + xdy = 0$

3.15. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$

3.16. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

3.17. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

3.18. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

3.19. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

3.20. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

3.21. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$

3.22. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$

3.23. $y^2 + x^2y' = xyy'$

3.24. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

3.25. $xy' - y = xtg(y/x)$

3.26. $\left(x^2 - 2xy\right)y' = xy - y^2$

3.27. $xy' = y - xe^{y/x}$

3.28. $xy' = y\cos\ln(y/x)$

3.29. $xy' - y = (x+y)\ln((x+y)/x)$

3.30. $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx + \left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dy = 0$

4. Найти решение задачи Коши.

4.1. $y' - \dfrac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$

4.2. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$

4.3. $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3$, $y(0) = 1/2$

4.4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0) = 1$

4.5. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

4.6. $y' - y\cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$

4.7. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

4.8. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$

4.9. $y' - y/x = -2/x^2$, $y(1) = 1$

4.10. $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$

4.11. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -5/6$

4.12. $y' - y/x = x^2$, $y(1) = 0$

4.13. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$

4.14. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0$

4.15. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, y(1) = 1$

4.16. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = 3/2$

4.17. $y' - \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$

4.18. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

4.19. $y' + ytgx = \cos^2 x, y(\pi/4) = 1/2$

4.20. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$

4.21. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), y(0) = 1$

4.22. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, y(2) = 4$

4.23. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

4.24. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$

4.25. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$

4.26. $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1$

4.27. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, y(1) = e$

4.28. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1$

4.29. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4$

4.30. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$.

5. Найти решение задачи Коши.

5.1. $3(xy' + y)xy^2, \ y(1) = 3$

5.2. $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2, \ y(0) = 1$

5.3. $y' - y = 2xy^2, \ y(0) = 1/2$

5.4. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \ y(1) = 1$

5.5. $2xy' - 3y = -\left(20x^2 + 12\right)y^3,\ y(0) = 1/2\sqrt{2}$

5.6. $2\left(y' + xy\right) = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 2$

5.7. $y' + 2xy = 2x^3y^3,\ y(0) = \sqrt{2}$

5.8. $3\left(xy' + y\right) = y^2 \ln x,\ y(1) = 3$

5.9. $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1$

5.10. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x),\ y(0) = 1$

5.11. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}\left(1 - x^3\right),\ y(0) = -1$

5.12. $y' - y = xy^2,\ y(0) = 1$

5.13. $xy' + y = (x + 1)y^2,\ y(1) = 1$

5.14. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2$

5.15. $2xy' - 3y = -\left(5x^2 + 3\right)y^3, y(1) = 1/\sqrt{2}$

5.16. $y' + y = xy^2, y(0) = 1$

5.17. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1$

5.18. $y' + 2ycthx = y^2chx, y(1) = 1/sh1$

5.19. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, y(0) = 1$

5.20. $2\left(y' + xy\right) = (x - 1)e^{x}y^2, y(0) = 2$

5.21. $y' - ytgx = -(2/3)y^4 \sin x, y(0) = 1$

5.22. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2$

5.23. $xy' + y = xy^2, y(1) = 1$

5.24. $4y' + x^3y = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}y^2, y(0) = 1$

5.25 $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1$

5.26. $8xy' - 12y = -\left(5x^2 + 3\right)y^3, y(1) = 1/\sqrt{2}$

5.27. $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 1/2$

5.28. $2\left(y' + y\right) = xy^2, y(0) = 2$

5.29. $2\left(xy' + y\right) = xy^2, y(1) = 2$

5.30. $y' + xy = (x - 1)e^{x}y^2, y(0) = 1$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

6.1. $xy'' = y'$

6.2. $y''x\ln x = y'$

6.3. $x^2y'' = y^2$

6.4. $y'' = y' + x$

6.5. $xy'' - y' = x^2e^x$

6.6. $2xy'' \cdot y' = y^2 - 4$

6.7. $xy'' = y' + x^2$

6.8. $x^2y'' + xy' = 1$

6.9. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$

6.10. $xy'' = y'x\ln x = 2y'$

6.11. $y''x\ln x = 2y'$

6.12. $y'' + y''tgx = \sec x$

6.13. $y''tgx = y' + 1$

6.14. $(1 - x^2)y'' - xy = 2$

6.15. $y'' + 4y' = 2x^2$

6.16. $y'' = -x/y$

6.17. $y''ctgx + y' = 2$

6.18. $y'' + y' = \sin x$

6.19. $xy'' + y' = \ln x$

6.20. $(1 + x^2)y'' = 2xy$

6.21. $x(y'' + 1) + y' = 0$

6.22. $x^3y'' + x^2y' = 1$

6.23. $2xy'y'' = y'^2 + 1$

6.24. $y'' - 2y'ctgx = \sin^3 x$

6.25. $y'' + y'tgx = \sin 2x$

6.26. $y'' + 2xy'^2 = 0$

6.27. $y'' + 4y' = \cos 2x$

6.28. $2xy'y'' = y'^2 - 1$

6.29. $y'''x\ln x = y''$

6.30. $xy'' - y' = 2x^2e^x$

7. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

7.1. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$;

7.2. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y = 0$;

7.3. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$;

7.4. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

7.5. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$;

7.6. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$;

7.7. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

7.8. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

7.9. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$;

7.10. а) $y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

7.11. а) $y' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

7.12. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$;

7.13. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$;

7.14. а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$;

7.15. а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$;

7.16. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' + 4y = 0$;

7.17. а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$;

7.18. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$;

7.19. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$;

7.20. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$;

7.21. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$;

7.22. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

7.23. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

7.24. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

7.25. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$;

7.26. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$;

7.27. $а) y'' + y' - 6y = 0$; $б) y'' + 9y' = 0$; $в) y'' - 4y' + 20y = 0$;

7.28. $а) y'' - 49y = 0$; $б) y'' - 4y' + 5y = 0$; $в) y'' + 2y' - 3y = 0$;

7.29. $а) y'' + 7y' = 0$; $б) y'' - 5y' + 4y = 0$; $в) y'' + 16y = 0$;

7.30. $а) y'' - 6y' + 8y = 0$; $б) y'' + 4y' + 5y = 0$; $в) y'' + 5y' = 0$.

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., 2000.
2. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М., 2003.
3. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления., т. 2. - М.: «Наука», 1972. – 576 с.
4. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.,- М.: «Высшая школа», 1983. – 546 с.
5. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике., 2 часть. – 2-е изд., испр.-М.: «Айрис-пресс», 2003. – 256 с.:Ил.
6. *Гутер Р.*С., *Янпольский А.Р.* Дифференциальные уравнения. М., «Высш.школа», 1976. –304 С.

Учебное издание

Дифференциальные уравнения
Учебное пособие

Составитель: **Горлов** Александр Семенович

Подписано в печать Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,8
Тираж 100 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46