Министерство образования и науки Российской Федерации

Белгородский государственный технологический университет
им В.Г. Шухова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-ГО КУРСА ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА

Белгород
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

Белгородский государственный технологический университет
им В.Г. Шухова
Кафедра высшей математики

Утверждено
научно-методическим советом
университета

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-ГО КУРСА ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА

Белгород
2015

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
М 54

Составитель: канд. техн. наук, доц. Ю.А. Феоктистов

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.М. Редькин

М 54 **Методические** указания к выполнению контрольных работ по математике для студентов 1-го курса заочной формы обучения технических направлений бакалавриата / сост. Ю.Ф. Феоктистов. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2015.-97с.

Данные методические указания предназначены для студентов 1-го курса заочной формы обучения технических направлений бакалавриата с целью изучения курса математики по утвержденной программе, соответствующей стандартам.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 51 (075)
ББК 22.1я7

ВВЕДЕНИЕ

Числовые расчеты применяются во всех областях деятельности инженеров всевозможных специальностей, физиков, химиков и работников многих других профессий. В связи с развитием науки и техники приходится решать все более сложные задачи, проводить все более и более сложные подсчеты. Все эти расчеты основаны на математике, которая представляет собой значительный отдел в общей сумме человеческих знаний и приспособлена к обслуживанию самых разнообразных областей науки и практической деятельности.

Цель курса математики в системе подготовки бакалавров (инженеров) – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные технические задачи, используя в случае надобности компьютеры.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные технические процессы, в освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач, в овладении основными методами математики.

В данных указаниях рассматриваются темы в объеме первого курса, позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В соответствии с этим каждый раздел содержит ссылки на литературу, позволяющую изучить основной теоретический материал, и вопросы для самопроверки. Цель последних – помочь студентам при повторении и закреплении материала. Весь материал разделен на две части (контрольные работы). В первой части рассмотрены темы: линейная алгебра, элементы аналитической геометрии, функции, пределы, производная и ее приложения. Во второй части – комплексные числа, неопределенный и определенный интегралы, приложения определенного интеграла и дифференциальные уравнения. По всем темам приведены подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

Пособие рассчитано на студентов заочного факультета, но может быть использовано студентами дневной формы обучения, желающими лучше изучить математику

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Основной формой заочного обучения является самостоятельная работа студента над учебным материалом; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам университет организует чтение лекций и проведение практических занятий. Ознакомиться с теоретическим материалом студенты могут на сайте кафедры. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с письменными или устными вопросами. Указания по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1.Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после полного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся чертежи.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий; подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Следует добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в котором записывать определения, формулировки теорем, формулы и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделяя их для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется подчеркивать или обводить рамкой, чтобы они выделялись и при прочитывании конспекта лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и служит постоянным справочником.

2. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решение задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертежи требуют тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин.

5. Полученый ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

3. Самопроверка

1. После изучения определенной темы и решения достаточного количества задач рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы, формулы, формулировки и доказательства теорем, проверяя каждый раз себя по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в данном пособии, помогут студенту повторить, закрепить и проверить прочность усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз разобраться внимательно в материале учебника, порешать задачи.

2. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи. Однако благополучное решение задач нельзя воспринимать как признак полного усвоения теории. Часто правильное решение задачи

получается в результате применения механически заученных формул без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи – необходимый, но недостаточный показатель хорошего знания теории.

4. Консультации

1. Если при изучении теоретического материала или решения задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и т.д.), он может обратиться к преподавателю для получения письменной или устной консультации.

2. Студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднения. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, год издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если затруднение вызывает решение задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

5. Контрольные работы

1. В процессе изучения курса студент должен выполнить ряд контрольных работ. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела, укажут на имеющиеся у него пробелы, на возможное направление дальнейшей работы, помогут сформулировать вопросы для консультации.

2. Контрольные работы нужно выполнять самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в работе, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному или письменному экзамену.

3. Прорецензированные работы со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

4. Распределение заданий в контрольных работах и указания по их выполнению см. на с. 82 и таблицу на с. 83–84.

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

Тема 1. *Определители и матрицы. Системы линейных уравнений*

1. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Понятие об определителях N-го порядка.

2. Определители N-го порядка. Свойства определителей. Вычисление определителей.

3. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

4. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение. Ранг матрицы, базисный минор. Теорема о базисном миноре.

5. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Исследование совместных систем линейных уравнений. Базисные решения.

Тема 2. *Элементы аналитической геометрии на плоскости*

6. Метод координат на плоскости. Основные задачи на метод координат (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении).

7. Понятие уравнения линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности. Пересечение двух прямых. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

8. Неравенства первой степени и их геометрический смысл.

9. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. Асимптоты гиперболы.

10. Параллельный перенос. Понятие об общем уравнении кривой второго порядка и приведение его к каноническому виду путем переноса.

11. Полярная система координат. Уравнение некоторых кривых в полярной системе (кардиоида, спирали, лемниската).

Тема 3. *Основы векторной алгебры*

12. Векторы. Линейные операции над ними. Их свойства. Разложение вектора по двум и трем направлениям. Теоремы о проекции вектора на ось. Координаты вектора.

13. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства, выражения в координатной форме.

Тема 4. *Элементы аналитической геометрии в пространстве*

14. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его частные виды. Угол между плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности. Геометрический смысл неравенства и системы неравенств в пространстве.

15. Уравнения поверхности. Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Тема 5. *Введение в анализ (функции, пределы, непрерывность).*

16. Определение функции. Область определения функции, способы задания. Графическое изображение функции, основные сведения по классификации функций.

17. Предел, основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства.

18. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности (формулировка). Монотонность переменной $\left(1+1/n\right)^n$ при $n \to \infty$ и ее предел.

19. Число е. Натуральные логарифмы.

20. Предел $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

21. Сравнение бесконечно малых величин. Порядок малости. Эквивалентные бесконечно малые.

22. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Действия над непрерывными функциями. Формулировка основных свойств функции непрерывной на отрезке.

Тема 6. *Производная и дифференциал*

23. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной; ее геометрический и механический смысл.

24. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции.

25. Понятие об обратной функции. Построение по графику данной функции графика обратной функции. Производная обратной функции.

26. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной.

27. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Тема 7. *Приложения производной*

28. Теоремы Ролля и Лагранжа. Применение производной к исследованию функции. Минимум и максимум функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в интервале.

29. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема исследования и построение графика функции по характерным точкам.

30. Формулы Тейлора и Маклорена. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

31. Параметрический способ задания функции. Параметрические уравнения окружности, эллипса, циклоиды. Дифференцирование функций, заданных в параметрической форме.

Тема 8. *Комплексные числа*

32. Комплексные числа, их изображения на плоскости. Алгебраические действия над комплексными числами. Тригонометрическая форма комплексного числа, свойство модуля и аргумента. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Формулы Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

Тема 9. *Неопределенный интеграл*

33. Первообразная. Неопределенный интеграл, его простейшие свойства. Таблица основных интегралов.

34. Интегрирование заменой переменной и по частям. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений. Понятие о не интегрируемости в элементарных функциях.

Тема 10. *Определенный интеграл. Приближенное вычисление определенного интеграла*

35. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Понятие об интегрируемости функции; формулировка теоремы существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

36. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Связь между определенным интегралом и первообразной. Формула Ньютона – Лейбница.

37. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

38. Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Порядок погрешностей.

Тема 11. *Приложения определенного интеграла*

39. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми в декартовой и полярной системе координат, объем тел по площадям поперечных сечений и тел вращения, длина дуг кривых, площади поверхности вращения. Примеры приложения интеграла к решению простейших задач механики и физики: вычисление работы переменной силы, пути по переменной скорости, гидростатического давления, статических моментов и моментов инерции, координат центра тяжести плоских фигур и линий.

Тема 12. *Дифференциальные уравнения первого порядка*

40. Задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши, частное и общее решение.

41. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и линейные уравнения первого порядка.

Тема 13. *Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений*

42. Интегрирование некоторых уравнений второго порядка путем понижения порядка уравнения.

43. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Структура общего решения.

44. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения неоднородного линейного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

45. Системы дифференциальных уравнений, методы их решения.

III. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Тема 1. Определители *и матрицы. Системы линейных уравнений*

Литература: [9, гл. X, задачи 1204, 1205, 1208].

Разберите решение задачи 6 данных методических указаний.

Тема 2. *Элементы аналитической геометрии на плоскости*

Литература: [1, гл.I–V, задачи 36, 38, 91, 217, 222, 270, 302, 385, 398, 444, 472, 515, 542].

Внимательно изучите решение задач 1–2 данных методических указаний.

Тема 3. *Основы векторной алгебры*

Литература: [1, гл.V–X, задачи 748, 752, 757, 761, 766, 782, 800, 812, 843, 850, 873, 877, 878].

Разберите решение задачи 3 (п п. 1–5) данных методических указаний.

Тема 4. *Элементы аналитической геометрии в пространстве*

Литература: [1, гл. XI–XIII, задачи 719, 724, 736, 913, 921, 929, 940, 964, 986, 999, 1008, 1020, 1025, 1030, 1065].

Внимательно изучите решение задач 3– 4 данных методических указаний.

Тема 5. *Введение в анализ (функции, пределы, непрерывность)*

Литература: [3, гл. III; 4, задачи 12, 17, 21, 26, 171, 176, 179, 181, 183, 185, 191,194,204,211,217,221,247,256,296,317,330.]

Тема 6. *Производная и дифференциал*

Литература: [3 , гл. III; 1-18, 20-26, задачи 341, 345, 356, 358, 368, 382, 420, 431, 434'. 455-526, 532, 534, 569, 582,604, 616,633,671, 723, 726, 734, 743, 744].

Разберите решение задач 12–13 данных методических указаний.

Тема 7. *Применение производной*

Литература: [3 , гл. IV, V; задачи 757, 762, 772, 776, 795', 800, 812, 824, 830, 845, 854, 865, 898, 922, 936; 4].

Разберите решение задач 14-15 данных методических указаний.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A*(1; 0), *B*(13;–9), *C*(17; 13). Найти: 1) длину стороны *AB;* 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *B* в радиусах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину, не используя координаты точки *D*; 5) уравнение медианы, приведенной через вершину *C*; 6) точку пересечения высот треугольника; 7) систему линейных неравенств, определяющую множество внутренних точек треугольника *ABC*. Сделать чертеж.

Решение. 1. Расстояние d между точками $A(x_1;y_1)$ и B $(x_2;y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны:

$$d=|AB|=\sqrt{(13-1)^2+(-9-0)^2}=\sqrt{144+81}=15$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки A $(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_1-x_1}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек *A* и *B*, получим уравнение стороны *AB*:

$$\frac{y-0}{-9-0}=\frac{x-1}{13-1}; \qquad \frac{y}{-9}=\frac{x-1}{12}; \qquad 3x+4y-3=0$$

Решив последнее уравнение относительно *y*, находим уравнение стороны *AB* в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}; \text{ откуда } k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Подставляя в (2) координаты точек *B* и *C*, получим уравнение прямой *BC*:

$$\frac{y+9}{13+9}=\frac{x-13}{17-13}; \qquad \frac{y+9}{22}=\frac{x-13}{4}; \qquad 11x-2y-161=0$$

или $y=5{,}5x-80{,}5$, откуда $k_{BC}=5{,}5$.

3. Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3)$$

Формула (3) определяет тангенс угла, образованного вращением вокруг точки пересечения прямой с угловым коэффициентом k_1 до совмещения ее с прямой, имеющей угловой коэффициент k_2 (вращение против хода часовой стрелки).

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты которых уже найдены:

$$k_2 = k_{AB} = -\frac{3}{4}; \qquad k_1 = k_{BC} = 5,5.$$

Применяя (3), получаем: $\mathrm{tg}B = \dfrac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \dfrac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5,5} = 2;$

$B = 63^\circ 26'$, или $B \approx 1,11$ радиан (по таблицам или с помощью калькулятора).

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (4)$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$. Так как $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение высоты CD:

$$y - 13 = \frac{4}{3}(x - 17); \quad 3y - 39 = 4x - 68; \quad 4x - 3y - 29 = 0.$$

Чтобы найти длину высоты CD, не используя координаты точки D, рассмотрим формулу для расстояния от точки $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

В качестве прямой берем прямую AB с уравнением $3x + 4y - 3 = 0$, а за точку M берем точку $C(17; 13)$.

Подставляя в (5), получим длину высоты CD:

$$\left|CD\right| = \frac{\left|3\cdot17+4\cdot13-3\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{100}{5} = 20.$$

5. Чтобы найти уравнение медианы CE, определим координаты точки E, которая является серединой стороны AB, применяя формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (6)$$

Следовательно, $x_E = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{1+13}{2} = 7;$

$$y_E = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{0+(-9)}{2} = -4{,}5; \quad E(7;-4{,}5).$$

Подставляя в (2) координаты точек C и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-13}{-4{,}5-13} = \frac{x-17}{7-17}; \quad \frac{y-13}{-17{,}5} = \frac{x-17}{-10}; \quad 17{,}5x-10y-167{,}5=0.$$

6. Чтобы найти точку пересечения высот треугольника, решим совместно уравнение высоты CD и AF.

Уравнение высоты CD найдено выше. Для нахождения уравнения AF воспользуемся условием перпендикулярности прямых AF и BC. Так как $k_{BC}=5{,}5,$ то $k_{AE}=-\dfrac{2}{11}.$ Подставив в (4) координаты точки A и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение высоты AF:

$$y-0=-\frac{2}{11}(x-1); \qquad 11y=-2x+2; \qquad 2x+11y-2=0.$$

Для нахождения точки O – точки пересечения высот треугольника, решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x-3y-29=0, \\ 2x+11y-2=0, \end{cases}$$

откуда $x=6{,}5$; $y=-1$; $O(6{,}5;-1)$.

