

## Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt[3]{x}; (x \geq 0)$ .
3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями:  $2x + 3y - 12 = 0;$   
 $2z = y^2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  -  
поверхностная плотность тела:  $V: 25(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2)$ .
6. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $V$ , ограниченную  
поверхностями:  $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2}; x^2 + z^2 = 16; y \geq 0$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M$  к точке  $N$ :  
 $\vec{F} = (x^2 - 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ , где  $\alpha$  - отрезок от точки  $M(-4; 0)$  до  $N(0; 2)$ .
8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_K \frac{y \cdot dS}{x}$ , где  $K$  - дуга полукубической  
параболы  $y^2 = \frac{4}{9}x^3$  от точки  $A(3; 2\sqrt{3})$  до  $B\left(8; \frac{32\sqrt{3}}{3}\right)$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте  
(нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; P: x + y + z = 1$ .
10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + 4z) \cdot dS; P: 2x + 2y + z = 4$ .

## Контрольные вопросы

1. Что называется двойным интегралом?
2. Какое поле называется скалярным?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x; y) dx$ .

2. вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;

$$x^2 + y^2 - 6y = 0; \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad x = 0.$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

$$y = \frac{5\sqrt{x}}{3}; \quad y = \frac{5x}{9}; \quad z \geq 0; \quad z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{x}).$$

4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (2x - 3y + z^2) dx dy dz$ , где  $V: \begin{matrix} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 2 \leq z \leq 3 \end{matrix}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

$$V: x^2 + y^2 = 2x; \quad x + z = 2; \quad y \geq 0; \quad x \geq 0.$$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} xy dl$ , где  $\alpha$  - часть окружности

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ лежащая в первой четверти.}$$

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (1 - x^2) dx + x(1 + y^2) dy$ , где

$$\alpha: x^2 + y^2 = R^2.$$

8. вычислить работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки

$$N(0; 2): \vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}, \text{ где } \alpha \text{ - отрезок прямой } MN.$$

9. Вычислить массу дуги  $\alpha$  при заданной плотности  $\mu: \alpha: \rho = e^{\frac{3}{4}\varphi}; \varphi \in \left[0; \frac{4\pi}{7}\right]; \mu = \rho^{\frac{4}{3}}$ .

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; P: 2x + 3y + z = 1$ .

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.

2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.

3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

### Вариант 3

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 - 2y + z) dx dy dz$ , где  $V: 0 \leq x \leq 1$ ,  
 $-1 \leq z \leq 3$ .

3. Найти массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми, если  $\mu = \mu(x; y)$ -  
поверхностная плотность пластинки  $D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \leq 0; \mu = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$ .

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  
 $x + y = 4; x = \sqrt{2y}; z \geq 0; z = \frac{3x}{5}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y \leq x; y \geq 0; z \geq 0$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,  
соединяющей точки  $A(1; 1; 1)$  и  $B(2; 2; 2)$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: y = 2 - \frac{x^2}{8}$  от точки  $M(0; 2)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{yz^2}{x^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2x - z) \cdot \vec{i} + (y - x) \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$ , через внешнюю  
поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + z) dS$ , где  $P: x - y + z = 2$ .

### Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.
3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

## Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Найти площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y=0; y=\sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  
 $V: x+y=4; y=\sqrt{2x}; z \geq 0; z=3y$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36; x \geq 0; z \geq 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  - поверхностная плотность  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = 4z^2; x \geq 0; y \geq 0; \mu = 10z$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 1 + \sin \varphi$ , если  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = \sin\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\varphi}{2}\right)$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(-2;0)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$  в точке  $M(1;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .
9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x+2y+z=4$  с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).
10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (y+x) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+2y+2z=4$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
2. Какое поле называется векторным?
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

## Вариант 5

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторного с внешним интегрированием по  $x$  и внешним интегрированием по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  $D: y = 0; y \geq x; y = -\sqrt{2-x^2}$ .

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}; y = \frac{5}{18}x; z \geq 0; z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x})$ .

3. Найти массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x = 2; y \geq 0; y^2 = 2x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = 8x; x = 2$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = 2(x^2 + y^2); z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0; y \geq 0)$  от точки  $M(2; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = u(x; y; z)$  и  $v = v(x; y; z)$  в точке  $M\left(2; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); u = x^2 y z^3; v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} + (3x + z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + y + 2z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (y - z) \cdot \vec{i} + 3xyz \cdot \vec{j} + (z - x) \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

### Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x; y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^3; y=\sqrt{x}$ .
3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = x; x = 0$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16; z \geq 0$ .
5. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  $x = 19\sqrt{2y}; x = 4\sqrt{2y}; z \geq 0; z - y = 2$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2(1 - \cos \varphi)$ , где  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , если плотность  $\mu = \cos \frac{\varphi}{2}$ .
7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой  $\alpha$  от точки  $M(-1; 2)$  до точки  $N(0; 1)$ .
8. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y+2z) \cdot \vec{i} + (x+2z) \cdot \vec{j} + (x-2y) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + 2z = 2$  и координатными плоскостями.
9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + (x+3y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z) \cdot \vec{i} + (x+z) \cdot \vec{j} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?
2. Что такое дивергенция векторного поля?
3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

## Вариант 7

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; (x \geq 0; y \geq 0)$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x+2y}{x^2+y^2}$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \left(5x + \frac{3z}{2}\right) dx dy dz$ , где  $V: y=x; y=0; x=1; z \geq 0; z=x^2+15y^2$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: z=9\sqrt{x^2+y^2}; z=36$ .
5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_\alpha (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , где  $\alpha$  - дуга кривой:  $x = \cos t; y = \sin t; z = \sqrt{3} \cdot t; 0 \leq t \leq 2\pi$ .
6. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = x^2$  от точки  $M(-1;1)$  до точки  $N(1;1)$ .
7. Найти производную скалярного поля:  $u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $M(2;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .
8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (5x+2y+2z) dS$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + (x+y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность, образованную плоскостью  $P: x+2y+z=2$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x+2y+2z=4$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?
3. Вычисление работы силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  с помощью криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 8

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: x = \sqrt{9 - x^2}; y = x; y \geq 0.$$

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $y = \cos x; y \leq x + 1; y \geq 0$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $x + y = 6; y = \sqrt{3x}; z \geq 0; z = 4y$ .

4. Найти массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 6z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 90y$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x = 1 - y^2 - z^2; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{4}\rho$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка:  $\int_{\alpha} x dy - x^2 y dx$ , где  $\alpha$  часть кривой  $y = x^3$  от точки  $M(0;0)$  до точки  $N(2;8)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^3}{xy^2}$  и  $v = 9\sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$  в точке  $M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} - 2xz \cdot \vec{j} - 3(y + z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Физические приложения двойного интеграла.
2. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 9

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $D: y = x^2 + 2; x \geq 0; x = 2; y = x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 1; y \geq 0; y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 6x + 3y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$ , где  $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах  $\iiint_V \frac{xdx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0; y \leq x; z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 3(x^2 + y^2); x^2 + y^2 = 9; z \geq 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^2$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  
 $\oint_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dx + (xy^2 + y \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)) dy$ , где  $\alpha: x^2 + y^2 = 4$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$  в точке  $M(1; 5; -2)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$ -часть плоскости  $P: x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (6x - y + 8z) dS$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x - 3y + z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x; y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 10y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:  
 $y = 5\sqrt{x}$ ;  $y = \frac{5x}{3}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 9z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность  $\mu = 10z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (y^2 - 2xy) dl$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(-3; 4)$  до  $B(3; 1)$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (2x - y) \cdot \vec{i} + (x^2 + x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ;  $y \geq 0$  от точки  $M(3; 0)$  до точки  $N(-3; 0)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{yz^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y + z) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y + z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как изменить порядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

## Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 9x^2 y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^2; y=\sqrt{x}$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными кривыми:  $V: y = 17\sqrt{2x}; y = 2\sqrt{2x}; z \geq 0; z+x = \frac{1}{2}$ .
5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 36; y \geq 0; z \geq 0; y \leq -x$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2 \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^3$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 9x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$  от точки  $M(1;0)$  до точки  $N(0;3)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = y \cdot \ln(1+x^2) - \arctg z$  в точке  $M(0;1;1)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x+3y+2z=6$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + (y+z) \cdot \vec{j} + (3y+z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 3x-2y+2z=6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

