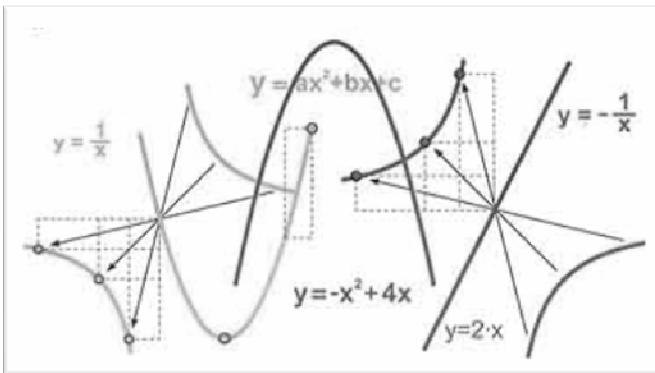


Федеральное агентство по образованию  
Белгородский государственный технологический университет  
им. В.Г. Шухова

# Методические указания

по  
выполнению

индивидуальных заданий при подготовке  
к промежуточным итоговым аттестациям  
для студентов 1 курса заочной формы обучения



УДК 51  
ББК 22.1  
М 34

Составители:

канд. техн. наук, доц. Г.Л. **Окунева**

ст. преп. Т.Н. **Лавриненко**

ст. преп. С.В. **Рябцева**

Рецензент

докт. физ.-мат. наук, доц. А.Г. Брусенцев

М 34 Методические указания по выполнению индивидуальных заданий при подготовке к промежуточным итоговым аттестациям для студентов 1 курса заочной формы обучения / сост.: Г.Л. Окунева, Т.Н. Лавриненко, С.В. Рябцева – Белгород: Изд-во БГТУ, 2011. – 66с.

В индивидуальных заданиях предложены стандартные упражнения и вопросы по теории по программам высшей математики первых двух семестров для студентов 1 курса заочной формы обучения.

Издание предназначено для студентов бакалавров всех направлений.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 51  
ББК 22.1

© Белгородский государственный  
технологический университет  
(БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2011

**Содержание**

Введение.....	4
Контрольная работа №1.....	5
Контрольная работа №2.....	36

## **Введение**

Изучение курсов высшей математики в ВУЗе помогает студенту ознакомиться с основами математического аппарата, овладеть основными навыками его использования для решения теоретических и практических инженерных задач, развить логическое мышление и умение самостоятельно получать знания, используя научную литературу по математике и ее приложениям.

Самостоятельная работа с предлагаемыми заданиями позволяет повысить общий уровень математической подготовки, помогает развить умение применять математические знания на практике.

Методические указания для студентов 1 курса заочной формы обучения предназначены для самостоятельного изучения и подготовки к экзаменам по курсам высшей математики за первый курс. Выполненная индивидуальная работа является зачетной единицей при допуске к экзамену. Задания составлены в форме билета. Студент должен выполнить практическую часть предложенного билета и письменно ответить на вопросы билета.

Каждая контрольная работа снабжена основными теоретическими сведениями, приведены примеры выполнения некоторых заданий контрольных работ.

## Контрольная работа № 1

### Темы:

1. Матрицы и определители.
2. Аналитическая геометрия на плоскости.
3. Элементы векторной алгебры.
4. Аналитическая геометрия в пространстве.

## Вариант 1

1. Решить систему уравнений методом Гаусса 
$$\begin{cases} x-2y-3z=-4, \\ 2x+y-z=2, \\ 3x+3y-4z=2. \end{cases}$$

2. Вычислить определитель четвертого порядка: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

3. При каком  $\lambda$  ранг матрицы равен 2 
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -1 \\ 2\lambda & \lambda & 10 \\ -1 & -2\lambda & -3 \end{pmatrix}$$
.

4. В треугольнике  $ABC$ , у которого  $A(1;-1)$ ,  $B(4;3)$ ,  $C(5;1)$ , найти длины сторон треугольника, высоту  $AH$ , медиану  $CM$ , площадь треугольника.

5. В точке  $A(2;6)$ , лежащей на окружности  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ , провести касательную к данной окружности.

6. Определить вид кривой и построить ее:  $4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0$ .

7. На параболе найти точку, фокальный радиус которой равен 9. Уравнение параболы  $x^2 = -12y$ .

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1;-3;4)$  перпендикулярно прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{5}$ .

9. Найти  $\sin$  угла  $B$  треугольника  $ABC$ , если  $A(3;4;1)$ ,  $B(2;1;6)$ ,  $C(4;0;2)$ .

10. Найти объем тетраэдра, заданного вершинами  $A(0;0;1)$ ,  $B(2;3;5)$ ,  $C(6;2;3)$ ,  $D(3;7;2)$ .

## Контрольные вопросы

1. Что называется определителем второго порядка?
2. Каким свойством обладают коллинеарные вектора на плоскости?
3. Что такое эллипс? Каковы его основные характеристики?

