С.Э. Мининг, канд. техн. наук, ст. научн. сотр., ФГУП ВИОГЕМ,
Г.М. Редькин, докт. техн. наук, доцент, БГТУ им. В.Г. Шухова

Эффективность оптимизации производства в зависимости от точности определения его параметров

Ключевые слова: эффект, ущерб, оптимизация, целевая функция, параметр, линерализация, математическое ожидание, дисперсия, ковариация.

1. Постановка задачи

Производственно-технологические, службы горностроительных предприятий в процессе своей деятельности постоянно выполняют работы по измерению тех или иных параметров и по оценке их точности с целью установления соответствия фактических значений плановым или проектным величинам. На основании результатов измерений судят о выполнении предприятием плана, производят оплату отдельных категорий трудящихся, устанавливают правильность ведения горных работ в соответствии с проектом, поддерживают оптимальный режим деятельности предприятия.

Повышение точности измерений требует использования более совершенных и дорогих приборов, применения более трудоемких методов и, как правило, вызывает удорожание съемочных работ. Дополнительные затраты также необходимы при повышении точности управления предприятия в оптимальном режиме. Тем не менее, вся деятельность служб направлена на увеличение точности определяемых результатов. В связи с этим возникает вопрос, как определить экономическую эффективность повышения точности измерений и оптимального управления предприятием. Ответив на этот вопрос, можно решать такие задачи, как эффективность применения математического моделирования производственных процессов, сравнение вариантов, характеризующихся разной точностью определения исходных данных, установлении оптимальной точности измерений, расчет экономической эффективности новой измерительной техники и т. д.

Точность определения параметров влияет, прежде всего, на эффективность оптимизации производства. Для уяснения сути задачи, рассмотрим наиболее простой пример.

Пусть оптимальный режим производства достигается при максимуме целевой функции $z = \Phi(y)$, которая зависит от одной переменной y (рис.1а).

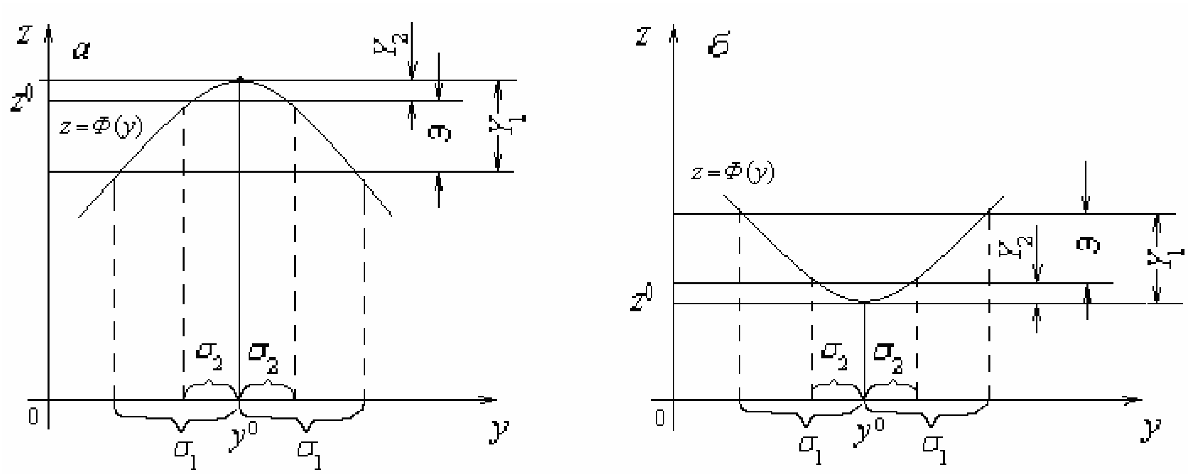

Рис. Схема для расчета эффекта $Э$ от повышения точности определения параметра y при оптимизации: $а$-по максимуму $\Phi(y)$;

$б$-по минимуму $\Phi(y)$

Такой функцией может быть прибыль, объём товарной продукции и др. При безошибочном определении y и безошибочном управлении могли бы работать точно в оптимальном режиме y^0, и результат производственной деятельности соответствовал бы максимальному значению целевой функции $z^0 = \max_y \Phi(y)$.