## Вариант 12

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $x = 4 - y^2$ ;  $x - y + 2 = 0$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $D: x = 1$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = x + 3y^2$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (15x + 30z) dx dy dz$ , где  $V: z = x^2 + 3y^2$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = x$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V: x^2 + y^2 = z$ ;  $z = 3$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  в третьей четверти.
7. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z}{x^3 y^2}$  и  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$  в точке  $M\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .
8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} (x - y)^2 dx - (x + y)^2 dy$ , где  $\alpha$  - часть прямой между точками  $M(2; 0)$  и  $N(4; 2)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (2x + 5y + 10z) dS$ ,  $P: 2x + y + 3z = 6$ .
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = 4z \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $x - 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

## Вариант 13

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x,y) dx dy$  в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  
 $x \geq 0; y \geq x; y = \sqrt{9-x^2}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $x = \frac{5}{2}\sqrt{y}; x = \frac{5}{6}y; z \geq 0; z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$ , где  $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1; x = 0; y = 0; z = 0$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $4y = x^2 + z^2; y = 9$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  
 $x^2 + y^2 = 2x$  во второй четверти.
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2) \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(0;2)$ .
8. Найти производную скалярного поля:  $u = \ln(3-x^2) + xy^2z$  в точке  $M(1;3;2)$  по направлению  $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y+z) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (y-2) \cdot z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 6x^2 \cdot \vec{i} + 3\cos(3x+2z) \cdot \vec{j} + \cos(3y+2z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 14

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: y^2 = 2x; x^2 = 2y; x \leq 1.$$

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt[3]{x}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:

$$D: x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0, \text{ если поверхностная плотность пластинки } \mu = \frac{y-4x}{x^2 + y^2}.$$

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2}; x = 20.$$

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$x^2 + z^2 = 2y; y = 2 \text{ относительно оси } OY.$$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой

от точки  $A(0;0)$  до точки  $B(2;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:

$$\oint_{\alpha} \left( x^2 - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \frac{x^3}{3} - y^2 \right) dy, \text{ где } \alpha: x^2 + y^2 = 4.$$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^2}{xy^2}$  и  $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$  в точке

$$M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + (z+y) \cdot \vec{j} + (x-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+3y+z=3$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = x \cdot \vec{i} + (y-2z) \cdot \vec{j} + (2x-y+2z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x+2y+2z=2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

## Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $xy = 1$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 2$ ;  $x = 0$ .

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; y = \sqrt{3}x; y \geq 0; z \geq 0.$$

4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$V: x = 20\sqrt{2}y; x = 5\sqrt{2}y; z = 0; x + y = \frac{1}{2}.$$

5. Найти момент инерции однородного тела  $V: x^2 + z^2 = 2y; y = 2$  относительно оси  $OY$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , описываемой уравнением:  $\rho = 4; 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}$  при заданной плотности  $\mu = 15\rho^3$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $M(1;1)$  до точки  $N(2;2)$ .

8. Найти производную скалярного поля:  $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$  в точке  $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$  по направлению вектора  $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ .

9. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 3x^2y \cdot \vec{i} - 2xy^2 \cdot \vec{j} - 2xyz \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_D (3x + 10y - z) dS$ .

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 16

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0; x^2 + y^2 - 10y = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = \frac{5}{3}\sqrt{y};$   
 $x = \frac{5y}{9}; z \geq 0; z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 35z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 9 - x^2 - y^2; z = 0$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , заданной уравнением:  $\rho = 5 \cdot e^{\frac{5\varphi}{12}}; 0 \leq \varphi \leq 1$ , при заданной  
 плотности  $\mu = \frac{12}{13} \cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от  
 точки  $M(-1; 2)$  до точки  $N(0; 1)$ .
8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x^2}{yz^2}; v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
 плоскости  $P: x - 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4y - x + 4z) dS$ .
10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z) \cdot \vec{i} + (2x+y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  по контуру  
 треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 2x + y + z = 2$  с координатными  
 плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 17

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $D: x = y^2 + 1; x + y = 3$
2. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x + y = 8; y = \sqrt{4x}; z = 0; z = 3y$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; y \geq 0; z \geq 0; y \leq x$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + z^2 = y; x^2 + z^2 = 10; y \geq 0$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (xy + y^2) dl$ , где  $\alpha$  - часть прямой от точки  $A(-2; 3)$  до точки  $B(2; 1)$ .
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + \frac{x^2}{2} \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $M(0; 0)$  до точки  $N(1; 2)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$  в точке  $M(1; 1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 3(x - z) \cdot \vec{i} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидальности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x; y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $y^2 = -8x + 16$ ;  $y^2 = 24x + 48$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz$ , где  $V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y^2 + z^2 = x; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$ .
5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 4; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 2z$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 y + xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  
 $A(0;0); B(3;0); C(0;3)$ .
7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} xy^2 dx + \frac{3}{2} x^2 y dy$ , где  
 $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;2); C(1;1)$ .
8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{y^3}{x^2 z}$  и  $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$  в точке  
 $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{2}\right)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (5x + y - z) dS$ , где  
 $S$  - часть плоскости  $P: x + 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x - 3y + z = 6$  с  
координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 19

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластики  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y = 0$ ;  $2y^2 = x$ ;  $y \geq 0$ , если  
поверхностная плотность  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq x$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $3\sqrt{x^2 + z^2} = y$ ;  $x^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = 2z$ ;  $z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t); \\ y = e^t (\cos t - \sin t); \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{2} e^{2t}$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ,  $y \geq 0$  от точки  $A(3;0)$  до точки  $B(-3;0)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = 5xy^3z^2$  в точке  $M_1(2;1;-1)$  по направлению  
 $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(4;-3;0)$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$  с  
координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + z) \cdot \vec{k}$  является  
соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 20

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана следующими линиями:  $y \geq 0$ ;  $x + 2y - 12 = 0$ ;  $y = \lg x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = \frac{x}{2}$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 4x + 6y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $x^2 + y^2 = 4y$ ;  $z = 4 - x^2$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 - xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  $A(2;1)$ ;  $B(6;1)$ ;  $C(4; -1)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где  $\alpha$  - верхняя половина окружности  $x^2 + y^2 = 9$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = xyz$  и  $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (6x + y + 4z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} = (x + 2z) \cdot \vec{i} + (y - 3z) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 3x + 2y + 2z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

## Вариант 21

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (xy - 9x^5y^5) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = \sqrt{3}x; x = 0$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{y-2x}{x^2+y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $z = x^2 + y^2 + 1; x^2 + y^2 = 4x; z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = x^2; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \begin{cases} x = 4(\cos t + t \cdot \sin t); \\ y = 4(\sin t - t \cdot \cos t); \end{cases} 0 \leq t \leq 2$ , при заданной плотности  $\mu = t^2 + 1$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 2x^2 + y^2 = 1; y \geq 0$  от точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$  до точки  $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$  в точке  $M(1; 1; 0)$  по направлению  $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 4x \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + z = 4$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + (x+z) \cdot \vec{j} + (y+z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

## Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x; y) dx + \int_1^0 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V 63(1+2\sqrt{y}) dx dy dz$ , где

$$V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}.$$

3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной кривыми:  $y^2 = 2x + 1; x - y = 1$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $\sqrt{x^2 + y^2} = 3z; x^2 + y^2 = 4; z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = 9z^2; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 5z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x; y)$ . Найти эту функцию:  $(20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{y^2 z^3}$  и  $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot z}$  в точке

$$M\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (3x - 2y + 6z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 2x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным, соленоидальным или гармоническим:  $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} + (y + z) \cdot \vec{j} + 2(x - z) \cdot \vec{k}$ .

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.
3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

## Вариант 23

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $x = 4$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{5x + 2y}{x^2 + y^2}$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 6\sqrt{3x}$ ;  $y = \sqrt{3x}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + x = 3$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $y \geq 0$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ ;  $z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \ln x$ ;  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ , если заданная плотность  $\mu = 2x^2$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $A(1; 2)$  до точки  $B(4; 4)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z - 3z$  в точке  $M_1(1; -2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(13; -5; 0)$ .
9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x - y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x + 2y + z = 6$  с координатными плоскостями.
10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 4y + 2z = 8$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?
2. Способы вычисления потока векторного поля.
3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 24

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt[3]{x}$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$ , где  $V: y=9x; y \geq 0; x=1; z \geq 0; z=\sqrt{xy}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}$ .