## Вариант 2

1. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти  $2A + A^2 - E$ .

2. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ x - y + 2z = 2, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель четвертого порядка: 
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Составить уравнение касательных к окружности  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 40$ , перпендикулярных прямой  $3x + y - 4 = 0$ .

5. Через точку  $C(10; -8)$  провести касательную к эллипсу  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

6. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$ .

7. Найти фокальный радиус точки  $M$  параболы  $y^2 = 8x$ , если ее абсцисса равна 8.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1\left(2; -3; \frac{1}{2}\right)$ ,  $M_2\left(3; 5; \frac{3}{5}\right)$ .

9. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} = \{3; 4; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{-1; 3; 1\}$ .

10. Показать, что точки  $A(5; 7; -2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(9; 4; -4)$ ,  $D(1; 5; 0)$  лежат в одной плоскости.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение эллипса и его основных свойств.

2. Какие вектора называются коллинеарными?

3. Как перевести уравнение прямой в пространстве из общего вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \text{ в канонический?}$$

## Вариант 3

1. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти  $A^2 + A \cdot A^{-1}$ .

2. Решить систему уравнений методом Гаусса: 
$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 0, \\ x + 2y - z = 2, \\ -x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель четвертого порядка: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
.

4. Составить уравнения окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых  $x - 2y + 4 = 0$ ;  $x + 2y = 0$  и проходящих через точку  $M(1; 0; 0)$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 - \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y - 1 = 0$ .

6. Составить каноническое уравнение эллипса, если вершины эллипса имеют координаты  $A_1(6; 0)$ ,  $A_2(-6; 0)$ ,  $B_1(0; 2)$ ,  $B_2(0; -3)$ .

7. Докажите параллельность прямых  $x = 1 + 2t$ ,  $y = -t$ ,  $z = 1 + t$  и 
$$\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

8. Найти вектор коллинеарный биссектрисе угла  $A$  треугольника  $ABC$ , заданного вершинами  $A(1; 3; 5)$ ,  $B(3; 5; 6)$ ,  $C(4; 7; 5)$ .

9. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .

10. В треугольнике  $ABC$ , где  $A(4; -6)$ ,  $B(0; 5)$ ,  $C(3; 2)$ , найти длины сторон, высоту  $AH$ , медиану  $AM$  и площадь треугольника.

### Контрольные вопросы

1. Объясните, как решаются системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными методом Гаусса.

2. Что такое скалярное произведение векторов? Перечислите основные свойства этого произведения.

3. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?

### Вариант 4

1. Найти  $A \cdot B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Исследовать систему на совместимость  $\begin{cases} x+5y+4z=1, \\ 2x+10y+8z=3, \\ 3x+15y+12z=5. \end{cases}$

3. Вычислить определитель:  $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \\ -7 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ .

4. Найти уравнение и длину высоты треугольника  $ABC$ , уравнение медианы и ее длину, проведенных из вершины  $C$ , если

$$A\left(1\frac{1}{2}; 1\right), B\left(1; 1\frac{2}{3}\right), C(2; 2).$$

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ .

6. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника со сторонами:  $9x - 2y - 41 = 0$ ,  $7x + 4y + 7 = 0$ ,  $x - 3y + 1 = 0$ .

7. Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

8. Найти вектор  $\vec{a}$ , коллинеарный вектору  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ , если его длина  $|\vec{a}| = 12$ .

9. На плоскости  $2x - 5y + 5 = 0$  найти такую точку  $M$ , чтобы прямая  $OM$  составляла с осями координат равные углы.

10. Через точку  $M(1; 5; -1)$  провести прямую, перпендикулярную к  
 прямым  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$  и  $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение определителей второго и третьего порядка. Какими свойствами они обладают?
2. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости?
3. Что такое проекция вектора? Как ее определить?

1. Решить систему матричным методом: 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x + 2y + 2z = -5, \\ 7x + y - z = 10. \end{cases}$$

2. Решить уравнение 
$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель четвертого порядка: 
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Доказать, что треугольник с вершинами  $A(1;1)$ ,  $B(2;1+\sqrt{3})$ ,  $C(3;4)$  равносторонний. Найти его площадь.

5. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(5;0)$ ,  $B(1;4)$ , если ее центр лежит на прямой  $x+y-3=0$ .

6. Определить вид кривой и построить ее график:  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ .

7. Даны точки  $M_1(1;2;3)$  и  $M_2(3;-4;6)$ . Найти направляющие косинусы вектора  $\overline{M_1M_2}$ .

8. Найти при каком значении  $k$  точки  $A(1;2;3)$ ,  $B(-1;4;0)$ ,  $C(-3;1;k)$ ,  $D(-3;2;4)$  лежат в одной плоскости.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и две точки  $A(4;-2;1)$ ,  $B(2;4;-3)$ .

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2;3;1)$ , пересекающей прямую  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$  и перпендикулярную к ней.