7. Очевидно, множество внутренних точек треугольника ABC можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой CA и содержит точку B.

Неравенство, определяющее первую из этих полуплоскостей, получим следующим образом. Возьмем уравнение стороны *AB*:

$3x+4y-3=0$.

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки *C*, получим:

$3\cdot 17+4\cdot 13-3=100>0.$

Следовательно, точка *C* не лежит на прямой *AB*, а искомое неравенство будет:

$3x+4y-3>0$.

Аналогично, полуплоскость, ограниченная прямой *BC* и содержащая точку *A*, определяется неравенством:

$11x-2y-161<0$,

а полуплоскость, ограниченная прямой *AC* и содержащая точку *B*, определяется неравенством:

$13x-16y-13>0$. Итак, множество внутренних точек треугольника *ABC* определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x+4y-3>0, \\ 11x-2y-161<0, \\ 13x-16y-13>0. \end{cases}$$

Треугольник *ABC*, высоты *CD* и *AF*,медиана *CE,* точка пересечения высот *O* построены в системе координат *XOY* (рис. 1).

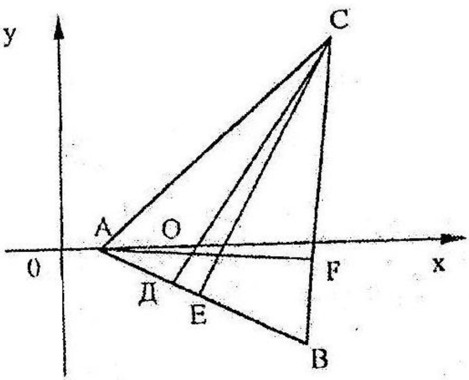


Рис. 1.

Кривые второго порядка

1. Окружность

Уравнение $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^1=R^2$ – определяет окружность радиуса *R* с центром $C\left(x_0,y_0\right)$.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=R^2$.

2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами. Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать *2a*. Фокусы эллипса обозначают двумя буквами F_1 и F_2, а расстояние между ними – через *2c*.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где} \quad b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Число $\varepsilon=c/a$ называется эксцентриситетом эллипса.

Прямые $x=\pm a/\varepsilon$ называются директрисами эллипса.

Если центр эллипса находится в точке $C\ \left(x_0,y_0\right)$, то уравнение эллипса имеет вид (рис. 2)

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1.$$

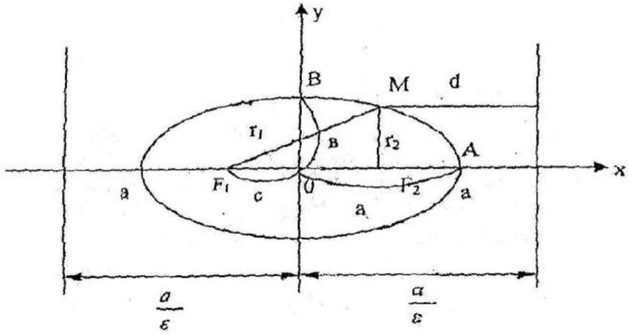


Рис. 2.

3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная $|2a|$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид (рис. 3)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

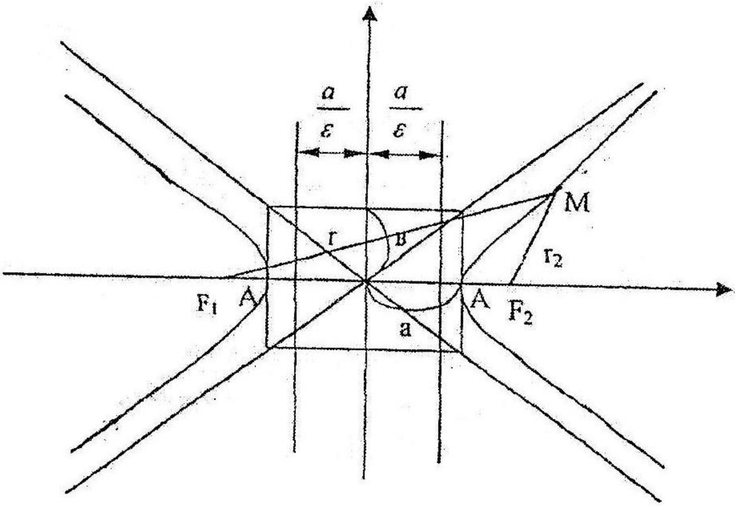


Рис. 3

Прямые $y = \pm \frac{в}{a} x$ являются асимптотами гиперболы.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы.

4. Парабола

Параболой называют геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид (рис. 4) $y^2 = 2px$.

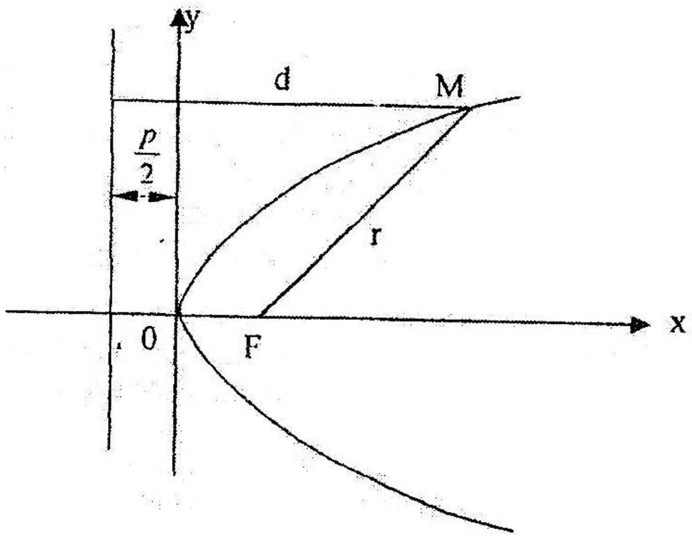


Рис. 4

Пример 1. Установить, какая линия определяется уравнением $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Т.к. в правой части число отрицательное, то $x - 5 \le 0$ Возведя обе части в квадрат, получим:

$$(x-5)^2 = \frac{9}{16}\left(y^2 + 4y - 12\right),$$

$$16(x-5)^2 = 9\left(y^2 + 4y + 4 - 4 - 12\right),$$

$$16(x-5)^2 = 9(y+2)^2 - 144,$$

$16(x-5)^2 - 9(y+2)^2 = -144.$ разделим все на –144:

$\frac{9(y+2)^2}{16} - \frac{(x-5)^2}{9} = 1 -$ это уравнение гиперболы, центр которой находится в точке (5; –2), a = 3, b = 4. Поскольку $x \le 5$, то в качестве ответа выбираем часть гиперболы, лежащую левее прямой $x = 5$.

ЗАДАЧА 2. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от точки *А* (0;2) и прямой $y=4$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

Решение. В системе координат *ХОУ* построить точку *А* (0;2) и прямую $y=4$. Пусть *М* (x,y) – производная точка искомого геометрического места точек. Опустим из точки *М* перпендикуляр *МВ* на данную прямую $y=4$ и определим координаты точки *В*. Очевидно, что абсцисса точки *В* равна абсциссе точки *М*, а ордината точки *В* равна 4, т.е. *В* (x;4). По условию задачи *МА=МВ*. Расстояния *МА* и *МВ* находим по формуле (1),следовательно, для любой точки *М* (x,y), принадлежащей искомому месту точек, выполнено соотношение

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-4)^2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую часть и преобразовав, получим:

$$x^2+(y-2)^2=(y-4)^2; \quad x^2+y^2-4y+4=y^2-8y+16;$$

$$x^2=-4y+12; \qquad y=-\frac{x^2}{4}+3.$$

Последнее уравнение есть уравнение параболы с вершиной в точке O'(0, 3) и осью симметрии OY. Построим эту параболу (рис. 5).

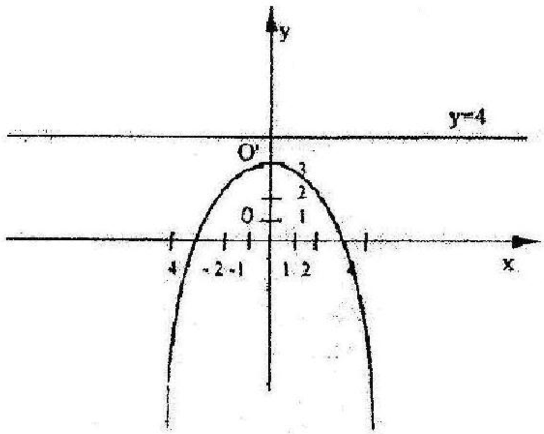


Рис. 5

ЗАДАЧА 3. Даны координаты $A_1(1;\ 2;\ 3)$, $A_2(9;\ 6;\ 4)$, $A_3(3;\ 0;\ 4)$, $A_4(5;\ 2;\ 6)$ вершин пирамиды. Требуется:

1) записать разложение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$; 3) найти угол между ребром $\overrightarrow{A_1A_4}$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) найти площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 6) составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A_1 и A_2; 7) составить канонические уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 8) найти точку пересечения высоты с гранью $A_1A_2A_3$.

Решение. 1. Произвольный вектор может быть разложен по ортам формулой

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (1)$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси O_x, O_y, O_z. Если даны координаты начала $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и конца $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатные оси находятся по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1;\ a_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

Тогда из (2) и (1) получаем

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (3)$$

Подставив в (3) координаты точек A_1 и A_2, получаем представление

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (9-1)\vec{i} + (6-2)\vec{j} + (4-3)\vec{k}\ .$$

Аналогично находим, что $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$.

Если вектор задан (1), то его модуль вычисляется по формуле:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (4)$$

Применяя (4), получим модули найденных векторов:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = 9;\ \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = 3;\ \left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = 5.$$

2. Косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\ .$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = 8 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 9.$$

Модули этих векторов известны: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = 9$; $\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = 3$.

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{9}{9 \cdot 3} = \dfrac{1}{3} \approx 0,3333.$

По таблице определим, что $\varphi \approx 70^\circ 32$.

3. Углом ψ между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Если направляющий вектор прямой $\vec{S} = \{l, m, n\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{N} = \{A, B, C\}$ (рис.6) направлены в одну сторону от плоскости, то угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2} - \psi$, если же векторы $\vec{S}$ и $\vec{N}$ направлены в разные стороны, то угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2} + \psi$. Таким образом,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\vec{S}\right|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad (5)$$

откуда
$$\sin\psi = \frac{\left|Al + Bm + Cn\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (6)$$

За направляющий вектор прямой A_1A_4 примем вектор $\overrightarrow{A_1A_4} = \{4,0,3\}$.

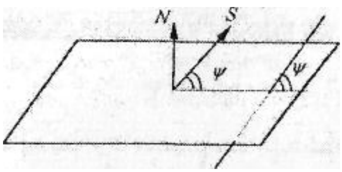


Рис 6.

Чтобы найти вектор $\vec{N}$, нужно записать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A_1, A_2, A_3. Пусть M (x,y,z) - произвольная точка искомой плоскости. Три вектора $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ лежат в одной плоскости. Смешанное произведение их:

($\overrightarrow{A_1M}$; $\overrightarrow{A_1A_2}$; $\overrightarrow{A_1A_3}$)=0, откуда получим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Подставив в (7) координаты точек A_1, A_2 и A_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 9-1 & 6-2 & 4-3 \\ 3-1 & 0-2 & 4-3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$6(x-1)-6(y-2)-24(z-3)=0 .$$

Сократив на 6, получим уравнение искомой плоскости

$$x-y-4z+13=0 \qquad (8)$$

Из уравнения плоскости находим

$$\vec{N}=\{1;-1;-4\} .$$

Подставляя координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_4}$ и $\vec{N}$ в (6), получим:

$$\sin\psi=\frac{|1\cdot 4+(-1)\cdot 0+(-4)\cdot 3|}{\sqrt{1+1+16}\cdot\sqrt{16+0+9}}=\frac{|-8|}{\sqrt{18}\cdot 5}\approx 0,377$$

По таблице определяем $\psi\approx 22^\circ 9'$.

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Обозначим векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ через вектор $\vec{p}$. Модуль вектора $\vec{p}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, а площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине модуля вектора $\vec{p}$.

Имеем:

$$\vec{p}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}-24\vec{k},$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{36+36+576}=\sqrt{648}=18\sqrt{2}; \qquad S=9\sqrt{2} \text{ (кв.ед.)}$$

5. Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения, Объем же тетраэдра (пирамиды) равен одной трети произведения площади основания на высоту. У параллелепипеда, построенного на тех же векторах, та же высота, а площадь основания в 2 раза больше. Следовательно,

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} V_{парал} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4} \right) \right| \quad . \qquad (9)$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \right) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48 .$$

Объем параллелепипеда равен 48 куб.ед., объем заданной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен 8 куб. ед.

6. Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} , \qquad (10)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки, через которую проходит прямая, а проекции направляющего вектора $\vec{S}$, параллельного прямой, равны *m, n, p*.

По условию прямая проходит через точку $A_1(1;2;3)$. В качестве направляющего вектора $\vec{S}$ возьмём вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ = {8;4;1}. Подставив в (10) координаты точки A_1 и заменив соответственно числа *m, n, p* числами 8, 4, 1, получим уравнение прямой A_1A_2:

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} .$$

7. По условию, искомая прямая проходит через точку $A_4(5;2;6)$ и перпендикулярна плоскости

$$x - y - 4z + 13 = 0 ,$$

поэтому направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости коллинеарные. В качестве направляющего вектора прямой примем нормальный вектор плоскости $\vec{N} = \{1\,;-1\,;-\}$. Подставив в (10) координаты точки A_4 и заменив соответственно числа *m, n, p* числами 1, –1, –4, получим уравнение высоты:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{-4} \quad . \qquad (11)$$

8. Чтобы найти точку пересечения высоты (11) с плоскостью (8), запишем уравнения прямой (11) в параметрическом виде. Пусть $\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{-4}$, где t- некоторый параметр,

откуда $x=t+5$, $y=-t$, $z=-4t+6$ (12).