4. Найти объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $z=4-y^2; x^2+y^2=4x; z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2+z^2=y; y=2$  относительно оси  $OY$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,

соединяющий точки  $O(0;0)$  и  $A(1;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x^2+y^2) dx + (x^2-y^2) dy$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;0); C(0;1)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{1}{x^2yz}$  и  $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot z}$  в точке

$$M\left(2; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x-3y+z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x+2y+z=4$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?
2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.
3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

## Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f(x; y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\cos x} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 8y = 0$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x = 16\sqrt{2y}$ ;  $x = \sqrt{2y}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + y = 2$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 6z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $V : x = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha : \begin{cases} x = -3(\cos t - t \sin t) \\ y = -3(\sin t - t \cos t) \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при плотности  $\mu = t$ .
7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $\frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x; y)$ . Найти эту функцию.
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$  в точке  $M(1; -3; 4)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P : x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a} : \vec{a} = (2x - yz) \cdot \vec{i} + (xz - 2y) \cdot \vec{j} + 2xyz \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 26

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = (x-4)^2$ ;  $y = 16 - x^2$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной следующими кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $2y^2 = x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7}{2}x^2 + 6y$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1; y \geq x; x \geq 0; z \geq 0.$$

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного ограничивающими поверхностями:  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $z = 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t; \\ y = 10 \sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = 2 \cos^2 t$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y) dx + (y-x) dy$

, где  $\alpha$ :  $\begin{cases} y = x^2; \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x}{yz^2}$  и  $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$  в точке

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x+3y-z) dS$ , где

$S$  - часть плоскости  $P: 2x+y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} + (y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x-y-2z=-2$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?
3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 27

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  
 $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x-5y}{x^2+y^2}$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz$ , где  $V$ :  
 $z = 10y$ ;  $x + y = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $x^2 + z^2 = 36$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ :  $y^2 + z^2 = x^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{x+2y+5}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(0; -2)$  до точки  $B(1; 0)$ .

7. Показать, что данное дифференциальное выражение  $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x; y)$ . Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля  $u = xy - \frac{x}{z}$  в точке  $M(-4; 3; -1)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: x + 2y + z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = xy(3x - 4y) \cdot \vec{i} + x^2(x - 4y) \cdot \vec{j} + 3z^2 \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.
2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.
3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

## Вариант 28

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x; y) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\cos y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y = x$ ;  $x = 2$ .

3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = \sqrt{y}$ ;  $y = 2x$ ;  $y = 3$ ;  $x \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y = x; z \geq 0; x \geq 0.$$

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $49(x^2 + y^2) = 4z^2$ ;  $7(x^2 + y^2) = 2z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 20xz$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (2z - \sqrt{y^2 + x^2}) dl$ , где  $\alpha$  - первый виток канонической винтовой линии  $x = t \cos t$ ;  $y = t \sin t$ ;  $z = t$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z + z^2x$  в точке  $M_1(1; -1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(3; 4; -1)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y + z) \cdot \vec{i} + (x + 6y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?
2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 29

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана указанными линиями:  $x = 1$ ;  $y = -\sqrt[3]{x}$ ;  $y = x^3$ .

2. Найти массу пластинки  $D$ , заданной указанными линиями:  $D: x = 2$ ;  $y^2 = 2x$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$ .

3. Найти площадь области  $D$ , заданной ограничивающими ее линиями:  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ;  $x^2 - 6x + y^2 = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $y = \sqrt{3}x$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $y \geq 0$ ;  $y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $y = 9$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = 2 + 2\arcsin \sqrt{x}$ ;  $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$  при заданной плотности  $\mu = x^2 + x$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} x dy - y dx$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ .

8. Найти производную скалярного поля:  $u = z^2 + 2\arctg(x - y)$  в точке  $M(1; 2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (7x + y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x - 2y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = \frac{x}{y} \cdot \vec{i} + \frac{y}{z} \cdot \vec{j} + \frac{z}{x} \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

- Оператор Лапласа и его некоторые применения.
- Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

### Вариант 30

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x; y) dx dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = x^2 + 2x$ ;  $y = x + 2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz$ , где  $V: y = x$ ;

$$y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = 5(x^2 + y^2).$$

4. Вычислить центр масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 6\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 3z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 15x$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ , где  $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$  при заданной плотности

$$\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+x).$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ . Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x + 3y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей,  $u = xy^2z$  и  $v = \sqrt{2} \cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} \cdot z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.

### Контрольные вопросы

- Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

- Некоторые применения оператора Гамильтона.
- Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 31

- Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy$ .
- Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 27x^2 y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt[3]{x}; (x \geq 0)$ .
- Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями:  $2x + 3y - 12 = 0; 2z = y^2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
- Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
- Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  - поверхностная плотность тела:  $V: 25(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2)$ .
- Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $V$ , ограниченную поверхностями:  $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2}; x^2 + z^2 = 16; y \geq 0$ .
- Найти работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M$  к точке  $N$ :  $\vec{F} = (x^2 - 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ , где  $\alpha$  - отрезок от точки  $M(-4; 0)$  до  $N(0; 2)$ .
- Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_K \frac{y \cdot dS}{x}$ , где  $K$  - дуга полукубической параболы  $y^2 = \frac{4}{9} x^3$  от точки  $A(3; 2\sqrt{3})$  до  $B\left(8; \frac{32\sqrt{3}}{3}\right)$ .
- Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; P: x + y + z = 1$ .
- Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + 4z) \cdot dS; P: 2x + 2y + z = 4$ .

## Контрольные вопросы

- Что называется двойным интегралом?
- Какое поле называется скалярным?
- Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 32

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x; y) dx$ .

2. вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;  
 $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $x = 0$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  
 $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}$ ;  $y = \frac{5x}{9}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{x})$ .

4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (2x - 3y + z^2) dx dy dz$ , где  $V: \begin{matrix} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 2 \leq z \leq 3 \end{matrix}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

$V: x^2 + y^2 = 2x$ ;  $x + z = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $x \geq 0$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} xy dl$ , где  $\alpha$  - часть окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (1 - x^2) dx + x(1 + y^2) dy$ , где  $\alpha: x^2 + y^2 = R^2$ .

8. вычислить работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ :  $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой  $MN$ .

9. Вычислить массу дуги  $\alpha$  при заданной плотности  $\mu: \alpha: \rho = e^{\frac{3}{4}\varphi}$ ;  $\varphi \in \left[0; \frac{4\pi}{7}\right]$ ;  $\mu = \rho^{\frac{4}{3}}$ .

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $P: 2x + 3y + z = 1$ .

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

## Вариант 33

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$ .

$$0 \leq x \leq 1$$

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 - 2y + z) dx dy dz$ , где  $V: 0 \leq y \leq 1$ ,  
 $-1 \leq z \leq 3$

3. Найти массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми, если  $\mu = \mu(x; y)$ -  
поверхностная плотность пластинки  $D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \leq 0; \mu = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$ .

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  
 $x + y = 4; x = \sqrt{2y}; z \geq 0; z = \frac{3x}{5}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y \leq x; y \geq 0; z \geq 0$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,  
соединяющей точки  $A(1; 1; 1)$  и  $B(2; 2; 2)$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: y = 2 - \frac{x^2}{8}$  от точки  $M(0; 2)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{yz^2}{x^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2x - z) \cdot \vec{i} + (y - x) \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$ , через внешнюю  
поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + z) dS$ , где  $P: x - y + z = 2$ .

## Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.
3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

### Вариант 34

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Найти площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y=0; y=\sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  
 $V: x+y=4; y=\sqrt{2x}; z \geq 0; z=3y$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36; x \geq 0; z \geq 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  - поверхностная плотность  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = 4z^2; x \geq 0; y \geq 0; \mu = 10z$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 1 + \sin \varphi$ , если  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = \sin\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\varphi}{2}\right)$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(-2;0)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$  в точке  $M(1;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .
9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x+2y+z=4$  с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).
10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (y+x) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+2y+2z=4$  и координатными плоскостями.

### Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
2. Какое поле называется векторным?
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

### Вариант 35

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x,y) dx dy$  в виде повторного с внешним интегрированием по  $x$  и внешним интегрированием по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  $D: y=0; y \geq x; y = -\sqrt{2-x^2}$ .

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}; y = \frac{5}{18}x; z \geq 0; z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x})$ .

3. Найти массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x=2; y \geq 0; y^2 = 2x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = 8x; x = 2$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = 2(x^2 + y^2); z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0; y \geq 0)$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(0;2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = u(x,y,z)$  и  $v = v(x,y,z)$  в точке  $M\left(2; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); u = x^2 y z^3; v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z-x) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j} + (3x+z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x+y+2z=2$  и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a}:(y-z)\cdot\vec{i}+3xyz\cdot\vec{j}+(z-x)\cdot\vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

## Вариант 36

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x,y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x,y) dy$ .

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^3; y=\sqrt{x}$ .

3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = x; x = 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ , где

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16; z \geq 0.$$

5. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  $x = 19\sqrt{2y}; x = 4\sqrt{2y}; z \geq 0; z - y = 2$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2(1 - \cos \varphi)$ , где  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , если плотность  $\mu = \cos \frac{\varphi}{2}$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + x^2y\cdot\vec{j}$  при перемещении вдоль прямой  $\alpha$  от точки  $M(-1;2)$  до точки  $N(0;1)$ .

8. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y+2z)\cdot\vec{i} + (x+2z)\cdot\vec{j} + (x-2y)\cdot\vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + 2z = 2$  и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + (x+3y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z)\cdot\vec{i} + (x+z)\cdot\vec{j} + (x^2 - y^2)\cdot\vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?
2. Что такое дивергенция векторного поля?
3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

## Вариант 37

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; (x \geq 0; y \geq 0)$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x+2y}{x^2+y^2}$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \left(5x + \frac{3z}{2}\right) dx dy dz$ , где  $V: y=x; y=0; x=1; z \geq 0; z=x^2+15y^2$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: z=9\sqrt{x^2+y^2}; z=36$ .
5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , где  $\alpha$  - дуга кривой:  $x = \cos t; y = \sin t; z = \sqrt{3} \cdot t; 0 \leq t \leq 2\pi$ .
6. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = x^2$  от точки  $M(-1;1)$  до точки  $N(1;1)$ .
7. Найти производную скалярного поля:  $u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $M(2;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .
8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (5x+2y+2z) dS$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + (x+y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность, образованную плоскостью  $P: x+2y+z=2$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x+2y+2z=4$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?
3. Вычисление работы силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  с помощью криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 38

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: x = \sqrt{9 - x^2}; y = x; y \geq 0.$$

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $y = \cos x; y \leq x + 1; y \geq 0$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $x + y = 6; y = \sqrt{3x}; z \geq 0; z = 4y$ .

4. Найти массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 6z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 90y$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x = 1 - y^2 - z^2; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{4}\rho$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка:  $\int_{\alpha} x dy - x^2 y dx$ , где  $\alpha$  часть кривой  $y = x^3$  от точки  $M(0;0)$  до точки  $N(2;8)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^3}{xy^2}$  и  $v = 9\sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$  в точке  $M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} - 2xz \cdot \vec{j} - 3(y + z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

3. Физические приложения двойного интеграла.
4. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 39

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $D: y = x^2 + 2; x \geq 0; x = 2; y = x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 1; y \geq 0; y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 6x + 3y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$ , где  $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах  $\iiint_V \frac{xdx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0; y \leq x; z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 3(x^2 + y^2); x^2 + y^2 = 9; z \geq 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^2$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  
 $\oint_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dx + (xy^2 + y \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)) dy$ , где  $\alpha: x^2 + y^2 = 4$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$  в точке  $M(1; 5; -2)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$ -часть плоскости  $P: x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (6x - y + 8z) dS$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x - 3y + z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 40

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x; y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 10y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:  
 $y = 5\sqrt{x}$ ;  $y = \frac{5x}{3}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 9z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность  $\mu = 10z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (y^2 - 2xy) dl$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(-3; 4)$  до  $B(3; 1)$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (2x - y) \cdot \vec{i} + (x^2 + x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ;  $y \geq 0$  от точки  $M(3; 0)$  до точки  $N(-3; 0)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{yz^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y + z) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y + z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как изменить порядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

## Вариант 41

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^2; y=\sqrt{x}$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными кривыми:  $V: y = 17\sqrt{2x}; y = 2\sqrt{2x}; z \geq 0; z+x = \frac{1}{2}$ .
5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 36; y \geq 0; z \geq 0; y \leq -x$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2 \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^3$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 9x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$  от точки  $M(1;0)$  до точки  $N(0;3)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = y \cdot \ln(1+x^2) - \arctg z$  в точке  $M(0;1;1)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x+3y+2z=6$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + (y+z) \cdot \vec{j} + (3y+z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 3x-2y+2z=6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

## Вариант 42

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $x = 4 - y^2$ ;  $x - y + 2 = 0$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $D: x = 1$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = x + 3y^2$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (15x + 30z) dx dy dz$ , где  $V: z = x^2 + 3y^2$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = x$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V: x^2 + y^2 = z$ ;  $z = 3$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  в третьей четверти.
7. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z}{x^3 y^2}$  и  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$  в точке  $M\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .
8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} (x - y)^2 dx - (x + y)^2 dy$ , где  $\alpha$  - часть прямой между точками  $M(2; 0)$  и  $N(4; 2)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (2x + 5y + 10z) dS$ ,  $P: 2x + y + 3z = 6$ .
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = 4z \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $x - 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

## Вариант 43

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x,y) dx dy$  в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  
 $x \geq 0; y \geq x; y = \sqrt{9-x^2}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $x = \frac{5}{2}\sqrt{y}; x = \frac{5}{6}y; z \geq 0; z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$ , где  $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1; x = 0; y = 0; z = 0$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $4y = x^2 + z^2; y = 9$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  
 $x^2 + y^2 = 2x$  во второй четверти.
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2) \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(0;2)$ .
8. Найти производную скалярного поля:  $u = \ln(3-x^2) + xy^2z$  в точке  $M(1;3;2)$  по направлению  $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y+z) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (y-2) \cdot z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 6x^2 \cdot \vec{i} + 3\cos(3x+2z) \cdot \vec{j} + \cos(3y+2z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 44

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: y^2 = 2x; x^2 = 2y; x \leq 1.$$

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt[3]{x}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:

$$D: x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0, \text{ если поверхностная плотность пластинки } \mu = \frac{y-4x}{x^2 + y^2}.$$

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2}; x = 20.$$

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$x^2 + z^2 = 2y; y = 2 \text{ относительно оси } OY.$$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой

от точки  $A(0;0)$  до точки  $B(2;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:

$$\oint_{\alpha} \left( x^2 - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \frac{x^3}{3} - y^2 \right) dy, \text{ где } \alpha: x^2 + y^2 = 4.$$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^2}{xy^2}$  и  $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$  в точке

$$M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + (z+y) \cdot \vec{j} + (x-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+3y+z=3$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = x \cdot \vec{i} + (y-2z) \cdot \vec{j} + (2x-y+2z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x+2y+2z=2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

## Вариант 45

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $xy = 1$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 2$ ;  $x = 0$ .

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; y = \sqrt{3}x; y \geq 0; z \geq 0.$$

4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$V: x = 20\sqrt{2}y; x = 5\sqrt{2}y; z = 0; x + y = \frac{1}{2}.$$

5. Найти момент инерции однородного тела  $V: x^2 + z^2 = 2y; y = 2$  относительно оси  $OY$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , описываемой уравнением:  $\rho = 4; 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}$  при заданной плотности  $\mu = 15\rho^3$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $M(1;1)$  до точки  $N(2;2)$ .

8. Найти производную скалярного поля:  $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$  в точке  $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$  по направлению вектора  $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ .

9. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 3x^2y \cdot \vec{i} - 2xy^2 \cdot \vec{j} - 2xyz \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_D (3x + 10y - z) dS$ .

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 46

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0; x^2 + y^2 - 10y = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = \frac{5}{3}\sqrt{y};$   
 $x = \frac{5y}{9}; z \geq 0; z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 35z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 9 - x^2 - y^2; z = 0$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , заданной уравнением:  $\rho = 5 \cdot e^{\frac{5\varphi}{12}}; 0 \leq \varphi \leq 1$ , при заданной  
 плотности  $\mu = \frac{12}{13} \cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от  
 точки  $M(-1; 2)$  до точки  $N(0; 1)$ .
8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x^2}{yz^2}; v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
 плоскости  $P: x - 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4y - x + 4z) dS$ .
10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z) \cdot \vec{i} + (2x+y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  по контуру  
 треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 2x + y + z = 2$  с координатными  
 плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 47

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $D: x = y^2 + 1; x + y = 3$
2. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x + y = 8; y = \sqrt{4x}; z = 0; z = 3y$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; y \geq 0; z \geq 0; y \leq x$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + z^2 = y; x^2 + z^2 = 10; y \geq 0$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (xy + y^2) dl$ , где  $\alpha$  - часть прямой от точки  $A(-2; 3)$  до точки  $B(2; 1)$ .
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + \frac{x^2}{2} \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $M(0; 0)$  до точки  $N(1; 2)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$  в точке  $M(1; 1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 3(x - z) \cdot \vec{i} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидальности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 48

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x; y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $y^2 = -8x + 16$ ;  $y^2 = 24x + 48$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz$ , где  $V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y^2 + z^2 = x; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$ .
5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 4; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 2z$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 y + xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  
 $A(0;0); B(3;0); C(0;3)$ .
7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} xy^2 dx + \frac{3}{2} x^2 y dy$ , где  
 $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;2); C(1;1)$ .
8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{y^3}{x^2 z}$  и  $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$  в точке  
 $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{2}\right)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (5x + y - z) dS$ , где  
 $S$  - часть плоскости  $P: x + 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x - 3y + z = 6$  с  
координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 49