Если вследствие ошибок управления y работаем в интервале $\left|y - y^0\right| < \sigma_1$, где σ_1 - стандарт, или среднее квадратическое отклонение, то среднее значение целевой функции $M\Phi(y, D_1 y)$ на этом интервале будет: меньше z^0, зависеть от дисперсии $\sigma_1^2 = D_1 y$, и ущерб от погрешности измерения y составит

$$Y_1 = \max_y \Phi(y) - M\Phi(y, D_1 y) \tag{1}$$

При повышении точности определения и управления переменной y будем работать в более узком интервале $\left|y - y^0\right| < \sigma_2$. Тогда ущерб снизится до величины

$$Y_2 = \max_y \Phi(y) - M\Phi(y, D_2 y) \tag{2}$$

и эффект повышения точности будет равен разности ущербов (рис. а)

$$Э = Y_1 - Y_2 \tag{3}$$

Убеждаемся, что эффект $Э$ зависит не только от вида целевой функции $z = \Phi(y)$, но и от величины дисперсий y в сравниваемых вариантах $(D_1 y$ и $D_2 y)$.

Аналогичные результаты получим при оптимизации по минимуму целевой функции (рис. б). Такой функцией может быть себестоимость продукции, приведенные затраты и др.. В этом случае:

$$Y_1 = M\Phi(y, D_1 y) - \min_y \Phi(y), \tag{4}$$

$$Y_2 = M\Phi(y, D_2 y) - \min_y \Phi(y). \tag{5}$$

2. Определение ущерба от погрешностей измерений или управления в оптимальном режиме

Перейдем теперь к рассмотрению задачи в общей форме. В работе предприятий сталкиваются с большим количеством различных характеристик, параметров, переменных. Одни из них определяются природными свойствами или условиями производства и не могут быть изменены в процессе управления (назовём их неуправляемыми переменными). Другие управляются в процессе производства, т.е. в пределах существующих ограничений сознательно выбираются такими, чтобы обеспечивался необходимый оптимум (назовём их управляемыми переменными).

Примерами неуправляемых переменных являются количество балансовых запасов минерального сырья в тех или иных выемочных единицах, содержание металла в балансовых запасах или разубоживающих породах, изменчивость содержания металла в балансовых запасах и т.д.

Примерами управляемых переменных могут служить количество добытой руды за определенный промежуток времени, содержание металла в добытой руде, потери и разубоживание руды, колебания качества в добытой руде, количество подготовленных и готовых к выемке запасов и т.д.

Пусть оптимальный режим производства достигается при максимуме целевой функции

$$Z = \bar{\Phi}\left(\bar{x}, \bar{y}\right), \tag{6}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ - векторы соответственно неуправляемых и управляемых переменных.

Требуется определить ущерб

$$Y = M \max_{y} \Phi\left(\bar{x}; \bar{y}\right) - M\Phi\left(\bar{x}; \bar{y}\right), \tag{7}$$

отвечающий работе предприятия в оптимальном режиме с некоторой произвольной погрешностью. Решив эту задачу, можно затем получить по формуле (3) эффект от повышения точности работы предприятия в оптимальном режиме.