Подставляя (12) в (8) и решив уравнение, получим значение параметра *t*:

$$t+5-(-t+2)-4(-4t+6)+13=0;$$
$$t+5+t-2+16t-24+13=0;\ 18t=8;\ t=4/9 \ .$$

Подставляя в (12) $t=4/9$, находим координаты точки *P* пересечения прямой (11) с плоскостью (8); $x=49/8;\ y=14/9;\ z=38/9$.

ЗАДАЧА 4. Даны четыре вектора: $\vec{a}=\{2,3,5\}$; $\vec{b}=\{7,14,25\}$; $\vec{c}=\{13,12,16\}$; $\vec{d}=\{0,18,39\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Три некомпланарных вектора в пространстве линейно независимы, следовательно, образуют в нем базис. Если смешанное произведение трех векторов отлично от нуля, то векторы некомпланарные.

Находим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 25 \\ 13 & 12 & 16 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \ .$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве.

Если вектор $\vec{d}$ имеет координаты $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ в этом базисе, то имеет место разложение:

$$\vec{d}=\alpha_1\cdot\vec{a}+\alpha_2\cdot\vec{b}+\alpha_3\cdot\vec{c} \ .$$

Векторное равенство в координатной форме можно записать в виде:

$$\{0;18;39\} = a_1\,\{2;3;5\} + a_2\,\{7;14;25\} + a_3\,\{13;12;16\}$$

что равносильно системе трех уравнений :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 13\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 14\alpha_2 + 12\alpha_3 = 18, \\ 5\alpha_1 + 25\alpha_2 + 16\alpha_3 = 39. \end{cases}$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

то, вычислив определители

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 13 \\ 18 & 14 & 12 \\ 39 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 12;$$

$$\Delta a_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 3 & 18 & 12 \\ 5 & 39 & 16 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\Delta a_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 14 & 18 \\ 5 & 25 & 39 \end{vmatrix} = 3,$$

можно найти решение системы по формулам Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{12}{-3} = -4;\; \alpha_2 = \frac{\Delta a_2}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3;\; \alpha_3 = \frac{\Delta a_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Вектор $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ имеет вид

$$\vec{d} = -4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c},$$

его координаты в этом базисе:

$$\vec{d} = \{-4;3;-1\}\,.$$

ЗАДАЧА 5. Доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) методом Гаусса; 3) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим ранг матрицы системы *r(A)*:

а) очевидно, что $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0;$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0;$ $\Delta \neq 0$, следовательно, $r(A)$=3.

Система совместна и имеет единственное решение.

1. Решаем систему по формулам Крамера. Для этого вычислим определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42; .$$

Тогда решение системы находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

2. Решаем систему методом Гаусса. Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее - неизвестное x_1 , первым ведущим элементом будет $a_{11} = 1$. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму уравнению ведущее, умноженное на –3, а к третьему – ведущее, умноженное на –4. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_3 = 8, \\ -4x_2 - 2x_3 = -14, \\ -5x_2 - 6x_3 = -28. \end{cases}$$

Первый шаг закончен. Второе в третье уравнения образуют первую подсистему. За второе ведущее уравнение примем второе уравнение системы, а за второе ведущее неизвестное $-x_2$, вторым ведущим элементом будет –4, Исключим x_2 из третьего уравнения, прибавки к третьему уравнению ведущее, умноженное на –5 / 4. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -4x_2 - 2x_3 = -14, \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{21}{2}. \end{cases}$$

Второй шаг закончен. Вторая подсистема состоит из одного уравнения. Прямой ход метода Гаусса закончен – система приведена к треугольному виду. Обратным ходом получаем:

$$x_3 = 3,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}(-14 + 2x_3) = 2,$$

$$x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 1.$$

Решение системы $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$ – единственное.

3. Решим систему матричным способом. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений эквивалентна матричному равенству $AX = B$. (1)

Так как определитель матрицы A: $\det A = \Delta = 14 \neq 0,$ то матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу. Умножив обе части уравнения (1) на матрицу A^{-1} слева, получим решение в матричной форме:

$$X = A^{-1}B. \qquad (2)$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Построим обратную матрицу и найдем матрицу *X:*

$$X=\begin{pmatrix} -7/14 & 7/14 & 0 \\ 10/14 & -6/14 & 2/14 \\ 1/14 & 5/15 & -4/14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

По определению равенства матриц находим: $x_1=1; x_2=2; x_3=3$.

Неравенства и их геометрический смысл

Материал настоящей темы программы в рекомендованных учебниках отсутствует. Ниже приводится его краткое изложение.

Метод координат позволяет истолковать геометрически не только уравнения, но и неравенства с двумя переменными. Для этого достаточно рассматривать эти переменные как координаты точек на плоскости. Тогда, как известно, геометрической интерпретацией уравнения

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

является некоторая линия, координаты точек которой удовлетворяют этому уравнению, а само уравнение (1) называется уравнением этой линии. Аналогично, множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$F(x,y)<0 \qquad (2)$$

Рассматривается как геометрический образ этого неравенства. Наряду с неравенством (2) можно рассматривать также неравенство

$$F(x,y)>0\,. \qquad (3)$$

Так, например, уравнение

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0 \qquad (4)$$

определяет, как известно, окружность с центром в точке $C\ (\alpha\ ;\beta\ )$ и радиуса r .

Неравенство

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2<0 \qquad (5)$$

определяет множество точек, лежащих внутри, а неравенство

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2>0 \qquad (6)$$

множество точек, лежащих вне круга, ограниченного окружностью (4).

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называют *областью решений* этого уравнения. Аналогично говорят и об *области решений неравенства* (2) или (3).

Область решений уравнения (1) или неравенства (2) или (3) может оказаться и *пустым множеством,* т.е. множеством, не содержащим ни одной точки. Таковы, например, области решений уравнения $Ax+By+C=0$, где $A=B=0, C\neq 0$ или неравенства $x^2+y^2+1<0$. И, наоборот, уравнению или неравенству могут удовлетворять координаты любой точки плоскости, как, например, уравнению $Ax+By+C=0$, где $A=B=C=0$, или неравенству $x^2+y^2+1>0$. Обычно, изучая линии и их уравнения, такие случаи исключают, накладывая соответствующие ограничения на рассматриваемые уравнения. Если выражение $F(x;y)$ линейное, т.е. $F(x;y)=Ax+By+C$, где A, B, C – постоянные, то мы приходим к линейному уравнению

$$Ax+By+C=0 \tag{7}$$

и двум *линейным неравенствам*

$$Ax+By+C<0 \;; \tag{8}$$

$$Ax+By+C>0 \;. \tag{9}$$

Если A и B не равны одновременно нулю ($A^2+B^3\neq 0$), то, как известно, уравнение (7) является уравнением прямой линии. Все точки, не лежащие на прямой (7), разобьются на два множества, лежащие по разные стороны от прямой (7). Можно показать, что эти множества определяются неравенствами (8) и (9).

Множество точек, лежащих на некоторой прямой и по одну сторону от нее, называется *полуплоскостью*. Очевидно, любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она является общей границей; граница считается принадлежащей одновременно обеим полуплоскостям.

Если граница полуплоскостей определяется уравнением (7), то полуплоскости определяются неравенствами

$$Ax+By+C\leq 0 \;, \tag{10}$$

$$Ax + By + C \geq 0 \ , \qquad (11)$$

Легко сформировать *критерий,* устанавливающий, какую из двух полуплоскостей определяет данное линейное неравенство: выбрав произвольную точку *N*, не принадлежащую границе, подставим ее координаты в данное неравенство; если неравенство удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, содержащую точку *N*, а если не удовлетворяет, то полуплоскость, не содержащую точку *N*.

ЗАДАЧА 6. Даны три точки *A*(2; 1), *B*(6; 3), *C*(4; 5).

Найти неравенства, определяющие полуплоскость, ограниченную прямой *AB* и содержащую точку *C*.

Решение. Составим уравнение прямой *AB* по двум точкам:

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-1}{3-1}, \text{ или } \quad x - 2y = 0 .$$

Подставив в левую часть этого уравнения координаты точки *C*, получим:

$4 - 2 \cdot 5 = -6 < 0$. Следовательно, точка *C* не лежит на прямой *AB*, а искомое неравенство будет $x - 2y \leq 0$.

Система неравенств
$$\begin{cases} F_1(x,y) < 0, \\ F_2(x,y) < 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x,y) < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

также может быть истолкована геометрически как область решений этой системы, т. е. как множество всех точек, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам системы.

Пересечением нескольких множеств называется множество, каждый элемент которого принадлежит всем пересекающимся множествам. Очевидно, область решений системы неравенств является пересечением областей решений каждого из неравенств системы.

Студенту рекомендуется убедиться в том, что область решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0, \\ x + y > 0 \end{cases}$$

представляет собой совокупность внутренних точек полукруга $x^2 + y^2 - 1 < 0$, расположенных "выше" прямой $x + y = 0$, и сделать чертеж. Областью решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \le 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 \le 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_mx + B_my + C_m \le 0 \end{cases} \qquad (12)$$

является, очевидно, пересечение полуплоскостей, определяемых каждым из неравенств системы. Границей ее является ломаная, образованная граничными прямыми этих плоскостей. Такое множество точек называется *многоугольной* областью. Если, кроме того, эта область ограничена, т. е , не содержит точек со сколь угодно большими значениями координат, то ее называют *многогранником*.

ЗАДАЧА 7. Записать с помощью системы неравенств множество точек, лежащих внутри треугольника с вершинами в точках $A(2,\ 1)$, $B(6,\ 3)$, $C(4,\ 5)$.

Решение. Очевидно, множество точек треугольника *ABC* можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей.

Неравенство, определяющее первую из этих полуплоскостей, будет

$$x - 2 \cdot y \le 0 .$$

Оно было найдено при решении задачи 6. Аналогично, вторая полуплоскость определяется неравенством $x + y - 9 \le 0$,

а третья – неравенством $2 \cdot x - y - 3 \ge 0$.

Итак, множество точек треугольника *ABC* определяется системой линейных неравенств

$$\begin{cases} x - 2y \le 0, \\ x + y - 9 \le 0, \\ 2 \cdot x - y - 3 \ge 0. \end{cases}$$

Студенту рекомендуется сделать чертеж.

Для системы неравенств могут также иметь место особые случаи, когда система не имеет ни одного решения или имеет единственное решение. Геометрически это означает, что области решений каждого из неравенств не пересекаются или имеют одну общую точку.

ЗАДАЧА 8. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Решение. а) Найти AB

$A\cdot B=C$

Находим сумму произведений элементов *i*-ой строки матрицы A на соответствующие элементы *i*-ого столбца матрицы B.

$C_{11}=3\cdot 2+1\cdot 5+0\cdot 1=11$

$C_{12}=3\cdot 7+1\cdot 3+0\cdot(-6)=24$

$C_{13}=3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1=1$

$C_{21}=4\cdot 2+3\cdot 5+2\cdot 1=25$

$C_{22}=4\cdot 7+3\cdot 3+2\cdot(-6)=25$

$C_{23}=4\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 1=5$

$C_{31}=2\cdot 2+2\cdot 5+(-7)\cdot 1=7$

$C_{32}=2\cdot 7+2\cdot 3+(-7)\cdot(-6)=62$

$C_{33}=2\cdot 0+2\cdot 1+(-7)\cdot 1=-5$

Получаем матрицу C:

$$C=\begin{pmatrix}11 & 24 & 1\\ 25 & 25 & 5\\ 7 & 62 & -5\end{pmatrix}$$

б) Найти BA

$B\cdot A=C$

Решение аналогично решению в пункте а, только находим сумму произведений элементов *i*-ой строки матрицы B на соответствующие элементы *i*-ого столбца матрицы A.

в) Найти A^{-1}

1. Находим определитель матрицы A.

$|A|=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}=-43$, $-43\neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

2.Находим обратную матрицу.

Для вычисления обратной матрицы запишем матрицу A, дописав к ней справа единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Чтобы найти обратную матрицу, используем элементарные преобразования над строками матрицы, преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную.

1-ю строку делим на 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

от 2-й строки отнимаем 1-ю строку, умноженную на 4; от 3-й строки отнимаем 1-ю строку, умноженную на 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -7 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2-ю строку делим на $\frac{5}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -7 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

от 1-й строки отнимаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{1}{3}$; от 3-й строки отнимаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{4}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & -8.6 & 0.4 & -0.8 & 1 \end{array}\right)$$

3-ю строку делим на –8.6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{43} & \frac{4}{43} & -\frac{5}{43} \end{array}\right)$$

к 1-й строке добавляем 3-ю строку, умноженную на 0,4; от 2-й строки отнимаем 3-ю строку, умноженную на 1,2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{43} & -\frac{7}{43} & -\frac{2}{43} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{32}{43} & \frac{21}{43} & \frac{6}{43} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{43} & \frac{4}{43} & -\frac{5}{43} \end{array}\right)$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{43} & -\frac{7}{43} & -\frac{2}{43} \\ -\frac{32}{43} & \frac{21}{43} & \frac{6}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{4}{43} & -\frac{5}{43} \end{pmatrix}$$

г) Найти AA^{-1}.

Решение аналогично решению в пункте а.

д) Найти $A^{-1}A$.