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластики  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y = 0$ ;  $2y^2 = x$ ;  $y \geq 0$ , если  
поверхностная плотность  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq x$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $3\sqrt{x^2 + z^2} = y$ ;  $x^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = 2z$ ;  $z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t); \\ y = e^t (\cos t - \sin t); \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{2} e^{2t}$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ,  $y \geq 0$  от точки  $A(3;0)$  до точки  $B(-3;0)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = 5xy^3z^2$  в точке  $M_1(2;1;-1)$  по направлению  
 $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(4;-3;0)$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$  с  
координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + z) \cdot \vec{k}$  является  
соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 50

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана следующими линиями:  $y \geq 0$ ;  $x + 2y - 12 = 0$ ;  $y = \lg x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = \frac{x}{2}$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 4x + 6y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $x^2 + y^2 = 4y$ ;  $z = 4 - x^2$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 - xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  $A(2;1)$ ;  $B(6;1)$ ;  $C(4; -1)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где  $\alpha$  - верхняя половина окружности  $x^2 + y^2 = 9$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = xyz$  и  $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (6x + y + 4z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} = (x + 2z) \cdot \vec{i} + (y - 3z) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 3x + 2y + 2z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

## Вариант 51

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (xy - 9x^5y^5) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = \sqrt{3}x; x = 0$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{y-2x}{x^2+y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $z = x^2 + y^2 + 1; x^2 + y^2 = 4x; z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = x^2; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \begin{cases} x = 4(\cos t + t \cdot \sin t); \\ y = 4(\sin t - t \cdot \cos t); \end{cases} 0 \leq t \leq 2$ , при заданной плотности  $\mu = t^2 + 1$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 2x^2 + y^2 = 1; y \geq 0$  от точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$  до точки  $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$  в точке  $M(1; 1; 0)$  по направлению  $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 4x \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + z = 4$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + (y + z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

## Вариант 52

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x; y) dx + \int_1^0 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V 63(1+2\sqrt{y}) dx dy dz$ , где

$$V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}.$$

3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной кривыми:  $y^2 = 2x + 1; x - y = 1$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $\sqrt{x^2 + y^2} = 3z; x^2 + y^2 = 4; z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = 9z^2; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 5z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x; y)$ . Найти эту функцию:  $(20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{y^2 z^3}$  и  $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot z}$  в точке

$$M\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (3x - 2y + 6z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 2x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным, соленоидальным или гармоническим:  $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} + (y + z) \cdot \vec{j} + 2(x - z) \cdot \vec{k}$ .

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.
3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $x = 4$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{5x+2y}{x^2+y^2}$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 6\sqrt{3x}$ ;  $y = \sqrt{3x}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + x = 3$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $y \geq 0$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ ;  $z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \ln x$ ;  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ , если заданная плотность  $\mu = 2x^2$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $A(1;2)$  до точки  $B(4;4)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z - 3z$  в точке  $M_1(1; -2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(13; -5; 0)$ .
9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x+2y+z=6$  с координатными плоскостями.
10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z-x) \cdot \vec{i} + (x+2y) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x+4y+2z=8$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?
2. Способы вычисления потока векторного поля.
3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 54

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt[3]{x}$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$ , где  $V: y=9x; y \geq 0; x=1; z \geq 0; z=\sqrt{xy}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}$ .

4. Найти объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $z=4-y^2; x^2+y^2=4x; z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2+z^2=y; y=2$  относительно оси  $OY$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,

соединяющий точки  $O(0;0)$  и  $A(1;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x^2+y^2) dx + (x^2-y^2) dy$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;0); C(0;1)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{1}{x^2yz}$  и  $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot z}$  в точке

$$M\left(2; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x-3y+z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x+2y+z=4$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?
2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.
3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

## Вариант 55

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f(x; y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\cos x} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 8y = 0$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x = 16\sqrt{2y}$ ;  $x = \sqrt{2y}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + y = 2$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 6z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $V : x = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha : \begin{cases} x = -3(\cos t - t \sin t) \\ y = -3(\sin t - t \cos t) \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при плотности  $\mu = t$ .
7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $\frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ . Найти эту функцию.
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$  в точке  $M(1; -3; 4)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P : x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a} : \vec{a} = (2x - yz) \cdot \vec{i} + (xz - 2y) \cdot \vec{j} + 2xyz \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 56

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = (x-4)^2$ ;  $y = 16 - x^2$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной следующими кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $2y^2 = x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7}{2}x^2 + 6y$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1; y \geq x; x \geq 0; z \geq 0.$$

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного ограничивающими поверхностями:  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $z = 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t; \\ y = 10 \sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = 2 \cos^2 t$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y) dx + (y-x) dy$

$$\text{, где } \alpha: \begin{cases} y = x^2; \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x}{yz^2}$  и  $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$  в точке

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x+3y-z) dS$ , где

$S$  - часть плоскости  $P: 2x + y + z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} + (y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x - y - 2z = -2$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?
3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 57

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  
 $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x-5y}{x^2+y^2}$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz$ , где  $V$ :  
 $z = 10y$ ;  $x + y = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $x^2 + z^2 = 36$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ :  $y^2 + z^2 = x^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{x+2y+5}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(0; -2)$  до точки  $B(1; 0)$ .

7. Показать, что данное дифференциальное выражение  $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x; y)$ . Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля  $u = xy - \frac{x}{z}$  в точке  $M(-4; 3; -1)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: x + 2y + z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = xy(3x - 4y) \cdot \vec{i} + x^2(x - 4y) \cdot \vec{j} + 3z^2 \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.
2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.
3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

## Вариант 58

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x; y) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\cos y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y = x$ ;  $x = 2$ .

3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = \sqrt{y}$ ;  $y = 2x$ ;  $y = 3$ ;  $x \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y = x; z \geq 0; x \geq 0.$$

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $49(x^2 + y^2) = 4z^2$ ;  $7(x^2 + y^2) = 2z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 20xz$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (2z - \sqrt{y^2 + x^2}) dl$ , где  $\alpha$  - первый виток канонической винтовой линии  $x = t \cos t$ ;  $y = t \sin t$ ;  $z = t$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z + z^2x$  в точке  $M_1(1; -1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(3; 4; -1)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (y + z) \cdot \vec{i} + (x + 6y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P : x + 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P : x + 3y + 2z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?
2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 59

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана указанными линиями:  $x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^3$ .

2. Найти массу пластинки  $D$ , заданной указанными линиями:  $D: x = 2; y^2 = 2x; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$ .

3. Найти площадь области  $D$ , заданной ограничивающими ее линиями:  $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 6x + y^2 = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y \geq 0; y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}; z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}; y = 9$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = 2 + 2\arcsin \sqrt{x}; \frac{1}{4} \leq x \leq 1$  при заданной плотности  $\mu = x^2 + x$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} x dy - y dx$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ .

8. Найти производную скалярного поля:  $u = z^2 + 2\arctg(x - y)$  в точке  $M(1; 2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (7x + y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x - 2y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = \frac{x}{y} \cdot \vec{i} + \frac{y}{z} \cdot \vec{j} + \frac{z}{x} \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

- Оператор Лапласа и его некоторые применения.
- Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 60

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x; y) dx dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = x^2 + 2x$ ;  $y = x + 2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz$ , где  $V: y = x$ ;

$$y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = 5(x^2 + y^2).$$

4. Вычислить центр масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 6\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 3z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 15x$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ , где  $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$  при заданной плотности

$$\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+x).$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ . Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x + 3y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей,  $u = xy^2z$  и  $v = \sqrt{2} \cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} \cdot z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

- Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

- Некоторые применения оператора Гамильтона.
- Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 61

- Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy$ .
- Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 27x^2 y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt[3]{x}; (x \geq 0)$ .
- Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями:  $2x + 3y - 12 = 0; 2z = y^2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
- Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .
- Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  - поверхностная плотность тела:  $V: 25(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2)$ .
- Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $V$ , ограниченную поверхностями:  $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2}; x^2 + z^2 = 16; y \geq 0$ .
- Найти работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M$  к точке  $N$ :  $\vec{F} = (x^2 - 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ , где  $\alpha$  - отрезок от точки  $M(-4; 0)$  до  $N(0; 2)$ .
- Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_K \frac{y \cdot dS}{x}$ , где  $K$  - дуга полукубической параболы  $y^2 = \frac{4}{9} x^3$  от точки  $A(3; 2\sqrt{3})$  до  $B\left(8; \frac{32\sqrt{3}}{3}\right)$ .
- Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; P: x + y + z = 1$ .
- Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + 4z) \cdot dS; P: 2x + 2y + z = 4$ .