Можно показать [1], что ущерб Y (7) от погрешности деятельности предприятия в оптимальном режиме определяется равенством

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (c_{ii} + \vartheta_{ii}) Dx_i - \sum_{j=1}^{m} b_{jj} Dy_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} (c_{ik} + \vartheta_{ik}/2) Kx_i x_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=j-1}^{n-1} \vartheta_{ik} Kx_i x_k - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} Kx_i y_j - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^{m} b_{jl} Ky_j y_l. \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \left(d_{ij} \cdot \alpha_{jk} + d_{jk} \cdot \alpha_{ji}\right), \; c_{ii} = 2\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \cdot \alpha_{ji}, \; \vartheta_{ik} = \sum_{j,l=1}^{m} b_{jl} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{lk},$$

$$\vartheta_{ii} = \sum_{j,l=1}^{m} b_{jl} \cdot \alpha_{ji} \cdot \alpha_{li}, \; b_{jl} = \frac{\partial^2 \Phi\left(\overline{M}x; \bar{y}^0\right)}{\partial y_j \partial y_l}, \; d_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi\left(\overline{M}x; \bar{y}^0\right)}{\partial x_i \partial y_j}, \tag{9}$$

$$a_{ji} = \frac{\partial^2 \varphi_j\left(\overline{M}x\right)}{\partial x_i}, \quad i,k = 1,2,...,n, \; jl = 1,2,...,m,$$

а функции $\varphi_j\left(\overline{x}\right)$ являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi\left(\overline{x};\overline{y}\right)}{\partial y_1}=0;\quad \frac{\partial \Phi\left(\overline{x};\overline{y}\right)}{\partial y_2}=0;\quad \frac{\partial \Phi\left(\overline{x};\overline{y}\right)}{\partial y_m}=0. \tag{10}$$

В выражении (8) Dx_i, Dy_j - дисперсии соответственно неуправляемых и управляемых переменных величин, а $Kx_ix_k, Kx_iy_j, Ky_jy_l$-ковариации этих переменных величин.

Следствие. Если неуправляемые x_i $(i=1,2,...,n)$ и управляемые y_i $(j=1,2,...,m)$ переменные величины попарно не коррелированны, то ущерб равен

$$Y=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(c_{ii}+\vartheta_{ii})Dx_i-\sum_{j=1}^{m}b_{jj}Dy_j\right). \tag{11}$$

3. Ущерб при линеаризации условий оптимальной работы предприятия

Пусть при прежней постановке задачи имеем выражение управляемых переменных через неуправляемые

$$y_1=\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n), y_2=\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n),..., y_m=\varphi_m(x_1,x_2,...,x_n) \tag{12}$$

и требование работы предприятия в оптимальном режиме

$$y_1^0=\varphi_1\left(\overline{M}x\right), y_2^0=\varphi_2\left(\overline{M}x\right),..., y_m^0=\varphi_m\left(\overline{M}x\right), \tag{13}$$

где $\overline{M}x=\left(Mx_1,Mx_2,...,Mx_n\right)$- вектор математических ожиданий переменных величин.

Определим ущерб (8) при линеаризации зависимостей (13) характеризующих связи между управляемыми $\overline{y}$ и неуправляемыми переменными $\overline{x}$. Функции (12) целесообразно линеаризовать в двух случаях: если их отклонение от линейности не велико в окрестности оптимальных значений параметров производства $\left(\overline{M}\overline{x};\overline{y}^0\right)$ в диапазонах, обусловленных погрешностями управляемых $Dy_j, (j=1,2,...,m)$ и неуправляемых $Dx_i, (i=1,2,...,n)$ переменных; либо эти диапазоны малы [2].

Геометрический смысл процедуры линеаризации заключается в замене графиков функций (12) в окрестности точки оптимальной работы предприятия $\left(\overline{M\bar{x}}; \bar{y}^0\right)$ касательными гиперплоскостями в данной точке, уравнения которых с учетом обозначений (9) имеют вид

$$y_j = y_j^0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\left(x_i - Mx_i\right),\ j = 1,2,\ldots,m. \tag{14}$$

В рассмотренном случае коэффициенты корреляций между линейными функциями (17) и их аргументами $\bar{x}$ равны 1 [3], т.е.

$$r_{x_i y_j} = \frac{Kx_i y_j}{\sqrt{Dx_i \cdot Dy_j}} = 1, \tag{15}$$

откуда следуют выражения для их ковариаций

$$Kx_i y_j = \sqrt{Dx_i \cdot Dy_j} \tag{16}$$

Для нахождения ущерба Y достаточно в выражении (8) использовать формулу (16).