Решение аналогично решению в пункте а.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. *Определение предела функции.* Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящимся к а, если для любого $\varepsilon > 0$

существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Аналогично, что A называется пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящимся к ∞, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M(\varepsilon)>0$ такое, что при $|x|>M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

2. *Вычисление пределов. Применение основных теорем.* При вычислении пределов функции необходимо знать следующие теоремы:

$\lim\limits_{x\to a} C=C$, где С – постоянная;

$\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x).$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ существуют, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Кроме того, надо пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке из области определения справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Далее следует отметить, что

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=\infty,\ \text{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=0;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=0,\ \text{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

3. *Раскрытие неопределенностей.* В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение правильного

значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности. Часто приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

ЗАДАЧА 9. Найти пределы функции:

$a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. При $x\to 2$ и числитель и знаменатель – бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть неопределенность, следует разложить и числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8};$$

$б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Решение. Здесь также имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$; чтобы ее раскрыть, умножаем и числитель, и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю. После этого можно будет сократить на x^2, воспользоваться теоремой о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{8}{2}=4;$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n – степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=3,$$

так как $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$

4. *Первый замечательный предел.* При вычислении пределов трансцендентных функций часто используется формула: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Пример 2. Найти следующие пределы:

$а)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. При $x\to 0,\alpha=5x$ также стремится к нулю, поэтому, умножая числитель и знаменатель на 5 и применяя формулу 1 замечательного предела, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5}{5x\cdot 3}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot 1=\frac{5}{3};$$

$б)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

Решение. Преобразуем знаменатель $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$. При $x\to 0,\frac{x}{2}$ также стремится к нулю, поэтому умножим числитель и знаменатель на 2 и, применяя формулу первого замечательного предела, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot 2}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}==\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}1=\sqrt{2}$$

5. *Пределы, связанные со вторым замечательным пределом*

Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Эти формулы используются для вычисления пределов, которые называются пределами типа 1^{∞}. При вычислении этих пределов встречаем неопределенность типа 1^{∞} .

ЗАДАЧА 10. Найти следующие пределы:

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; $в)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$.

Решение. а) Предел основания равен 1 (разделите числитель и знаменатель на x), а показатель степени стремится к бесконечности, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представим основания степени в виде $1+\alpha$, а в показателе выделяем множитель $1/\alpha$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4+9}{2x-4}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}\cdot\frac{27x}{2x-4}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right]^{\frac{27x}{2x-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27}{2-\frac{4}{x}}}=e^{\frac{27}{2}};$$

$$б)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}==\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=\ln e=1;$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left|\begin{array}{l}y=e^{x}-1\\ e^{x}=y+1\\ x=\ln(1+y)\\ x\to 0, y\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Сравнение бесконечно малых. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен некоторому числу *C*, отличному от нуля.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.Эквивалентность обозначается символом , т.е. пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЯХ

ТЕОРЕМА I. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить их эквивалентными.

ТЕОРЕМА II. Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

Основные эквивалентности:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \ \mathrm{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \mathrm{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),\ a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a.$$

ЗАДАЧА 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$

Решение. Поскольку $\mathrm{arctg}\dfrac{7}{4}x\sim\dfrac{7}{4}x$ при $x\to0$, а $e^{-2x}-1\sim(-2x)$, то

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x}=-\frac{7}{4\cdot2}\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=-\frac{7}{8}.$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если: 1) она определена в этой точке; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;3) этот предел равен значению функции в этой точке x_0 т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то функция имеет разрыв в точке x_0.

Различают следующие виды разрывов:

– если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но так, что $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является устранимым;

– если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существует оба односторонних предела в точке x_0 (они не равны друг другу), то разрыв в точке x_0 является разрывом первого рода, или скачком;

– если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности равен бесконечности), и следовательно, не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является разрывом второго рода.

ЗАДАЧА 12. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x}{x^2-9}$.

*Решение.*_ Эта функция является дробно-рациональной, и поэтому она непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля. В точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$ функция не определена, и поэтому разрывна. Нетрудно проверить, что в обеих этих точках односторонние пределы бесконечные:

$$\lim_{x\to -3-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -3+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +3-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty, \qquad \lim_{x\to +3+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty.$$

Следовательно $x = \pm 3$ – точка разрыва второго рода. График этой функции представлен на рис.7.

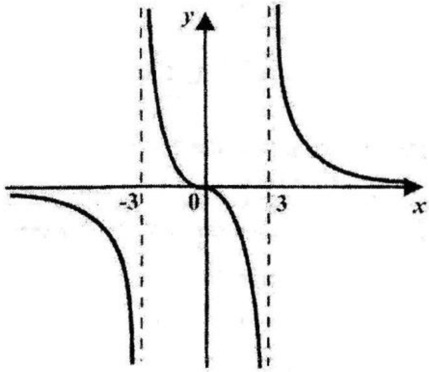


Рис. 7

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Определение производной. Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ обозначается через y' или $f'(x)$. Таким образом, по определению:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция отыскания производной $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Основные правила дифференцирования

Пусть имеются дифференциальные функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$.

1. $C' = 0.$
2. $(U \pm V)' = U' \pm V'.$
3. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$, $C = const.$
4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'.$
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} (V \neq 0).$

Пусть $y = f(x)$ – сложная функция, т.е. $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений x и y существуют производные $f'(u)$ и $u' = \varphi'(x)$, то существует и производная от y по x, причем

$$y' = f'(u) \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Дифференцирование основных элементарных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
3. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.
4. $\left(a^n\right)' = a^n \cdot \ln a \cdot u'$.
5. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.
6. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.
7. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
9. $\left(\text{ctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
12. $\left(\text{arctg}u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
13. $\left(\text{arcctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

ЗАДАЧА 13. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций:

$а) y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{5x-4};$

$б) y = \cos\left(\text{arctg}^2 \dfrac{x}{3}\right);$

$в) y = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x};$

$г) y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}};$

$д) y \cdot \cos 3x - x^2 \cdot \sin y = o.$

Решение. а) Вводя дробные показатели и пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y=\left(x^3-3x^2\right)^{\frac{1}{5}}-\left(5x-4\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$y'=\frac{1}{5}\left(x^3-3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(x^3-3x^2\right)'-\frac{1}{3}\left(5x-4\right)^{-\frac{2}{3}}\left(5x-4\right)'=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^3-3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(3x^2-6x\right)-\frac{1}{3}\left(5x-4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5=\frac{3x^2-6}{5\sqrt[5]{\left(x^3-3x^2\right)^4}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{\left(5x-4\right)^2}}.$$

б) В данном случае сложная функция составлена наложением ряда функциональных зависимостей. Чтобы получить для какого-нибудь значения x значение функции, надо сначала x разделить на 3, потом найти $\operatorname{arctg}(\frac{x}{3})$, далее возвести результат в квадрат и взять от него косинус. Следовательно, функцию можно рассматривать как сложный косинус, т.е. представить в форме $y=\cos(u)$, $u=\operatorname{arctg}^2(\frac{x}{3})$.

Применяя правило дифференцирования сложной функции

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ y'=f'(u)\cdot u',$$

получаем

$$y'=\left(\cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\right)'=-\sin\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)'.$$

Мы пришли к дифференцированию более простой, хотя еще сложной функции. У нее последней операцией является возведение в квадрат, поэтому эту функцию надо начинать дифференцировать по правилу дифференцирования степени. Таким образом,

$$\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)'=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)'=$$

$$2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{\left(\frac{x}{3}\right)'}{1+\frac{x^2}{9}}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{9+x^2}{9}}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{9+x^2}.$$

Следовательно,

$$y'=\left(\cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\right)'=-\sin\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{6}{9+x^2}.$$

Итак, при нахождении производной сложной функции главной задачей является умение правильно выделить последнюю операцию, с которой и начинается дифференцирование в виде цепочки простых функций. Это помогает правильно вычислить производную, не потеряв ни одного промежуточного аргумента.

в) Данная функция является показательно-степенной функцией типа $y=u^v$, где u и v – функции от x. Для нахождения производных подобных функций воспользуемся приемом логарифмического дифференцирования $\ln y = v\ln u$.

Дифференцируя последнее соотношение, имеем

$$\frac{y'}{y}=v\frac{u'}{u}+v'\ln u.$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, получаем окончательно после очевидных преобразований

$$y'=vu^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'.$$

Применяя этот метод, будем иметь

$$\ln y = 2x\ln\left(\sin 2x+x^2\right).$$

Дифференцируем обе части равенства. Учитывая, что в левой части равенства стоит логарифм от функции, имеем:

$$\frac{y'}{y}=2\ln\left(\sin 2x+x^2\right)+2x\frac{\left(\sin 2x+x^2\right)'}{\sin 2x+x^2};$$

$$\frac{y'}{y}=2\ln\left(\sin 2x+x^2\right)+2x\frac{\left(\cos 2x\cdot 2+2x\right)}{\sin 2x+x^2};$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(\sin 2x+x^2\right)^2+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2};$$

$$y'=y\cdot\left[\left(\ln\left(\sin 2x+x^1\right)^2\right)+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2}\right];$$

$$y'=\left(\sin 2x+x^2\right)^{2x}\left[\left(\ln\left(\sin 2x+x^2\right)^2\right)+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2}\right].$$

г) Легко увидеть, что данное выражение будет удобно дифференцировать, если, пользуясь правилом логарифмирования степени и дроби преобразовать правую часть в разность

$$y=\frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\cos x\right)-\ln\left(1-\sin x\right)\right);$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 x-\sin x+\cos x+\cos^2 x}{\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\sin x+\cos x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$$

д) В данном случае зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана уравнением, которое не разрешено относительно функции *y*. Чтобы найти производную y', следует дифференцировать по *x* обе часть заданного уравнения, считая при этом *y* функцией от *x*, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Характерно, что производная неявной функции выражается через *x* и *y*. Имеем:

$$y'\cos 3x-3y\sin 3x-2x\sin y-x^2\cos y\cdot y'=0;$$

$$y'\left(\cos 3x-x^2\cos y\right)=3y\sin 3x+2x\sin y;$$

$$y'=\frac{3y\sin 3x+2x\sin y}{\cos 3x-x^2\cos y}.$$

ЗАДАЧА 14. Вычислить приближенное значение $\sqrt[n]{a}$, заменив в точке $x=x_0$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом при n = 4, a = 2386, x_0 =2401.

Решение. Известно, что дифференциал dy функции $y=f(x)$ представляет собой главную часть приращения этой функции Δy. Если приращение аргумента x мало по абсолютной величине, то приращение функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta y\approx dy$.

Так как $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, а $dy=f'(x)dx$, то имеет место приближенное равенство

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx.$$

Пусть $x=x_1$, $x_1+\Delta x=x_2$, т.е. $\Delta x=x_2-x_1$.

Тогда $f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1)(x_2-x_1)$ или $f(x_2)\approx f(x_1)+f'(x_1)\Delta x$.

Полученное приближенное равенство дает возможность найти значение функции при $x=x_2$, если известно значение функции и ее производной при $x=x_1=2401$.

Положив $x_1=2401,\ x_2=2386,\ \Delta x=2386-2401=-55.$

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[4]{x};\ y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}};$

$$\sqrt{2386} = \sqrt[4]{2401-55} \approx \sqrt[4]{2401} - \frac{55}{4\sqrt[4]{2401^3}} \approx$$

$$\approx 7 - \frac{55}{3443} = 7 - \frac{55}{1372} = 6,959.$$

ЗАДАЧА 15. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ и построить ее график.

Решение. Исследование функции включает в себя выполнение таких этапов:

1. Нахождение области определения функции.

2. Исследование симметрии графика функции (определение четности, нечетности, периодичности функции).

3. Исследование поведения функции на границе области определения, нахождение асимптот. Исследование функции на непрерывность.

4. Нахождение корней функции и определение интервалов знакопостоянства.

5. Нахождение точек экстремума и определение интервалов монотонности.

6. Нахождение точек перегиба и определение направления выпуклости.

7. Построение графиков.

Проведем исследование функции $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$. по предложенной схеме.

1. Функция существует всюду, кроме точки $x = 2$, т.е. на интервале $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Функция общего вида, т.е. не обладает симметрией.

3. Найдем предельные значения на границе существования:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\left(x^2-x-6\right)\cdot\lim_{\substack{x\to 2-0\\ 2-0<0}}\frac{1}{x-2}=-4\lim_{\substack{x\to 2-0\\ 2-0<0}}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-6}{x-2}-4\lim_{\substack{x\to 2+0\\ x-2>0}}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Прямая x = 2 является вертикальной асимптотой.

Найдем, если существует, наклонную асимптоту. Уравнение наклонной асимптоты: $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, а $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

Найдем k и b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6}{x-2}=1.$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ график функции асимптотически приближается к прямой $y=x+1$.

4. Найдем точки пересечении графика с осями координат. При $x=0, y=3$. График проходит через точку A(0;3). Положим, то $y=0$, тогда $\dfrac{x^2-x-6}{x-2}=0,\ x^2-x-6=0,\ x_1=3,\ x_2=-2$. График проходит через точки B(3;0), C(-2;0). Определим интервалы знакопостоянства функции. Построим числовую прямую и нанесем точки, в которых функция обращается в нуль и не существует, и определим знаки функции (рис. 8)

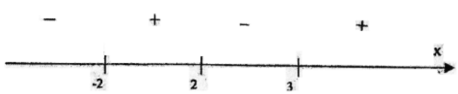
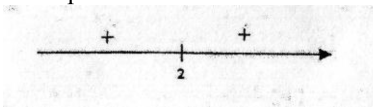


Рис.8

5. Для нахождения точек экстремума найдем производную:

$$y'=\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}\right)'=\frac{(2x-1)(x-2)-x^2+x+6}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}.$$

Найдем корни числителя $x^2-4x+8=0$, $D=16-32=-16<0$, нет действительных корней. Знаменатель равен нулю при $x=2$, но в этой точке функция не определена. Отсюда следует, что функция не имеет экстремумов. Найдем интервалы монотонности



т.е. функция везде возрастает.