## Контрольные вопросы

- Что называется двойным интегралом?
- Какое поле называется скалярным?
- Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 62

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x; y) dx$ .

2. вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;  
 $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $x = 0$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  
 $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}$ ;  $y = \frac{5x}{9}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{x})$ .

4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (2x - 3y + z^2) dx dy dz$ , где  $V: \begin{matrix} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 2 \leq z \leq 3 \end{matrix}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

$V: x^2 + y^2 = 2x$ ;  $x + z = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $x \geq 0$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} xy dl$ , где  $\alpha$  - часть окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (1 - x^2) dx + x(1 + y^2) dy$ , где  $\alpha: x^2 + y^2 = R^2$ .

8. вычислить работу силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ :  $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой  $MN$ .

9. Вычислить массу дуги  $\alpha$  при заданной плотности  $\mu: \alpha: \rho = e^{\frac{3}{4}\varphi}$ ;  $\varphi \in \left[0; \frac{4\pi}{7}\right]$ ;  $\mu = \rho^{\frac{4}{3}}$ .

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью  $OZ$ ):  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $P: 2x + 3y + z = 1$ .

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

## Вариант 63

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 - 2y + z) dx dy dz$ , где  $V: 0 \leq x \leq 1$   
 $-1 \leq z \leq 3$

3. Найти массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми, если  $\mu = \mu(x; y)$ -  
поверхностная плотность пластинки  $D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \leq 0; \mu = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$ .

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  
 $x + y = 4; x = \sqrt{2y}; z \geq 0; z = \frac{3x}{5}$ .

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y \leq x; y \geq 0; z \geq 0$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,  
соединяющей точки  $A(1; 1; 1)$  и  $B(2; 2; 2)$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: y = 2 - \frac{x^2}{8}$  от точки  $M(0; 2)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{yz^2}{x^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2x - z) \cdot \vec{i} + (y - x) \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$ , через внешнюю  
поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4x - y + z) dS$ , где  $P: x - y + z = 2$ .

## Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.
3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

## Вариант 64

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Найти площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  
 $D: x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y=0; y=\sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  
 $V: x+y=4; y=\sqrt{2x}; z \geq 0; z=3y$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  
 $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36; x \geq 0; z \geq 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если  $\mu = \mu(x; y; z)$  - поверхностная плотность  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = 4z^2; x \geq 0; y \geq 0; \mu = 10z$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 1 + \sin \varphi$ , если  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = \sin\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\varphi}{2}\right)$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$  от точки  $M(2;0)$  до точки  $N(-2;0)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$  в точке  $M(1;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .
9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x+2y+z=4$  с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).
10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (y+x) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+2y+2z=4$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
2. Какое поле называется векторным?
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

## Вариант 65

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторного с внешним интегрированием по  $x$  и внешним интегрированием по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  $D: y = 0; y \geq x; y = -\sqrt{2-x^2}$ .

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}; y = \frac{5}{18}x; z \geq 0; z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x})$ .

3. Найти массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x = 2; y \geq 0; y^2 = 2x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = 8x; x = 2$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = 2(x^2 + y^2); z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: x^2 + y^2 = 4 (x \geq 0; y \geq 0)$  от точки  $M(2; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = u(x; y; z)$  и  $v = v(x; y; z)$  в точке  $M\left(2; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); u = x^2 y z^3; v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} + (3x + z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + y + 2z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a}:(y-z)\cdot\vec{i}+3xyz\cdot\vec{j}+(z-x)\cdot\vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

## Вариант 66

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x,y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x,y) dy$ .

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^3; y=\sqrt{x}$ .

3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = x; x = 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ , где

$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16; z \geq 0$ .

5. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями:  $x = 19\sqrt{2y}; x = 4\sqrt{2y}; z \geq 0; z - y = 2$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2(1 - \cos \varphi)$ , где  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , если плотность  $\mu = \cos \frac{\varphi}{2}$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + x^2y\cdot\vec{j}$  при перемещении вдоль прямой  $\alpha$  от точки  $M(-1;2)$  до точки  $N(0;1)$ .

8. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y+2z)\cdot\vec{i} + (x+2z)\cdot\vec{j} + (x-2y)\cdot\vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + 2z = 2$  и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + (x+3y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z)\cdot\vec{i} + (x+z)\cdot\vec{j} + (x^2 - y^2)\cdot\vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?
2. Что такое дивергенция векторного поля?
3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

## Вариант 67

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^2; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; (x \geq 0; y \geq 0)$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x+2y}{x^2+y^2}$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \left(5x + \frac{3z}{2}\right) dx dy dz$ , где  $V: y=x; y=0; x=1; z \geq 0; z=x^2+15y^2$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: z=9\sqrt{x^2+y^2}; z=36$ .
5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , где  $\alpha$  - дуга кривой:  $x = \cos t; y = \sin t; z = \sqrt{3} \cdot t; 0 \leq t \leq 2\pi$ .
6. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = x^2$  от точки  $M(-1;1)$  до точки  $N(1;1)$ .
7. Найти производную скалярного поля:  $u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $M(2;1;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .
8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (5x+2y+2z) dS$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + (x+y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность, образованную плоскостью  $P: x+2y+z=2$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x+2y+2z=4$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?
3. Вычисление работы силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  с помощью криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 68

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: x = \sqrt{9 - x^2}; y = x; y \geq 0.$$

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $y = \cos x; y \leq x + 1; y \geq 0$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:  $x + y = 6; y = \sqrt{3x}; z \geq 0; z = 4y$ .

4. Найти массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 6z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 90y$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x = 1 - y^2 - z^2; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{4}\rho$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка:  $\int_{\alpha} x dy - x^2 y dx$ , где  $\alpha$  часть кривой  $y = x^3$  от точки  $M(0;0)$  до точки  $N(2;8)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^3}{xy^2}$  и  $v = 9\sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$  в точке  $M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости  $P: x + y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} - 2xz \cdot \vec{j} - 3(y + z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

5. Физические приложения двойного интеграла.
6. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 69

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $D: y = x^2 + 2; x \geq 0; x = 2; y = x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 1; y \geq 0; y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 6x + 3y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$ , где  $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах  $\iiint_V \frac{xdx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0; y \leq x; z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 3(x^2 + y^2); x^2 + y^2 = 9; z \geq 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^2$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  
 $\oint_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dx + (xy^2 + y \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)) dy$ , где  $\alpha: x^2 + y^2 = 4$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$  в точке  $M(1; 5; -2)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$ -часть плоскости  $P: x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (6x - y + 8z) dS$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x - 3y + z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 70

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x; y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 10y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ .

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:  
 $y = 5\sqrt{x}$ ;  $y = \frac{5x}{3}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 9z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность  $\mu = 10z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (y^2 - 2xy) dl$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(-3; 4)$  до  $B(3; 1)$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (2x - y) \cdot \vec{i} + (x^2 + x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль кривой  $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ;  $y \geq 0$  от точки  $M(3; 0)$  до точки  $N(-3; 0)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{yz^2}$  и  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y + z) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x - y + z = 2$  и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y + z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как изменить порядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

## Вариант 71

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x=1; y=-x^2; y=\sqrt{x}$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными кривыми:  $V: y = 17\sqrt{2x}; y = 2\sqrt{2x}; z \geq 0; z+x = \frac{1}{2}$ .
5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 36; y \geq 0; z \geq 0; y \leq -x$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \rho = 2 \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi$ , при заданной плотности  $\mu = \rho^3$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 9x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$  от точки  $M(1;0)$  до точки  $N(0;3)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u: u = y \cdot \ln(1+x^2) - \arctg z$  в точке  $M(0;1;1)$  по направлению  $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y-z) \cdot \vec{i} + (x+2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x+3y+2z=6$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + (y+z) \cdot \vec{j} + (3y+z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 3x-2y+2z=6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

## Вариант 72

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $x = 4 - y^2$ ;  $x - y + 2 = 0$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной заданными линиями:  $D: x = 1$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = 4x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = x + 3y^2$ .
3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (15x + 30z) dx dy dz$ , где  $V: z = x^2 + 3y^2$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = x$ .
4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V: x^2 + y^2 = z$ ;  $z = 3$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  в третьей четверти.
7. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z}{x^3 y^2}$  и  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$  в точке  $M\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .
8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} (x - y)^2 dx - (x + y)^2 dy$ , где  $\alpha$  - часть прямой между точками  $M(2; 0)$  и  $N(4; 2)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (2x + 5y + 10z) dS$ ,  $P: 2x + y + 3z = 6$ .
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = 4z \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $x - 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