4. Ущерб при оптимизации потерь полезного ископаемого

Рассмотрим оптимизацию потерь полезного ископаемого на открытых горных работах по максимуму прибыли:

$$Пр=Ц_0Е(БС-ПС_п+Вв)-з_1[Б-П+В]-з_{2,} \tag{17}$$

где

$Ц_0$ - оптовая цена единицы металла, у. е.;

Е - коэффициент извлечения, доли единицы;

Б - количество погашаемых балансовых запасов, тыс. т;

П - количество потерянной руды, тыс. т;

В - количество разубоживающих пород, тыс. т;

С, Сп, в - среднее содержание металла соответственно в погашенных запасах, потерянной руде и разубоживающей породе, доли единицы,

$З_1$ - условно переменные затраты, у. е. /т;

$З_2$ - условно постоянные затраты, тыс. \ у. е..

На открытых горных работах при отработке контактов можно принять, что

$$П = m_1 k^2 + n_1;$$
$$В = m_2 (1-k)^2 + n_2, \qquad (18)$$

где k - отношение высоты треугольника потерянной руды к высоте уступа; $m_1, n_1, m_2 n_2$ - некоторые параметры, определяемые геометрией рудной залежи и применяемой технологией.

На основании выражений (17), (18)

$$Пр=Ц_0Е(БС-(m_1k^2 + n_1)С_п + m_2(1-k)^2в+n_2в)-$$

$$-З_1 [Б-(m_1 k^2 + n_1) + m_2(1-k)^2 + n_2]-З_2 . \qquad (19)$$

Здесь показатель k - управляемый, все остальные неуправляемые.

Исходные данные для примера приведены в табл.

Будем считать, что показатели не коррелированны между собой. Тогда, согласно (11), получим выражение для определение ущерба

$$Y = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{12}(c_{ii} + \vartheta_{ii})Dx_i - b_{11}Dy_1\right). \qquad (20)$$

Таблица

Показатели и их характеристики

Показатели	Математические ожидания	Дисперсии
$y_1 = k$, доли единицы	-	0,01
$x_1 = Е$, доли единицы	0,7	0,0002
$x_2 = C$, доли единицы	0,5	0,0004
$x_3 = C$п, доли единицы	0,5	0,0006
$x_4 = В$, доли единицы	0,15	0,0010
$x_5 = З_1$, у. е.	2,60	0,0004
$x_6 = З_2$, тыс. у. е.	14000	2500
$x_7 = m_1$, тыс. т.	1192	400
$x_8 = n_1$, тыс. т.	50	25

$x_9 = m_2$, тыс. т.	916	300
$x_{10} = n_2$, тыс. т.	38	25
$x_{11} = Ц_0$, у. е.	15	0
$x_{12} = Б$, тыс. т.	10000	0

На основании равенств (20), (9), (10) и значений математических ожиданий показателей, приведенных в табл., получим ущерб в зависимости от дисперсий данных показателей

$$Y = \frac{1}{2}(4740 \cdot D\text{Е} + 0 \cdot DC + 275 \cdot DC_{\text{П}} + 23800 \cdot D_{\text{В}} +$$

$$+ 418 \cdot DЗ_1 + 0 \cdot DЗ_2 + 1{,}03 \cdot 10^{-4} \cdot Dm_1 + 0 \cdot Dn_1 + 2{,}72 \cdot 10^{-4} \cdot Dm_2 + \quad (21)$$

$$+ 0 \cdot Dn_2 + 1{,}06 \cdot DЦ_0 + 0 \cdot DБ - (-8200) \cdot Dk).$$

Полагая в равенстве (21) значения дисперсий из табл. получим величину ущерба работы предприятия в режиме, отвечающему данным этой табл.