6. Для нахождения точек перегиба найдем вторую производную:

$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4}=-\frac{8}{(x-2)^3}.$$

Критических точек второго рода нет; $y''(x)>0$ при $x<2$, кривая вогнута вниз $(\bigcup)$ на интервале $(-\infty;2)$; $y''(x)<0$ при $x>2$ на интервале $(2;\infty)$ кривая вогнута вверх $(\bigcap)$.

Строим график (рис.9):

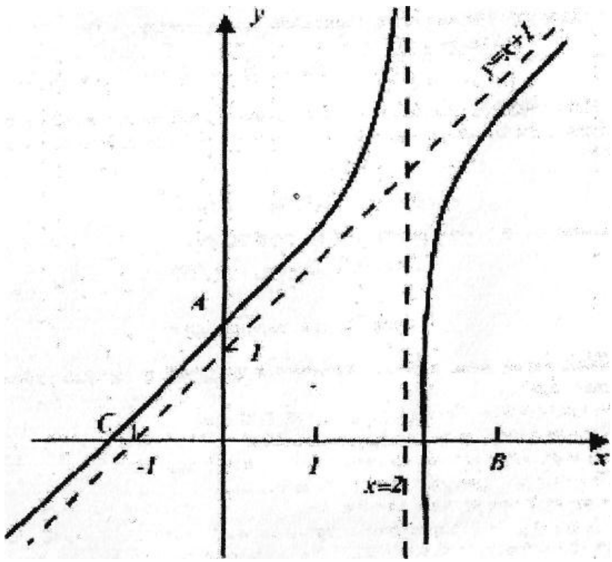


Рис.9

ЗАДАЧА 16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение. Наибольшее значение функции на отрезке $a \le x \le b$ обозначается $\max\limits_{[a;b]}(f)$, наименьшее значение $\min\limits_{[a;b]}(f)$. Непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$:

а) найти все критические точки, принадлежащие интервалу *(a;b)* и входящие в область определения функции; вычислить значение функции в этих точках;

б) вычислить значение функции на концах отрезка, т.е. найти $f(a), f(b)$;

в) сравнить полученные результаты: наибольшие из значений, найденных в пп. a и b будет наибольшим значением на заданном отрезке $[a;b]$; аналогично, наименьшее из значений, найденных в пп. а и б будет наименьшим значением функции на отрезке $[a;b]$.

Найдем критические точки, принадлежащие интервалу (–1;3):

$$y' = \frac{-10x(x+2)}{(x^2+2x+x)^2}\ ;\ -10x(x+2)=0\ ;\ x_1 = 0, x_2 = -2\ .$$

Найденная критическая точка $x_1 = 0$ входит в интервал, а $x_2 = -2$ не входит в интервал. Вычислим значение функции в точке x=0 и на концах отрезка $x = -1$, $x = 3$.

$$f(0) = 5,\ f(-1) = 0,\ f(3) = 2\frac{6}{17}$$

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что

$$y_{\min} = f(-1) = 0;\ \ y_{\max} = f(0) = 5.$$

Вопросы для самопроверки

1. Напишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости.

2. Напишите формулу для вычисления координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.

3. Что называется уравнением линии на плоскости?

4. Как убедиться, что данная точка лежит на данной линии?

5. Напишите уравнение декартовых осей координат.

6. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

7. Напишите формулу для определения тангенса угла между двумя прямыми по их угловым коэффициентам.

8. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

9. Напишите общее уравнение прямой.

10. Как найти координаты точки пересечения двух прямых, если их уравнения заданы?

11. Какие линии называются кривыми второго порядка?

12. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат.

13. Напишите уравнение окружности с центром в точке (a,b) и с радиусом равным R.

14. Напишите канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

15. Что называется вектором и как он изображается?

16. Что называется скалярным произведением векторов? Перечислите его основные свойства.

17. Чем отличаются компоненты вектора по осям координат от его проекций на оси координат?

18. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства?

19. Что называется смешанным произведением векторов? Каков его геометрический смысл? Перечислите его основные свойства.

20. Каково условие компланарности трех векторов?

21. Каков геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости?

22. Как узнать, лежит ли данная точка на данной плоскости?

23. Записать условия пересечения прямой с плоскостью и условия принадлежности прямой плоскости,

24. При каких условиях возможно перемножение матриц?

25. Какая матрица называется обратной к данной?

26. Что такое обратная матрица? Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.

27. Сформулируйте теорему Кронекера – Капели.

28. В чем состоит метод Гаусса?

29. Сформулируйте правило Крамера решения систем линейных уравнений.

30. Какая переменная величина называется функцией от другой переменной величины?

31. Что называется областью определения функции?

32. Что называется графиком функции?

33. Какая функция называется обратной к данной функции?

34. Перечислите основные элементарные функции.

35. Какая функция называется сложной?

36. Сформулируйте определение предела переменной величины, предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному пределу и предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

37. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой величины.

38. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

39. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке, на интервале и на отрезке.

40. Сформулируйте определение производной. Каков ее механический и геометрический смысл?

41. Сформулируйте определение дифференциала функции.

42. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

43. Каков механический смысл второй производной?

44. Сформулируйте теоремы Роля, Лагранжа. Каков их геометрический смысл?

45. Напишите формулы Маклорена для функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

46. Сформулируйте определение функции, возрастающей и убывающей на отрезке.

47. Сформулируйте два правила для отыскания экстремума функции.

48. Сформулируйте определение выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба.

49. Сформулируйте определение асимптот кривой: вертикальных, наклонных и горизонтальных.

IV. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Тема 8. *Комплексные числа*

Литература: [3, гл. VII, §§ 1-8, упражнения 2-5, 7, 8].

ТЕМА 9. *Неопределенный интеграл*

Литература:[3, гл.X; 4, задачи 1032, 1038, 1043, 1046, 1052, 1064, 1191, 1192, 1212,1215, 1217, 1262, 1285, 1292, 1317, 1318, 1336, 1340, 1341].

Темы 10, 11. *Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла*

Литература:[3, часть11, гл. XI, 1-8, задачи 1521, 1531, 1536, 1547, 1552, 1582, 1583, 1626, 1650, 1665, 1686, 1735, 1754, 1758].

Разберите решение задач 21-23 методических указаний.

Тема 12. *Дифференциальные уравнения первого порядка*

Литература: [3, гл. XII., §§1-7,32; 4, №№ 2742,2744, 2746-,2748, 2769, 2770, 2771, 2775, 2786, 2789, 2791, 2902-2908]

Разберите решение задач 24-26 данных методических указаний.

Тема 13. *Дифференциальные уравнения второго порядка. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

Литература: [3 , гл. XIII, §§16, 17, 21-25, 29, 30; 4 , №№ 2912, 2914, 2917, 2924, 2976, 2981, 2982, 2995, 3001, 3005, 3039, 3043, 3080, 3082]

Разберите решение задач 27-30 данных методических указаний.

Комплексные числа

Комплексные числа – выражения вида $z = a + ib$, где a,b – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1(\sqrt{-1} = i)$. Модуль числа z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

Сопряженным к данному числу $z = a + bi$ называют число $\overline{z} = a - bi$.

С комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ можно производить арифметические операции (по правилам алгебры):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} i.$$

Решение квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac.$

1) если $D > 0$, то 2 действительных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) если $D=0$, то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$,

3) если $D < 0$, то 2 комплексных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2a} \cdot i.$$

Комплексное число $z = x + iy$ можно представить в тригонометрической форме $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, φ - аргумент числа z. Значение аргумента, заключенное в границах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, называется главным значением аргумента $\arg z$ и определяется по формуле

$$Arg\,z=\begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} \text{ при } x>0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x}+\pi \text{ при } x<0; y\ge 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x}-\pi \text{ при } x<0; y<0. \end{cases}$$

Кроме тригонометрической формы комплексных чисел $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, используют показательную форму комплексного числа: $z=re^{i\varphi}$, где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа.

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня удобно выполнять в тригонометрической или показательной форме.

Пусть даны два комплексных числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_2e^{i\varphi_2}$.

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, r_2\ne 0.$$

$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

ЗАДАЧА 17. Даны два комплексных числа $z_1=\sqrt{3}+i$ и $z_2=2-2i$. а) Найти их сумму z_1+z_2 и разность z_1-z_2. б) Перевести их в тригонометрическую и показательную форму и найти $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^3.

Решение.

а) $z_1+z_2=\sqrt{3}+i+2-2i=2+\sqrt{3}-i;$

$z_1-z_2=\sqrt{3}+i-2+2i=-2+\sqrt{3}+3i.$

б) Найдем модуль и аргумент $z_1=\sqrt{3}+i$. $|z_1|=r_1=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2;$

$\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, тогда $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Для числа z_2: $|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$ $\arg z_2=\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$,

тогда

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$z_1\cdot z_2 = 2\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра:

$$\left(z_1\right)^3 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot 3+i\sin\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

ЗАДАЧА 18. Извлечь $\sqrt[3]{a}$, где $a = 1+i$.

Решение. Число a представим в тригонометрической форме. Найдем модуль данного числа по формуле $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Для того чтобы найти аргумент, построим точку на комплексной плоскости.

Находим главное значение аргумента $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

$$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$$

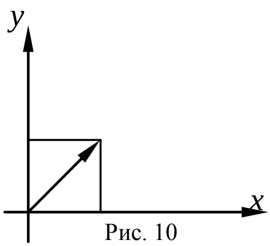


Рис. 10

Для вычисления корня *n-й степени* из данного числа используем формулу

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$ (k = 0, 1, 2,…, n –1), тогда имеем

$$a_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12});$$

$$a_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{9}{12}\pi+i\cdot\sin\frac{9}{12}\pi);$$

$$a_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{17}{12}\pi+i\cdot\sin\frac{17}{12}\pi) .$$

ЗАДАЧА 19. Решить уравнение $z^3-6z-9=0$.

Решение. Рассматривая делители свободного члена, убеждаемся в том, что $z = 3$ является корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на z – 3:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 6z - 9 & z-3 \\ \underline{z^3 - 3z^2} & \overline{z^2+3z+3} \\ 3z^2 - 6z & \\ \underline{3z^2 - 9z} & \\ 3z - 9 & \\ \underline{3z - 9} & \\ 0 & \end{array}$$

И, решая квадратное уравнение $z^2 + 3z + 3 = 0$, получаем остальные корни.

Итак, $z_1 = 3$, $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Таблица основных интегралов$\int$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

ЗАДАЧА 20. Найти определенный интеграл $I = \int 2xe^{x^2}dx$.

Решение. Заметим, что $2xdx$ есть нечто иное, как дифференциал $d(x^2)$ $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = \int e^u du$, где $u = x^2$. последний интеграл нам известен: он равен $e^u + C$, значит $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$

ЗАДАЧА 21. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+1) =$

$$= \left[x^2+1=u\right] = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

ЗАДАЧА 22. Найти интеграл

$$J = \int x^2 \ln(1+x^2)dx$$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Схема ее применения такова: подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде двух множителей U и dV, за dV выбирается выражение, содержащее dx, из которого с помощью интегрирования можно найти V, за U в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например, обратные тригонометрические функции, логарифмы, многочлены).

Положим $U = \ln(1+x^2)$, $dU = \frac{2x}{1+x^2}dx$, $dV = x^2 dx$,

$V = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Из формулы (1) получим

$$\int x^2 \ln(1+x^2)dx = \frac{x^3}{3}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3\, 2xdx}{3(1+x^2)} = \frac{x^3}{3}\ln(1+x^2) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}$$

Так как степень числителя больше степени знаменателя, выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\dfrac{x^4}{x^4+x^2} & \dfrac{1+x^2}{x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2}} \\ -\dfrac{-x^2}{-x^2-1} & \\ 1 & \end{array}$$

Т.е. $\dfrac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.

$$J = \frac{x^3}{3}\ln(1+x^2) - \frac{2}{3}\int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+x^2) - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+x^2) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\mathrm{arctg}x + C .$$

ЗАДАЧА 23. Найти интеграл $J = \int \dfrac{(2x^2 - 3x)dx}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$

Решение. Интегрируется правильная рациональная дробь. Разложим ее знаменатель на множители и представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2 - 3x}{(x^2+3)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} .$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, получим тождество:

$$2x^2 - 3x = Ax^2 + 3A + Bx^2 + Bx + Dx + D .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ B + D = -3 \\ 3A + D = 0 \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения

$$A = \frac{5}{4};\ B = \frac{3}{4};\ D = -3\frac{3}{4} .$$

Имеем $J=\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}}{x^2+3}dx=$

$$=\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{x^2+3}-\frac{15}{4}\int\frac{dx}{x^2+3}$$

$$=\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{8}\ln(x^2+3)-\frac{15}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

ЗАДАЧА 24. Вычислить интеграл $J=\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

Решение. Положим $x=2\sin t$. Такая подстановка возможна (так как при любом значении под корнем получается неотрицательная величина) и приводит к тому, что корень под знаком интеграла исчезает. При этом изменению переменной x от 0 до 1 соответствует изменение переменной t от t=0 до $t=\pi/6$.

Применим формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Получаем

$$J=\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

ЗАДАЧА 25. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y=-x;\ y=2x-x^2$.

Решение. Сделаем схематический чертеж. Методом выделения полных квадратов приведем уравнение параболы к виду $y-1=-(x-1)^2$; парабола симметрично относительно прямой x=1, ветвями направлена вниз и вершина ее лежит в точке (1;1). Совместным решением уравнений параболы $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$ определяем абсциссы точек A и B: $x_A=0, x_B=3$. (рис. 11).