## Вариант 73

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:  
 $x \geq 0; y \geq x; y = \sqrt{9 - x^2}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3} \cdot x$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного указанными поверхностями:  
 $x = \frac{5}{2}\sqrt{y}; x = \frac{5}{6}y; z \geq 0; z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$ , где  $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1; x = 0; y = 0; z = 0$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $4y = x^2 + z^2; y = 9$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\alpha$  - дуга окружности  
 $x^2 + y^2 = 2x$  во второй четверти.
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2) \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от точки  $M(2; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .
8. Найти производную скалярного поля:  $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$  в точке  $M(1; 3; 2)$  по направлению  $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y + z) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (y - 2) \cdot z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 6x^2 \cdot \vec{i} + 3\cos(3x + 2z) \cdot \vec{j} + \cos(3y + 2z) \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 74

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область  $D$  задана указанными линиями:

$$D: y^2 = 2x; x^2 = 2y; x \leq 1.$$

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy$ , где  $D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt[3]{x}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:

$$D: x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0, \text{ если поверхностная плотность пластинки } \mu = \frac{y-4x}{x^2 + y^2}.$$

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2}; x = 20.$$

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$x^2 + z^2 = 2y; y = 2 \text{ относительно оси } OY.$$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой

от точки  $A(0;0)$  до точки  $B(2;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:

$$\oint_{\alpha} \left( x^2 - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \frac{x^3}{3} - y^2 \right) dy, \text{ где } \alpha: x^2 + y^2 = 4.$$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{z^2}{xy^2}$  и  $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$  в точке

$$M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + (z+y) \cdot \vec{j} + (x-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью  $P: x+3y+z=3$  и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = x \cdot \vec{i} + (y-2z) \cdot \vec{j} + (2x-y+2z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x+2y+2z=2$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

## Вариант 75

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $xy = 1$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 2$ ;  $x = 0$ .
3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ ;  $y = \sqrt{3}x$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $V: x = 20\sqrt{2}y$ ;  $x = 5\sqrt{2}y$ ;  $z = 0$ ;  $x + y = \frac{1}{2}$ .
5. Найти момент инерции однородного тела  $V: x^2 + z^2 = 2y$ ;  $y = 2$  относительно оси  $OY$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , описываемой уравнением:  $\rho = 4$ ;  $0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}$  при заданной плотности  $\mu = 15\rho^3$ .
7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:  $\int_{\alpha} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $M(1;1)$  до точки  $N(2;2)$ .
8. Найти производную скалярного поля:  $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$  в точке  $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$  по направлению вектора  $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ .
9. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = 3x^2y \cdot \vec{i} - 2xy^2 \cdot \vec{j} - 2xyz \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.
10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_D (3x + 10y - z) dS$ .

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 76

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt{x}$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  
 $x^2 + y^2 - 2y = 0; x^2 + y^2 - 10y = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = \frac{5}{3}\sqrt{y};$   
 $x = \frac{5y}{9}; z \geq 0; z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y})$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = z^2; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 35z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $z = 9 - x^2 - y^2; z = 0$  относительно оси  $OZ$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ , заданной уравнением:  $\rho = 5 \cdot e^{\frac{5\varphi}{12}}; 0 \leq \varphi \leq 1$ , при заданной  
 плотности  $\mu = \frac{12}{13} \cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль прямой линии  $\alpha$  от  
 точки  $M(-1; 2)$  до точки  $N(0; 1)$ .
8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x^2}{yz^2}; v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  в точке  
 $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$ , где  $S$  - часть  
 плоскости  $P: x - 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями:  $\iint_S (4y - x + 4z) dS$ .
10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (y-z) \cdot \vec{i} + (2x+y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  по контуру  
 треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 2x + y + z = 2$  с координатными  
 плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 77

1. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $D: x = y^2 + 1; x + y = 3$
2. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x + y = 8; y = \sqrt{4x}; z = 0; z = 3y$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ , где  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; y \geq 0; z \geq 0; y \leq x$ .
5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + z^2 = y; x^2 + z^2 = 10; y \geq 0$ .
6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (xy + y^2) dl$ , где  $\alpha$  - часть прямой от точки  $A(-2; 3)$  до точки  $B(2; 1)$ .
7. Вычислить работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + \frac{x^2}{2} \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $M(0; 0)$  до точки  $N(1; 2)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$  в точке  $M(1; 1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} + 2z \cdot \vec{j} + (y - 7z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + 3y + z = 6$  с координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = 3(x - z) \cdot \vec{i} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидальности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 78

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x; y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  
 $y^2 = -8x + 16$ ;  $y^2 = 24x + 48$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz$ , где  $V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y^2 + z^2 = x; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 4; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 2z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 y + xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  
 $A(0;0); B(3;0); C(0;3)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} xy^2 dx + \frac{3}{2} x^2 y dy$ , где  
 $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;2); C(1;1)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{y^3}{x^2 z}$  и  $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$  в точке  
 $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{2}\right)$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S$   $\iint_S (5x + y - z) dS$ , где  
 $S$  - часть плоскости  $P: x + 2y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (3x - y) \cdot \vec{i} + (2y + z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: 2x - 3y + z = 6$  с  
координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластики  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y = 0$ ;  $2y^2 = x$ ;  $y \geq 0$ , если  
поверхностная плотность  $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$ .

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ ;  $y \geq x$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  
 $3\sqrt{x^2 + z^2} = y$ ;  $x^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  
 $x^2 + y^2 = 2z$ ;  $z = 2$  относительно оси  $OZ$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t); \\ y = e^t (\cos t - \sin t); \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при заданной плотности  $\mu = \frac{3}{2} e^{2t}$ .

7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$  при перемещении вдоль линии  
 $\alpha: x^2 + y^2 = 9$ ,  $y \geq 0$  от точки  $A(3;0)$  до точки  $B(-3;0)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = 5xy^3z^2$  в точке  $M_1(2;1;-1)$  по направлению  
 $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(4;-3;0)$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру  
треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P: x + 3y + 2z = 6$  с  
координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + z) \cdot \vec{k}$  является  
соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

## Вариант 80

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана следующими линиями:  $y \geq 0$ ;  $x + 2y - 12 = 0$ ;  $y = \lg x$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $y^2 = \frac{x}{2}$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = 4x + 6y^2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^5}$ , где  $V: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $x^2 + y^2 = 4y$ ;  $z = 4 - x^2$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (x^2 - xy) dl$ , где  $\alpha$  - ломаная  $ABC$ ,  $A(2;1)$ ;  $B(6;1)$ ;  $C(4; -1)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где  $\alpha$  - верхняя половина окружности  $x^2 + y^2 = 9$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = xyz$  и  $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (6x + y + 4z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} = (x + 2z) \cdot \vec{i} + (y - 3z) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 3x + 2y + 2z = 6$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

## Вариант 81

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (xy - 9x^5y^5) dx dy$ , где  $D: x=1; y=\sqrt[3]{x}; y=-x^2; x \geq 0$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 - 4y = 0; x^2 + y^2 - 8y = 0; y = \sqrt{3}x; x = 0$ .
3. Вычислить массу пластинки  $D$ , ограниченной кривыми:  $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{y-2x}{x^2 + y^2}$ .
4. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного следующими поверхностями:  $z = x^2 + y^2 + 1; x^2 + y^2 = 4x; z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y^2 + z^2 = x^2; y^2 + z^2 = 9; x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: \begin{cases} x = 4(\cos t + t \cdot \sin t); \\ y = 4(\sin t - t \cdot \cos t); \end{cases} 0 \leq t \leq 2$ , при заданной плотности  $\mu = t^2 + 1$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F}: \vec{F} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: 2x^2 + y^2 = 1; y \geq 0$  от точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$  до точки  $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$  в точке  $M(1; 1; 0)$  по направлению  $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .
9. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = 4x \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x + y + z = 4$  и координатными плоскостями.
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + (y + z) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x + 3y + z = 3$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

## Вариант 82

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x; y) dx + \int_1^0 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V 63(1+2\sqrt{y}) dx dy dz$ , где

$$V: y = x; y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = \sqrt{xy}.$$

3. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной кривыми:  $y^2 = 2x + 1; x - y = 1$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $\sqrt{x^2 + y^2} = 3z; x^2 + y^2 = 4; z \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = 9z^2; x \geq 0; y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 5z$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \sqrt{2y} dl$ , где  $\alpha$  - первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x; y)$ . Найти эту функцию:  $(20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{x^2}{y^2 z^3}$  и  $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot z}$  в точке

$$M\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (3x - 2y + 6z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 2x + y + 2z = 2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным, соленоидальным или гармоническим:  $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} + (y + z) \cdot \vec{j} + 2(x - z) \cdot \vec{k}$ .

## Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.
3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $x = 4$ .
2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{5x + 2y}{x^2 + y^2}$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 6\sqrt{3x}$ ;  $y = \sqrt{3x}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + x = 3$ .
4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $y \geq 0$ ;  $y = \sqrt{3} \cdot x$ ;  $z \geq 0$ .
5. Вычислить момент инерции тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2 = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 4$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \ln x$ ;  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ , если заданная плотность  $\mu = 2x^2$ .
7. Найти работу силы  $\vec{F} = (xy - x) \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha: y = 2\sqrt{x}$  от точки  $A(1;2)$  до точки  $B(4;4)$ .
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z - 3z$  в точке  $M_1(1; -2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(13; -5; 0)$ .
9. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: 3x + 2y + z = 6$  с координатными плоскостями.
10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (2z-x) \cdot \vec{i} + (x+2y) \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 4y + 2z = 8$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?
2. Способы вычисления потока векторного поля.
3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

## Вариант 84

1. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy$ , где  $D: x=1; y=x^3; y=-\sqrt[3]{x}$ .

2. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$ , где  $V: y=9x; y \geq 0; x=1; z \geq 0; z=\sqrt{xy}$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$  если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}$ .

4. Найти объем тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $z=4-y^2; x^2+y^2=4x; z \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x^2+z^2=y; y=2$  относительно оси  $OY$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой,

соединяющий точки  $O(0;0)$  и  $A(1;2)$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x^2+y^2) dx + (x^2-y^2) dy$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(0;0); B(1;0); C(0;1)$ .

8. Найти угол между градиентами скалярных полей  $u = \frac{1}{x^2yz}$  и  $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot z}$  в точке

$$M\left(2; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x-3y+z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x+2y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x+z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (2x-y) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x+2y+z=4$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?
2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.
3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

## Вариант 85

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f(x; y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\cos x} f(x; y) dy$ .
2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными кривыми:  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 8y = 0$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$ .
3. Вычислить объем тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $x = 16\sqrt{2y}$ ;  $x = \sqrt{2y}$ ;  $z \geq 0$ ;  $z + y = 2$ .
4. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 6z$ .
5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ , заданного следующими поверхностями:  $V : x = y^2 + z^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .
6. Вычислить массу дуги  $\alpha : \begin{cases} x = -3(\cos t - t \sin t) \\ y = -3(\sin t - t \cos t) \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  при плотности  $\mu = t$ .
7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $\frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x; y)$ . Найти эту функцию.
8. Найти производную скалярного поля  $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$  в точке  $M(1; -3; 4)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ .
9. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P : x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.
10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a} : \vec{a} = (2x - yz) \cdot \vec{i} + (xz - 2y) \cdot \vec{j} + 2xyz \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 86

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x; y) dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  $y = (x-4)^2$ ;  $y = 16 - x^2$ .

3. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной следующими кривыми:  $x = 2$ ;  $y \geq 0$ ;  $2y^2 = x$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7}{2}x^2 + 6y$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1; y \geq x; x \geq 0; z \geq 0.$$

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного ограничивающими поверхностями:  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $z = 0$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha$ :  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t; \\ y = 10 \sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  при заданной плотности  $\mu = 2 \cos^2 t$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} (x+y) dx + (y-x) dy$

$$\text{, где } \alpha: \begin{cases} y = x^2; \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей:  $u = \frac{x}{yz^2}$  и  $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$  в точке

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x+3y-z) dS$ , где

$S$  - часть плоскости  $P: 2x+y+z=2$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля  $\vec{a} = (x+y) \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} + (y-z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: 2x-y-2z=-2$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?
3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

## Вариант 87

1. Вычислить площадь области  $D$ , заданной указанными линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

2. Вычислить массу пластинки  $D$ , заданной ограничивающими ее кривыми:  
 $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \leq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{x-5y}{x^2+y^2}$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz$ , где  $V$ :  
 $z = 10y$ ;  $x + y = 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , заданного указанными поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $x^2 + z^2 = 36$ ;  $y \geq 0$ .

5. Вычислить момент инерции однородного тела  $V$ :  $y^2 + z^2 = x^2$ ;  $y^2 + z^2 = 1$ ;  $x \geq 0$  относительно оси  $OX$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} \frac{dl}{x+2y+5}$ , где  $\alpha$  - отрезок прямой от точки  $A(0; -2)$  до точки  $B(1; 0)$ .

7. Показать, что данное дифференциальное выражение  $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x; y)$ . Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля  $u = xy - \frac{x}{z}$  в точке  $M(-4; 3; -1)$  по направлению  $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

9. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = (3x + y) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости  $P: x + 2y + z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = xy(3x - 4y) \cdot \vec{i} + x^2(x - 4y) \cdot \vec{j} + 3z^2 \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.
2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.
3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

## Вариант 88

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x; y) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\cos y} f(x; y) dx$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y = x$ ;  $x = 2$ .

3. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $z = \sqrt{y}$ ;  $y = 2x$ ;  $y = 3$ ;  $x \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где

$$V : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; y = x; z \geq 0; x \geq 0.$$

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $49(x^2 + y^2) = 4z^2$ ;  $7(x^2 + y^2) = 2z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 20xz$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_{\alpha} (2z - \sqrt{y^2 + x^2}) dl$ , где  $\alpha$  - первый виток канонической винтовой линии  $x = t \cos t$ ;  $y = t \sin t$ ;  $z = t$ .

7. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 + 2x) \cdot \vec{j}$  при перемещении вдоль линии  $\alpha$  от точки  $M(-4; 0)$  до точки  $N(0; 2)$ .

8. Найти производную скалярного поля  $u = x^2y + y^2z + z^2x$  в точке  $M_1(1; -1; 2)$  по направлению  $\vec{l} = \overline{M_1M_2}$ , где  $M_2(3; 4; -1)$ .

9. Найти поток векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (y + z) \cdot \vec{i} + (x + 6y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P : x + 2y + 2z = 2$  с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a} : \vec{a} = (2y - z) \cdot \vec{i} + (x + 2y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $P : x + 3y + 2z = 6$  с координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?
2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

## Вариант 89

1. Представить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  в виде повторных с внешним интегрированием по  $x$  и по  $y$ , если область интегрирования  $D$  задана указанными линиями:  $x = 1$ ;  $y = -\sqrt[3]{x}$ ;  $y = x^3$ .

2. Найти массу пластинки  $D$ , заданной указанными линиями:  $D: x = 2$ ;  $y^2 = 2x$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность пластинки  $\mu = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$ .

3. Найти площадь области  $D$ , заданной ограничивающими ее линиями:  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ;  $x^2 - 6x + y^2 = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $y = \sqrt{3}x$ .

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:  $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $y \geq 0$ ;  $y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  $z \geq 0$ .

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $y = 9$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = 2 + 2\arcsin \sqrt{x}$ ;  $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$  при заданной плотности  $\mu = x^2 + x$ .

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина:  $\oint_{\alpha} x dy - y dx$ , где  $\alpha$  - контур треугольника  $ABC$ ,  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ .

8. Найти производную скалярного поля:  $u = z^2 + 2\arctg(x - y)$  в точке  $M(1; 2; -1)$  по направлению  $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (7x + y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: 3x - 2y + 2z = 6$ , отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле  $\vec{a}: \vec{a} = \frac{x}{y} \cdot \vec{i} + \frac{y}{z} \cdot \vec{j} + \frac{z}{x} \cdot \vec{k}$  потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

## Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

2. Оператор Лапласа и его некоторые применения.
3. Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

## Вариант 90

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x; y) dx dy$ .

2. Вычислить площадь области  $D$ , ограниченной указанными линиями:  $y = x^2 + 2x$ ;  $y = x + 2$ .

3. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz$ , где  $V: y = x$ ;

$$y \geq 0; x = 1; z \geq 0; z = 5(x^2 + y^2).$$

4. Вычислить центр масс однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x = 6\sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $y^2 + z^2 = 9$ ;  $x \geq 0$ .

5. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 3z$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность тела  $\mu = 15x$ .

6. Вычислить массу дуги  $\alpha: y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ , где  $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$  при заданной плотности

$$\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+x).$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение:  $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ . Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $S: \iint_S (2x + 3y + 2z) dS$ , где  $S$  - часть плоскости  $P: x + 3y + z = 3$ , отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей,  $u = xy^2z$  и  $v = \sqrt{2} \cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} \cdot z^2$  в точке  $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

10. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}: \vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$  через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью  $P: x + 2y + z = 2$  и координатными плоскостями.

## Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

2. Некоторые применения оператора Гамильтона.
3. Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.