$$Y = \frac{1}{2}(0{,}95 + 0 + 0{,}16 + 23{,}8 + 0{,}17 + 0 + \quad (22)$$

$$+ 0{,}04 + 0 + 0{,}08 + 0 + 0 + 0 + 82{,}0) = 53{,}6.$$

Итак, ущерб от работы предприятия в оптимальном режиме с погрешностями, приведёнными в табл. составляет 53,6 тыс. у. е.. Выражения (21), (22) помимо определения величины *Y,* позволяют установить влияние дисперсий отдельных факторов на величину ущерба. В данном случае определяющими являются дисперсия *k*- отношения высоты треугольника потерянной руды к высоте уступа и дисперсия *b*- среднего содержания металла в засоряющих породах.

5. Выводы

1. Разработаны выражения для определения ущерба в зависимости от точности работ предприятия в оптимальном режиме. Это позволяет определять экономическую эффективность предприятия в зависимости от повышения точности деятельности предприятия в оптимальном режиме.

2. Разработанные выражения, помимо определения величины ущерба, позволяют установить влияние всех переменных на величину ущерба и выявить переменные, оказывающие существенное влияние на эффективность работы предприятия. Последующее управление определяющими ущерб переменными позволит уменьшить величину ущерба.

3**.** Управление производством, направленное на достижение расчетной эффективности, требует дополнительных затрат. Сравнение эффективности от повышения точности работы предприятия в оптимальном режиме с дополнительными затратами на управление по достижению этой эффективности приводит к решению задачи оптимального управления производством.

4. Наряду с решением задачи оптимального управления производством, аналогичным образом решаются задачи оптимальной точности измерений, экономической эффективности новой измерительной техники и др..

Библиографический список

1. Мининг, С.Э. Влияние точности определения параметров на эффективность оптимизации горного производства / С.Э. Мининг, Г.М. Редькин // Геометризация месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1997. – С. 196-213.

2. Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей /А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1994. – 191с.

3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977. – 480с.

УДК 622.013

Эффективность оптимизации производства в зависимости от точности определения его параметров.

Мининг С.Э., Редькин Г.М.

Приводятся постановка задачи, формулы для определения ущерба от погрешностей измерений при оптимизации производства и для оценки эффективности точности измерений производственно-технологических параметров. Формулы могут быть использованы при установлении оптимальной точности измерений, сравнении вариантов, характеризующихся разной точностью определения исходных данных, расчете экономической эффективности новой измерительной техники, математического моделирования производственных процессов и т.п. Прилагается численный пример оптимизации потерь на открытых горных работах. Ил.1, табл.1, библиогр.3.

Effectiveness of production optimization depending on its parameters determination accuracy.

C. E. Mining, G. M. Redkin

We carry out problem definition, formula for estimation of error damage during production optimization and for estimation of effectiveness of manufacturing characteristics measurement accuracy. Formulae can be used when determining of optimal measurement accuracy, comparing of variants with different initial data determination accuracy, calculation of economic effectiveness of new measurement tools, mathematical modeling of production process etc. The numerical example of damage optimization during open-cast is adjoined: fig.1, table 1, citation3.

Сведения об авторах публикации

Автор 1

Фамилия	Минин**г**
Имя Отчество	Сергей Эдуардович
Адрес	г. Белгород, проспект Б.Хмельницкого, 86
E-mail	
Место работы	Маркшейдерский отдел
Другие сведения	Зав.отделом, канд. техн. наук, ст. научн. сотр., тел.:26-78-41

Автор 2

Фамилия	Редькин
Имя Отчество	Геннадий Михайлович
Адрес	г. Белгород, ул. Костюкова, 46
E-mail	lenka_110290@mail.ru
Место работы	Кафедра прикладной математики
Другие сведения	Проф. каф. прикладной математики, докт. техн. наук, доцент, тел.: 30-99-06