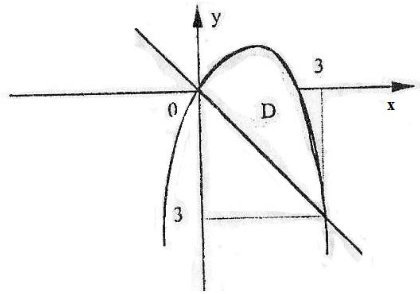


Рис. 11

Если область ограничена сверху прямой $y = f_1(x)$, а снизу $y = f_2(x)$, то площадь S_D вычисляется по формуле:

$$S = \int_b^a \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

Теперь по этой формуле вычисляем искомую площадь при $f_1(x) = -x$; $f_2(x) = 2x - x^2$:

$$S = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x))dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = \frac{9}{2} \quad \text{(кв. ед.)}$$

ЗАДАЧА 26. Вычислить длину дуги кривой $x = \ln\cos y$, находящуюся между прямыми $y = 0$ и $y = \pi/3$.

Решение. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

то длина ее дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Если кривая задана в прямоугольной системе координат $y = f(x)$ и нужно найти длину дуги, содержащейся между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$

Дифференцируя, находим

$$x' = (\ln\cos y)' = \frac{-\sin y}{\cos y} = -\mathrm{tg} y\ ,$$

И длина дуги

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(-\mathrm{tg} y)^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 y}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dy}{\cos y} = \ln\left|\mathrm{tg}(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\Bigg\|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \ln\mathrm{tg}\frac{5}{12}\pi\ \cdot$$

ЗАДАЧА 27. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ области, содержащейся между параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Если область ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, а снизу $y = f_1(x)$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_{x_a}^{x_b} \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx\ ,$$

где $x_a < x_b$ – абсциссы точек пересечения кривых. Решив совместно систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases}$$

найдем точки пересечения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Объем находится подстановкой в формулу объема полученных данных:

$$V = \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10}\pi \quad \text{(куб. ед).}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции называется равенство, которое обязательно содержит производные этой функции и может содержать функцию $y(x)$ и аргумент x.

Наивысший порядок входящей в дифференциальное уравнение производной называется порядком дифференциального уравнения.

В самом общем виде дифференциальное уравнение n-го порядка записывается так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Любая функция, которая при подстановке в (1) вместо неизвестной функции y обращает уравнение в тождество, называется решением уравнения. График решения называется интегральной кривой.

Уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений. Выбор одного из них определяется физическими или другими соображениями, представленными в форме начальных условий. Для уравнения (1) начальные условия имеют вид равенств:

$$\begin{aligned} & y(x_0) = y_0, \\ & y'(x_0) = y_0^1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{2}$$

которым должно удовлетворять решение, называемое частным решением.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего условиям (2), называется задачей Коши.

При решении задач на составление дифференциальных уравнений нужно учитывать физические законы, которым подчиняются переменные.

ЗАДАЧА 28. Пусть тело, имеющее температуру 80^0С, помещено в среду температуры 20°С. Требуется найти закон, по которому изменяется температура тела в зависимости от времени.

Решение Искомая температура есть функция от времени; обозначаем ее через *T(t).*

Из физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела в окружающей среды. Учитывая, что функция T(t) убывающая, получаем:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k\left[T(t) - 20\right],$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dT}{T-20} = -kdt, \ln|T-20| = -kt - \ln|C|, T(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

Значение произвольной постоянной найдем из условия, что при t = 0 T = 80,тогда C = 60. Таким образом, искомое решение имеет вид:

$$T(t) = 60e^{-kt} + 20.$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной: $y' = f(x, y)$, или $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$. (3)

Задача Коши для уравнения (3) имеет следующий вид:

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. (4)

Решение задачи Коши (4) обычно находится не непосредственно, а с помощью общего решения. Общим решением дифференциального уравнения (3) называется функция, удовлетворяющая двум требованиям:

1) при любом допустимом значении произвольной постоянной функция является решением уравнения (3);

2) для любого допустимого начального условия существует такое значение произвольной постоянной, что функция удовлетворяет начальному условию.

Решение задачи Коши, таким образом, состоит из двух этапов. Вначале по уравнению (3) ищем его общее решение $y = \varphi(x, C)$. Затем, используя начальное условие, получаем уравнение относительно *C*. Решив его, найдем *C*. Решение задачи Коши имеет вид: $y = \varphi(x)$.

Общее решение уравнения (3) можно найти в тех случаях, когда функция $f(x; y)$ обладает определенными свойствами.

Уравнение

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Оно решается путем разделения переменных

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

и интегрирования

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \qquad (5)$$

Последнее равенство называется общим интегралом. Если из (5) сможем выразить *y*, получим общее решение $y = \varphi(x, C)$. В противном случае, используя начальное условие $y(x_0) = y_0$, найдем С и запишем решение задачи Коши в виде частного интеграла:

$\Phi(x, y) = 0$.

ЗАДАЧА 29. Найти частное решение уравнения $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Запишем данное уравнение в дифференциальной форме:

$(1+e^{2x})y^2dy - e^x dx = 0$.

Теперь разделим переменные:

$$y^2dy - \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{C}{3};\ \frac{y^3}{3} - \mathrm{arctg}(e^x) = \frac{C}{3};\ y = \sqrt[3]{C + 3\mathrm{arctg}e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения. Использовав начальное условие, определяем значение произвольной постоянной:

$$1 = \sqrt[3]{c + \frac{3}{4}\pi},\ c = 1 - \frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\pi + 3\mathrm{arctg}e^x}.$$

Решение однородных дифференциальных уравнений рассмотрим на примере.

ЗАДАЧА 30. Найти частное решение дифференциального уравнения $2x^2y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$

Решение. Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ - однородные второго измерения, то данное уравнение однородное.

Разрешим уравнение относительно y': $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Сделаем замену : $y = xu$, $y' = u + xu'$.

Тогда $u + xu' = \dfrac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем числитель и знаменатель дроби на x^2. Имеем:

$$u + xu' = \frac{1+u^2}{2},\ x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2-2u}{2}.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1+u^2-2u} = \frac{dx}{2x},\qquad \int\frac{du}{1+u^3-2u} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},\qquad -\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C|,$$

$$1 = (1-u)\ln(C\sqrt{|x|}).$$

В последнее выражение вместо *u* подставим значение *y* / *x*.

Получим общий интеграл

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right),\ x=(x-y)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно *y*, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(c\sqrt{|x|}\right)}.$$

Использовав начальное условие $y(1)=0$, определяем значение *C*:

$$0=1-\frac{1}{\ln c},\ \ln c=1,\ c=e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}.$$

Уравнение

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

линейное относительно неизвестной функции *y* и ее производной y', называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение такого уравнения всегда можно записать в виде

$$y=e^{-\int P(s)ds}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right),$$

где *C* – произвольная постоянная. Рассмотрим решение линейного уравнения на примере.

ЗАДАЧА 31. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'+y\text{tg}x=\frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Сделаем подстановку Бернулли: $y=UV$,

$$y'=U'V+V'U.$$

Получаем:

$$U'V+V'U+UV\text{tg}x=\frac{1}{\cos x},U'V+U\left(V'+V\text{tg}x\right)=\frac{1}{\cos x}.$$

Находим частное решение: $V'+V\text{tg}x=0$;

$$dV + V\mathrm{tg}x dx = 0\,,\ \frac{dV}{V} + \mathrm{tg}x dx = 0, \ln(V) = \ln(\cos x \cdot c), V = c\cdot\cos x.$$

Полагая C=1, выбираем частное решение $V = \cos x$. Далее ищем общее решение уравнения $U'V = \dfrac{1}{\cos x}$, где $V = \cos x$. Имеем:

$$U' = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\ U = \int \frac{dx}{\cos^2 x}. = \mathrm{tg}x + C$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = U\cdot V = \left(\mathrm{tg}x + C\right)\cos x\,.$$

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка.

1.Общее решение уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (6)$$

находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение (n – 1) порядка:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1\left(x\right) + C_1\,.$$

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению (n-2) порядка:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x + C_2\,.$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n\left(x\right) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n\,,$$

где C_i (i=1,…, n) – произвольные постоянные.

2. Пусть дифференциальное уравнение n-го порядка не содержит искомой функции и ее производных до (k–1) порядка включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (7)$$

Вводя новую неизвестную функцию $Z(x) = y^{(k)}$ и учитывая, что $y^{(k+1)} = Z'$, $y^{(k+2)} = Z''$, $y^{(n)} = Z^{(n-k)}$ приходим к уравнению (n-k) порядка относительно функции Z, т.е. понижаем порядок уравнения на k. Если удастся отыскать общее решение уравнения (7) в виде

$$z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right),$$

то получим дифференциальное уравнение:

$$z = y^{(k)} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)$$

вида (6), решение которого находят k -кратным интегрированием. Например, чтобы найти общее решение дифференциального уравнения

$y''=1/x$, интегрируем его и получаем $y'=\ln|x|+C_1$. Применяя формулу интегрирования по частям, будем иметь:

$$y=\int(\ln|x|+C_1)dx=\int\ln|x|\,dx+C_1x+C_2=x\ln|x|-x+C_1x+C_2,$$

или, взяв $C_1-1=C_1'$, получим

$$y=x\ln|x|+C_1'x+C_2.$$

3. Если дифференциальное уравнение явно не содержит *y*, т. е.

$$F(x,y',y'')=0,$$

то, полагая $y'=P$, получаем уравнение порядка на единицу ниже

$$F(x,p,p')=0.$$

ЗАДАЧА 32. Найти частное решение уравнения

$$xy''=y'\ln\frac{y'}{x},\ y(1)=e,\ y'(1)=e^2.$$

Решение. Данное уравнение не содержит *y*. Понизим порядок этого уравнения на единицу, положив $y'=P$. Тогда $y''=P'$' и исходное уравнение превращается в однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомой функции *P*:

$$xp'=p\ln\frac{p}{x},$$

делаем подстановку $u=\dfrac{p}{x}$ Тогда $p'=u+xu'$ и уравнение принимает вид

$$u+xu'=u\ln u.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно находим:

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x},\ \ln|\ln u-1|=\ln x+\ln C_1,$$

$$\ln u-1=C_1x,\ u=e^{1+C_1x},\ p=xe^{1+C_1x}.$$

Так как $p=y'$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, которое решается однократным интегрированием

$$y'=xe^{1+C_1x}:$$

$y=\int xe^{1+C_1x}dx=\int xd(e^{1+C_1x})=\dfrac{1}{C_1}\left(x\cdot e^{1+C_1x}-\int e^{1+C_1x}dx\right)=\dfrac{C_1x-1}{C_1^2}e^{1+C_2x}+C_2$ Получили общее решение исходного уравнения.

Определяем значение произвольных постоянных C_1 и C_2, используя начальные условия $y(1)=e$, $y'(1)=e^2$. Получаем систему уравнений

$$e=\frac{C_1-1}{C_1^2}e^{1+C_1x}+C_2,\ e^2=e^{1+C}$$

из которой находим, что $C_1=1$. $C_2=e$.

Следовательно, частное решение исходного уравнения определяется формулой

$$y=(x-1)e^{1+x}+e.$$

4. Если дифференциальное уравнение явно не содержит x, например,

$$F(y,y',y'')=0,$$

то, полагая $y'=p$, получаем уравнение порядка на единицу меньше.

ЗАДАЧА 33. Решить задачу Коши $y''y^3=1$, $y=1, y'=1$ при $x=1/2$.

Решение. Данное уравнение явно не содержит аргумента *x*. Поэтому путем замены его порядок можно понизить на единицу и получить дифференциальное уравнение первого порядка относительно *p*. Это будет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$p\frac{dp}{dy}y^3=1.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$y'=p(y);\ y''=p\frac{dp}{dy},$$

$$pdp=\frac{dy}{y^3}.$$

После интегрирования получаем:

$$\frac{p^2}{2}=-\frac{1}{2y^2}+C_1,\ p=\sqrt{2C_1-\frac{1}{y^2}}.$$

С учетом того, что $p=y'$, последнее уравнение перепишем в виде

$$y'=\sqrt{2C_1-\frac{1}{y^2}}$$

Прежде чем решить его, определим значение произвольной постоянной C_1, воспользовавшись начальными условиями:

$1=\sqrt{2C_1-1}$, $C_1=1$.

Решаем уравнение: $y'=\sqrt{2-\dfrac{1}{y^2}}=\dfrac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}}=\int dx,\ \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+C_2,\ \sqrt{2y^2-1}=2x+2C_2.$$

Используя начальное условие $y(1/2)=1$, получаем, что $C_2=0$. Тогда

$\sqrt{2y^2-1}=2x$, $2y^2-4x^2=1$.

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+py'+qy=0, \qquad (8)$$

где p и q – действительные числа.

Если k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения

$k^2+pk+q=0$,

то общее решение уравнения (8) записывается в одном из следующих трех видов:

1. $y=C_1e^{k_1x}x+C_2e^{k_3x}$, если k_1 и k_2 действительные числа и $k_1\neq k_2$
2. $y=e^{k_1x}\left(C_1+C_2x\right)$, если k_1=k_2
3. $y=e^{ax}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$, если $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-i\beta$ $\left(\beta\neq 0\right)$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=f\left(x\right) \qquad (9)$$

можно записать в виде суммы $y=y_0+Y$,

где y_0 – общее решение соответствующего уравнения (8) без правой части, определяемое по вышеприведенным формулам *y* частное решение данного уравнения (9).

Функция *y* может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

1. $f\left(x\right)=e^{ax}P_n\left(x\right)$ где $P_n(x)$ - многочлен степени *n*.

Если *a* не является корнем характеристического равнения, то полагают

$Y = e^{ax} Q_n(x)$,

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения, то $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$, где r – кратность корня a.

2. $f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$.

Если $a \pm ib$ не является корнем характеристического уравнения, то полагают

$Y = e^{ax}\left(S_N(x)\cos bx + T_x(x)\sin bx\right)$,

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = MAX[n; m]$. Если же $a \pm ib$ не является корнем характеристического уравнения, то

$Y(x) = x^r e^{ax}\left(S_N(x)\cos bx + T_x(x)\sin bx\right)$,

где r – кратность корней $a \pm ib$.

ЗАДАЧА 34. Найти общее решение уравнения

$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Правая часть специального вида и 1 является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде

$y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$.

Дифференцируем y 2 раза и подставляя производные в исходное уравнения, получаем:

$e^x(6A - 7A + A)x^2 + (6B - 7B - 14A + 4A + B)x + 2A - 5B = e^x(x-2)$.

Сокращая обе части последнего тождества на $e^x \neq 0$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, имеем систему для нахождения A и B:

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5A = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{10} \\ B = \dfrac{9}{25} \end{cases}$$

Тогда частное решение Y примет вид:

$$Y = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Общим решением будет являться функция

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

ЗАДАЧА 35. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$3(xy' + y) = xy^2$$

Решение.

Преобразуем уравнение

$$xy' + y = \frac{1}{3}xy^2$$

Разделим на x:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{3}y^2$$

Это уравнение Бернулли. Разделим на y и введём новую переменную *u:*

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{yx} = \frac{1}{3}\ ,\ u = \frac{1}{y}\ ,\ u' = -\frac{y'}{y^2}\ ,\text{ тогда: } -u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{3}\ ,\ u' - \frac{u}{x} = -\frac{1}{3}\ .$$

Это линейное уравнение первого порядка. Решим методом вариации произвольной постоянной:

$$u' - \frac{u}{x} = 0,\ \frac{du}{dx} = \frac{u}{x},\ \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем: $\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}$; $\ln|u| = \ln|x| + \ln|c| = \ln|x*c|$, потенцируем: $u = x\cdot c(x)$ (считаем, что $c = c(x)$ – неизвестная функция).

$u' = c(x) + x\cdot c'(x)$. Подставим в уравнение:

$$c(x) + x\cdot c'(x) - \frac{x\cdot c(x)}{x} = -\frac{1}{3}\ ;$$

$$x\cdot c(x) = -\frac{1}{3};\quad c'(x) = -\frac{1}{3x};\quad c(x) = \int -\frac{dx}{3x} = -\frac{1}{3}\ln|x| + C_1\quad ,\ \text{тогда}$$

$$u = x\left(-\frac{1}{3}\ln|x| + C_1\right);\ u = \frac{1}{y}\ ;\ \frac{1}{y} = x\left(-\frac{1}{3}\ln|x| + C_1\right)\ ;$$

$$y = \frac{1}{x(-\frac{1}{3}\ln|x| + C_1)}$$ – общее решение дифференциального уравнения.

ЗАДАЧА 36. Найти общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 4.$$

Из первого уравнения определяем $z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right)$ и тогда из второго будем иметь $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Подставляя z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение, полученное после дифференцирования, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и одной неизвестной:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -6x^2 - 4x + 3$$

Решая его, найдем:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^2 + x,$$

и тогда

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) = -C_1e^{2x} + \frac{C_2}{4}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2.$$

Аналогично можно поступать и в случае системы с большим числом уравнений.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется комплексным числом?
2. Как производятся алгебраические действия над комплексными числами?
3. Запишите комплексное число $a+bi$ в тригонометрической и показательной форме.
4. Как производится действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня над комплексными числами? Приведите примеры.
5. Дайте определение первообразной функции и неопределенного интеграла.
6. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
7. Выведите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
8. Выведите формулу интегрирования по частям
9. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на простейшие множители.
10. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых и кратных действительных корней знаменателя.
11. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби для случаев, когда имеются пары простых или кратных комплексно-сопряженных корней.
12. Изложите метод нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R- рациональная функция.
13. Дайте определение определенного интеграла и укажите геометрический и механический смысл.
14. Докажите основные свойства определенного интеграла.
15. Докажите, что если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, а если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
16. Докажите теорему о среднем для определенного интеграла.
17. Докажите, что функция $F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$ является первообразной функции $f(x)$. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
18. Выведите формулу замены переменной в определенном интеграле. Приведите пример.

19. Выведите формулу интегрирования по частям определенного интеграла.

20. Выведите формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла.

21. Выведите формулу парабол (правило Симпсона) для приближенного вычисления определенного интеграла.

22. Дайте определение несобственного интеграла первого рода (интеграла, у которого один или оба предела бесконечны), укажите его геометрический смысл; приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов первого рода.

23. Сформулируйте правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра.

24. Выведите формулу площади криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат.

25. Выведите формулу длины дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат.

26. Выведите формулу вычисления объема тела по известным площадям поперечных сечений. Выведите формулы для вычисления объема тела вращения.

27. Выведите формулу для вычисления координат центра тяжести плоской линии и плоской фигуры.

28. Что называется криволинейным интегралом по длине дуги? Сформулируйте правило его вычисления.

29. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка, его общего и частного решения. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите его геометрический смысл.

30. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод его решения.

31. Дайте определение и изложите метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

32. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной?

33. Изложите метод решения дифференциальных уравнений высших порядков.

34. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n–го порядка (однородного и неоднородного). Какова структура общего решения линейного дифференциального уравнения?

V. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с двумя последними цифрами его зачетной книжки (см. таблицу, с.76–77). По вертикали следует отыскать последнюю цифру зачетки, а по горизонтали – предпоследнюю цифру зачетной книжки. На пересечении найденных строки и столбца приведены номера задач, соответствующих данному варианту. Например, если две последние цифры **37**, на пересечении **7**-й строки и **3**-го столбца записаны номера **10, 16, 23, 36, 44, 55, 68, 71, 82, 92** задач, которые необходимо решить. Контрольные работы, выполненные по другому варианту, не зачитываются.

2. Контрольную работу следует выполнять в тетради (отдельной для каждой работы) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

3. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента и дата отправления работы в БГТУ.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы (как зачтенной, так и незачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Если рецензент предлагает переделать ту или иную задачу в работе или дать более обстоятельное решение и прислать эти исправления для повторной проверки, то это следует выполнить в краткий срок. Если работа не зачтена и отсутствует прямое указание рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решении отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново. Вместе с исправлениями нужно обязательно выслать прорецензированную работу и рецензию, поэтому при выполнении контрольной работы нужно оставлять в конце тетради несколько чистых листов для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

Таблица

В клетках таблицы указаны номера задач для вашего варианта

Цифры зачетки		Предпоследняя цифра номера зачетной книжки			
		1	2	3	4
Последняя цифра зачетной книжки	1	1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100	2, 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 90, 91	3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 81, 92	4, 15, 26, 37, 48, 59, 70, 71, 82, 93
	2	3, 15, 27, 36, 50, 51, 68, 72, 83, 94,	4, 16, 28, 37, 41, 52, 69, 73, 84, 95	5, 17, 29, 38, 42, 53, 70, 74, 85, 96	6, 18, 30, 39, 43, 54, 61, 75, 86, 97
	3	4, 16, 28, 40, 52, 56, 67, 70, 86, 98	5, 17, 29, 41, 53, 54, 68, 72, 77, 100	6, 18, 30, 38, 44, 56, 62, 71, 77, 95	7, 19, 28, 33, 43, 59, 62, 71, 83, 94
	4	5, 17, 29, 31, 42, 55, 61, 72, 86, 93	6, 12, 19, 30, 41, 55, 60, 74, 81, 100	7, 19, 22, 31, 47, 50, 69, 73, 88, 93	8, 12, 24, 37, 41, 56, 64, 72, 86, 99
	5	6, 18, 30, 32, 48, 54, 68, 71, 80, 92	7, 15, 29, 30, 47, 53, 66, 70, 89, 99	8, 14, 28, 34, 44, 59, 63, 70, 83, 97	9, 13, 22, 31, 45, 57, 60, 71, 84, 95
	6	7, 19, 21, 33, 45, 57, 61, 78, 83, 96	8, 16, 22, 38, 47,54, 64, 70, 88, 91	9, 15, 23, 34, 45, 51, 68, 73, 84, 99	10, 12, 28, 36, 48, 53, 66, 72, 85, 91
	7	8, 20, 22, 35, 41, 57, 68, 71, 83, 90	9,12, 27, 31, 42, 58, 66, 78, 81, 91	10, 16, 23, 36, 44, 55, 68, 71, 82, 92	1, 18. 25, 37, 49, 51, 67, 78, 80, 93
	8	9, 11, 24, 36, 44, 51, 62, 78, 83, 91	10,11, 22, 31, 41, 52, 63, 75, 83, 92	1, 12, 28, 36, 42, 58, 63, 73, 88, 93	2, 11, 26, 37, 42, 57, 68, 70, 80, 94
	9	10, 13, 25, 37, 41, 57, 63. 78, 84, 91	1, 15, 24, 33, 48, 57, 68, 71, 88, 100	2, 13, 26, 36, 46, 56,66,73, 83, 93	3, 16, 25, 32, 46, 58, 68, 78, 88, 91
	0	2, 14, 26, 38, 45, 56, 68, 79, 82, 99	3, 15, 27, 38, 42, 54, 65, 78, 89, 91	4, 18, 26, 31, 49, 50, 62, 70, 80, 100	5, 11, 25, 38, 45, 53, 66, 77, 88, 99

Окончание табл.

5	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**	
5, 16, 27, 38, 49, 60, 61, 72,83, 94	6, 17, 28, 39,50, 51, 62, 73, 84, 95	7, 18, 29, 40,41, 52, 63, 74, 85, 96	8, 19, 30, 31,42, 53, 64, 75, 86, 97	9, 20, 21, 32,43, 54, 65, 76, 87, 98	10, 11, 22, 33,44, 55, 66, 77, 88, 99	**1**
7, 19, 21, 40,44, 55, 62, 76, 87, 98	8, 20, 22, 31,45, 56, 63, 78, 89, 99	9, 11, 23, 32,46, 57, 64, 77, 88, 100	10, 12, 24, 33,47, 57, 65, 79, 90, 91	1, 13, 25, 34,48, 58, 66, 80, 81, 92	2, 14, 26, 35,49, 59, 67, 71, 82, 93	**2**
8, 13, 28, 34,45, 56, 69, 70, 87, 92	9, 12, 26, 36,40, 55, 62, 77, 80, 90	1, 11, 22, 35,43,55, 66, 72, 84 , 97	2, 14, 25, 37,41, 53, 64, 72, 77, 99	3, 10, 26, 33,48, 53, 64, 79, 81, 96	4, 17, 29, 32,48, 54, 69, 74, 80, 91	**3**
8, 12, 22, 38,41, 59, 68, 73, 82, 90	9, 16, 23, 35,49, 52, 67, 77, 85, 97	1, 13, 25, 36,41, 54, 63, 79, 87, 93	2, 14, 21, 33,43, 52. 68, 71, 80, 94	3, 11, 25, 35,46, 52, 64, 77, 89, 97	4, 14, 20, 30,46, 54, 67, 77, 83, 91	**4**
1, 17, 23, 31,47, 55, 63, 71, 89, 91	2, 16, 22, 39,43, 51, 64, 71, 83, 92	3, 17, 21, 38,46, 52, 67, 75, 84, 98	4, 19, 26, 34,49, 59, 64, 78, 81, 95	5, 20, 27, 31,42, 55, 69, 78, 84, 100	10, 14, 20, 32,45, 58, 66, 75, 89, 93	**5**
1, 16, 25, 34,47, 52, 64, 70, 89, 92	2, 13, 22, 35,47, 59, 62, 78, 86, 93	3, 11, 28, 30,44, 58, 65, 71, 83, 95	4, 14, 23, 37,44, 58, 60, 73, 84, 94	5, 15, 26, 31,43, 52, 67, 75, 87, 96	6, 14, 27, 35,47, 56, 68, 71, 80, 100	**6**
2, 14, 26, 36,48, 53, 66, 75, 81, 94	3, 12, 22, 35,49, 58, 61, 72, 84, 95	3, 11, 22, 37,41, 55, 69, 71, 87, 96	4, 18, 28, 34,47, 51, 68, 73, 83, 97	5, 19, 23, 31,47, 59, 62, 74, 88, 98	6, 11, 20, 30,41, 52, 64, 77, 89, 99	**7**
3, 15, 23, 35,44, 51, 68, 71, 80, 95	4, 12, 28, 34,42, 58, 63, 72, 86, 100	5, 17, 28, 33,41, 57, 65, 73, 81, 90	6, 14, 29, 33, 48, 59, 61, 73,86, 91	7, 18, 21, 38,44, 57. 69, 70, 81, 92	8, 11, 29, 31,43, 54, 67, 79, 82, 93	**8**
4, 15, 25, 37,49, 54, 68, 71, 83, 99	2, 16, 22, 31,47, 50, 63, 76, 86, 94	3, 15, 26, 34,44, 55, 66, 72, 84, 99	4, 12, 27, 36,45, 54, 63, 72, 81, 90	5, 13, 24, 36,48, 50, 61, 74, 87, 95	6, 14, 26, 32,45, 57, 62, 71, 84, 91	**9**
6, 16, 26, 36,45, 55, 65, 74, 84, 92	7, 14, 26, 35,45, 57, 62, 73, 84, 90	8, 14, 27, 35,41, 50, 65, 78, 89, 93	9, 18, 22, 33,46, 57, 68, 78, 81, 98	10, 12, 23, 30,45, 57, 68, 73, 80, 95	1, 15, 23, 32,43, 54, 66, 79, 85, 91	**0**

Контрольная работа № 1

В **задачах 1 – 10** даны вершины $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ треугольника. Найти:

1) длину сторон AB;
2) уравнение сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол B в радианах с точностью до 0,01;
4) уравнение высоты CD и её длину, не используя координаты точки D;
5) уравнение медианы, проведённой через вершину C;
6) точку пересечения высот треугольника;
7) сделать чертёж.

1. $A(5;2)$, $B(2;–4)$, $C(–1;2)$.
2. $A(–3;0)$, $B(–2;3)$, $C(5;–3)$.
3. $A(1;1)$, $B(0;4)$, $C(–2;3)$.
4. $A(5;4)$, $B(0;–3)$, $C(–3;4)$.
5. $A(–2;5)$, $B(2;–4)$, $C(2;2)$.
6. $A(–5;4)$, $B(1;–4)$, $C(–1;5.)$
7. $A(2;2)$, $B(2;–5)$, $C(–5;3)$.
8. $A(1;2)$, $B(3;–2)$, C(5;5).
9. $A(4;–3)$, $B(0;0)$, $C(1;4)$.
10. $A(3;3)$, $B(0;–2)$, $C(–3;3)$.

В **задачах 11 – 20** даны вершины пирамиды. Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, в системе орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти модули этих векторов;

2) найти угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$;

3) найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

4) найти площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

6) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки A_1 и A_2;

7) составить канонические уравнения высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

8) найти точку пересечения высоты A_4H с гранью $A_1A_2A_3$.

11. $A_1(4;3;5)$ $A_2(–4;–1;5)$ $A_3(5;–5;3)$ $A_4(–1;6;5)$
12. $A_1(3;–3;4)$ $A_2(1;–5;–2)$ $A_3(–5;–4;–6)$ $A_4(–1;2;–2)$
13. $A_1(–1;5;7)$ $A_2(4;6;6)$ $A_3(2;–3;–5)$ $A_4(–4;–2;–7)$

14. $A_1(5;3;-3)$ $A_2(-1;6;0)$ $A_3(5;3;6)$ $A_4(1;-1;-3)$
15. $A_1(-3;6;-5)$ $A_2(6;1;0)$ $A_3(-6;-1;-3)$ $A_4(5;5;3)$
16. $A_1(0;-5;-2)$ $A_2(0;5;0)$ $A_3(5;1;-3)$ $A_4(4;-2;4)$
17. $A_1(4;4;4)$ $A_2(3;4;2)$ $A_3(6;-5;1)$ $A_4(-2;-1;-1)$
18. $A_1(-1;3;-1)$ $A_2(-2;-3;-5)$ $A_3(5;2;-2)$ $A_4(-3;5;-2)$
19. $A_1(2;-1;3)$ $A_2(3;4;3)$ $A_3(1;-2;5)$ $A_4(4;-4;-6)$
20. $A_1(0;0;0)$ $A_2(3;2;2)$ $A_3(0;5;-3)$ $A_4(2;5;3)$

В **задачах 21 – 30** доказать совместимость данной системы линейных уравнений и решить ее тремя способами:

1) по формуле Крамера;
2) методом Гаусса;
3) средствами матричного исчисления (с помощью обратной матрицы).

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

В **задачах 31 – 40** даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$. е) $2A - 4B$.

31. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

32. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

33. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

34. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

35. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

36. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

37. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

38. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

39. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

40. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

В **задачах 41 – 50** найти предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя:

41. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}(\pi x/2)$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$.

43. 1) $\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

44. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a).$

45. 1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$.

46. 1) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{x^2-4x-5}{4x^2+2x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to(-3)}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$;

5). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg}x\right)\ln x.$

47. 1) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to(-5)}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$.

48. 1) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{2\sin x+x}$.

49. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$.

50. 1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x.$

В **задачах 51 – 60** найти производные заданных функций:

51. а) $y=\mathrm{tg}^3\,2x\cdot\cos 7x^2$;

б) $y=2^{\cos x}\cdot\mathrm{arctg}^4\,x$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$;

г) $y=\dfrac{6log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.

52. а) $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$;

б) $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$;

г) $y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$.

53. а) $y=\mathrm{ctg}\,\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$;

б) $y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$;

в) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$;

г) $y=\dfrac{7log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.

54. а) $y=\mathrm{tg}^3\,2x\cdot\arccos 2x^3$;

б) $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$;

в) $y=\dfrac{2\ln(2x-10)}{(x+5)^7}$;

г) $y = \dfrac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$.

55. а) $y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$;

б) $y = (x-3)^5 \cdot \operatorname{arcctg} 3x^2$;

в) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$;

г) $y = \dfrac{7\operatorname{arcctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$.

56. а) $y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4$;

б) $y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^2$;

в) $y = \dfrac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

г) $y = \dfrac{log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.

57. а) $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x$;

б) $y = \lg_3(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$;

в) $y = \dfrac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg} 2x}$;

г) $y = \dfrac{7log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.

58. а) $y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}$;

б) $y = \log_3(x+5) \cdot \arccos 3x$;

в) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$;

г) $y = \dfrac{3log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$.

59. а) $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arcctg} 3x^5$;

б) $y = 4^{-\sin x} \operatorname{arctg} 3x$;

в) $y = \dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$;

г) $y=\dfrac{4lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.

60. а) $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$;

б) $y=\mathrm{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$;

в) $y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{\mathrm{tg}(\frac{1}{x})}$;

г) $y=\dfrac{8lg(4x+5)}{(x-1)^5}$.

В **задачах 61 – 70** произвести полное исследование функции и построить ее график.

61. $y=\dfrac{\left(2-x^2\right)}{\sqrt{9x^2-4}}$.

62. $y=\dfrac{\left(x^3-32\right)}{x^2}$.

63. $y=\dfrac{4x}{\left(x+1\right)^2}$.

64. $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-2}}$.

65. $y=\dfrac{\left(2x^2-6x+9\right)}{\left(x-1\right)^2}$.

66. $y=\dfrac{\left(1-2x^3\right)}{x^2}$.

67. $y=\dfrac{\left(12-3x^2\right)}{\left(x^2+12\right)}$.

68. $y=\dfrac{\left(9-10x^2\right)}{\sqrt{4x^2-1}}$.

69. $y=\dfrac{4x^2}{\left(3+x^2\right)}$.

70. $y=\dfrac{\left(4-x^2\right)}{x^2}$.

Контрольная работа № 2

В **задачах 1 – 10** даны два комплексных числа z_1 и z_2: а) найти их сумму и разность; б) записать число z_1 в тригонометрической и показательной форме; в) вычислить $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; ${z_1}^{n+1}$, где n – последняя цифра номер варианта.

1. $z_1 = 6 - 6i;\ z_2 = -6 + i$.
2. $z_1 = -3 + 3i;\ z_2 = 9 - 5i$.
3. $z_1 = 1 + i;\ z_2 = -5 + 4i$.
4. $z_1 = 2 + 2i;\ z_2 = -2 - 1i$.
5. $z_1 = -2 + 2i;\ z_2 = 7 - 3i$.
6. $z_1 = 9 - 9i;\ z_2 = 3 + 2i$.
7. $z_1 = -2 - 2i;\ z_2 = 8 - 3i$.
8. $z_1 = -1 - i;\ z_2 = 7 - 2i$.
9. $z_1 = -6 + 6i;\ z_2 = 1 + 9i$.
10. $z_1 = -8 - 8i;\ z_2 = 8 - 2i$.

В **задачах 11 – 20** найти неопределённые интегралы. Результат проверить дифференцированием.

11. а) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5 - 4x^2}};$

б) $\displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)}dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{\sqrt{5x^2 + 1}}dx;$

г) $\displaystyle\int x\cos(x + 7)dx;$

д) $\displaystyle\int \sqrt[3]{4 - 2x}\,dx.$

12. а) $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9x^2 + 5}};$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3 + x}};$

в) $\int \frac{x-3}{4x^2+1}\,dx$;

г) $\int (x+3)e^{-x}\,dx$;

д) $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,dx$.

13. а) $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$;

б) $\int \sqrt[4]{2-5x}\,dx$;

в) $\int \frac{x-5}{8-4x^2}\,dx$;

г) $\int xe^{-7x}\,dx$;

д) $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}$.

14. а) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$;

в) $\int \frac{12-7x}{15+2x^2}dx$;

г) $\int (5-2x)e^{6x}\,dx$;

д) $\int \frac{4x^3-5x^2+3}{x^2-3x+2}dx$.

15. а) $\int \frac{10xdx}{4x^2+5}$;

б) $\int \sqrt[5]{3-5x}\,dx$;

в) $\int \frac{15-4x}{\sqrt{4-6x^2}}\,dx$;

г) $\int x^3 \ln x dx$;

д) $\int \frac{6x^3-x^2+4}{x^2-2x-3}$.

16. а) $\int \frac{12x dx}{\sqrt{4-2x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$;

в) $\int \frac{9-6x}{8-4x^2} dx$;

г) $\int (5x+6)\sin 3x dx$;

д) $\int \frac{3x^4-2x^3+1}{x(x-1)(x+2)} dx$.

17. а) $\int \frac{15x dx}{4x^2-1}$;

б) $\int \sqrt[3]{5-6x} dx$;

в) $\int \frac{1-2x}{5x^3-1} dx$;

г) $\int (7x^2-2)\cos 3x dx$;

д) $\int \frac{10x^3+x^2-4}{x^2-6x+5} dx$.

18. а) $\int \frac{10x dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-2x}}$;

в) $\int \frac{x-8}{x^2+3} dx$;

г) $\int e^{4x}(3x-5) dx$;

д) $\int \frac{7x^3-8x+4}{x^2-3x+2} dx$.

19. а) $\int \frac{6x dx}{3x^2+4}$;

б) $\int \sqrt[4]{x-8} dx$;

в) $\int \frac{3-5x}{7-3x^2} dx$;

г) $\int (3x+5)\sin 2x dx$;

д) $\int \frac{6x^4-5x^3+2x-1}{x^3+2x^2-3x}dx.$

20. а) $\int \frac{5xdx}{x^2-3}$;

б) $\int \sqrt[3]{4-x}dx$;

в) $\int \frac{3x+2}{x^2+5}dx$;

г) $\int e^{3x}(5x-4)dx$;

д) $\int \frac{x^4-3x^2+5}{x^3-2x^2-3x}dx.$

В **задачах 21 – 30** вычислить определённые интегралы:

21. а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^3}}$;

б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^3 2x dx$;

в) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^3}}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x dx.$

22. а) $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; .

б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$;

в) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$;

д) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\mathrm{tg} x}}{\cos^2 x}dx.$

23. а) $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}};$

б) $\int\limits_{0}^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx;$

в) $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\mathrm{arctg}^2 3x};$

г) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+1}.$

24. а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}};$

б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x};$

в) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^3}};$

г) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^3 2x dx.$

25. а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$

б) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx;$

в) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \mathrm{arctg}\frac{x}{2}}};$

г) $\int\limits_{3}^{5} \frac{\ln^5(x+1)}{x+1} dx.$

26. а) $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{x-x^2}\, dx;$

б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x dx;$

в) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}dx$.

27. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$;

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}$;

г) $\int\limits_{1}^{2} \operatorname{arctg}\sqrt{3x-2}dx$.

28. а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$;

б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$;

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx$.

29. а) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi/32} (32\cos^2 4x-16)dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x} x dx$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3\cos x dx}{\sin^2 x+4}$.

30. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\,dx;$

б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$

в) $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx;$

г) $\int\limits_{2}^{4} \frac{(1+x)dx}{\sqrt{2x^2-7}}.$

В **задачах 31 – 40** вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

31. $y = x^2\sqrt{4-x^2}$; $y=0$; $(0 \le x \le 2)$.

32. $x = (y-2)^3$; $x = 4y-8$.

33. $y = \cos x \sin^2 x$; $x = \ln 2$; $y = 0$.

34. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$; $y = 0$; $(0 \le x \le \pi/2)$.

35 $y = \arccos x$; $y = 0$; $x = 0$.

36. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$; $y=0$; $x=1$; $x = e^3$.

37. $y = (x+1)^2$; $y^2 = x+1$.

38. $x = \sqrt{4-y^2}$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 1$.

39. $y = x\cos x$; $y = 0$; $(0 \le x \le \pi/2)$.

40. $x = \sqrt{e^y - 1}$; $x = 0$; $y = \ln 2$.

В **задачах 41 – 50** найти решение задачи Коши.

41. $y' + 2xy = -2x^3$; $y(1) = e^{-1}$.

42. $y' + xy = (x-1)e^x y^2$; $y(0) = 1$.

43. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; $y(1) = 4$.

44. $2(y' + y) = xy^2$; $y(0) = 2$.

45. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 2$.

46. $xy' + y = 2y^2 \ln x; y(1) = \frac{1}{2}$.

47. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

48. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2; y(0) = 1$.

49. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$; $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

50. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x} y^{-1}; y(0) = 2$.

В **задачах 51 – 60** найти решение задачи Коши.

51. $y' - ytgx = -(\frac{2}{3})y^4 \sin x; y(0) = 1$.

52. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

53. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$; $y'(0) = 3$; $y(0) = 1$.

54. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}; y(0) = 1$.

55. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

56. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

57. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4; y(1) = 1$.

58. $y' - \frac{xy}{2(1 - x^2)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.

59. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

60. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3; y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В задачах 61-70 найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

61. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$

70. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

Библиографический список

Основной

1.Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. -236 с.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.- С.-Пб.: Профессия, 2003.-224 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2- М.: Интеграл-Пресс, 2000, 2001. (любого другого года издания)

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича .- М. : Астрель, 2001,2004.

5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов.-М.:Физматлит, 2003.-720 с.

6. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высш. школа,1994.- 231 с.

Дополнительный

7.Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988. – 224с.

8.Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

9.Шипачев И.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990. – 480 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Методические указания
к выполнению контрольных работ по математике
для студентов 1-го курса
заочной формы обучения
технических направлений бакалавриата

Составитель **Феоктистов** Юрий Александрович

Подписано в печать 26.05.15. Формат 60х84/16. Усл. печ.л. 5,7 Уч.-изд. л. 6,1
Тираж экз Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.