### Контрольные вопросы

1. Как вычисляется определитель  $n$ -ного порядка?
2. Какие уравнения прямой на плоскости Вы знаете?
3. Что такое парабола? Какие виды парабол Вы знаете?

1. Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ .

2. Решить матричное уравнение  $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4, \\ x + 4y - z = 4, \\ x - y + 5z = 5. \end{cases}$$

4. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы  $3x - y + 5 = 0$  и вершину прямого угла  $C(4; -1)$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 - y - 10x + 26 = 0$ .

6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2; -3; 3)$  и перпендикулярной к плоскости  $x - 3y + 4z - 1 = 0$ .

8. Найти расстояние от точки  $A(3; 2; -2)$  до прямой, проходящей через точки  $C(1; 2; -3)$ ,  $B(5; 2; 0)$ .

9. Даны векторы  $\vec{a} = \{2; 2; 4\}$ ,  $\vec{b} = \{3; -2; 6\}$ . Найти  $Pr_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ .

10. Определить, при каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} = (3; -4; m)$ ,  $\vec{b} = (2m; 1; 2)$  перпендикулярны.

### Контрольные вопросы

1. Что такое матрица? Какие виды матриц Вы знаете?
2. Что такое векторное произведение векторов? Как оно вычисляется в координатной форме?
3. Как располагаются плоскости в пространстве?

1. Найти ранг матрицы и базисные миноры  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений матричным методом  $\begin{cases} x-5y+z=-3, \\ 2x+y-2z=1, \\ 3x+3y+4z=10. \end{cases}$

3. Вычислить определитель:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ .

4. В треугольнике  $ABC$ , где  $A(-1;3)$ ,  $B(4;6)$ ,  $C(-3;5)$ , найти уравнение средних линий треугольника и его площадь.

5. Составить уравнения биссектрисы того угла между прямыми  $x+2y-5=0$ ,  $3x-6y+2=0$ , в который входит начало координат.

6. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2+2y^2-4x-12y+23=0$ .

7. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между директрисами равно  $8/3$  и эксцентриситет  $e=3/2$ .

8. Найти расстояние от точки  $P(7;9;7)$  до прямой  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ .

9. Найти косинус угла между векторами  $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ ,  $\vec{b}=\{1;-4;3\}$ .

10. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\vec{a}=\{-1;3;4\}$ ,  $\vec{b}=\{-2;-4;5\}$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое определитель  $n$ -ного порядка и как его вычислить?
2. Провести исследование общего уравнения прямой на плоскости.
3. Как найти угол между векторами?

### Вариант 8

1. Вычислить определитель, разложив по третьей строке  $\begin{vmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений методом Гаусса  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 3, \\ -2x + y - z = 0. \end{cases}$

3. Найти обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -7 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

4. Найти длину окружности с центром в точке  $C(2;3)$ , если она проходит через точку  $A(3;-1)$ .

5. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси  $OX$  и совпадают с вершинами эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Мнимая полуось равна 4.

6. Написать уравнение средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $AC$ , если  $A(2;0;3)$ ,  $B(-1;-2;2)$ ,  $C(-3;2;4)$ .

7. Найти объем пирамиды  $ABCD$ , если  $A(1;2;4)$ ,  $B(3;1;-2)$ ,  $C(0;1;-3)$ ,  $D(-4;1;3)$ .

8. Найти смешанное произведение векторов:  $3\vec{a} \cdot 2\vec{b} \cdot \vec{c}$ , если  $\vec{a} = \{1; -2; 4\}$ ,  $\vec{b} = \{2; -3; 2\}$ ,  $\vec{c} = \{0; 3; 1\}$ .

9. Определить расположение прямых в пространстве  $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = t + 2, \\ z = -t + 5. \end{cases}$  и

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

10. Составить плоскость, проходящую через точку  $A(1;-2;4)$ , перпендикулярно прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{5}$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие правила вычисления определителей Вы знаете?
2. Как найти расстояние от точки до прямой?
3. Что такое эксцентриситет окружности?

### Вариант 9

1. Найти  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений матричным методом 
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ x - 2y - z = -2, \\ -3x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Составить уравнение медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $A(2; -1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(1; 0)$ .

5. Составить уравнения окружностей, касающихся двух данных прямых  $3x + 4y - 10 = 0$ ,  $5x - 12y + 26 = 0$  и имеющих радиус 5.

6. Определить вид кривой и построить ее:  $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ .

7. Составить каноническое уравнение эллипса, если прямые  $x = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$

являются директрисами.

8. Через точку  $M(1; 5; -1)$  провести прямую, перпендикулярную  
прямым  $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ -x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases}$  и  $\begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$

9. Найти  $\sin$  угла между векторами  $\vec{a} = \{2; -2; 1\}$  и  $\vec{b} = \{3; 0; -4\}$ .

10. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  
 $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ .

### Контрольные вопросы

1. Как умножается матрица на число?
2. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки?
3. Что такое гипербола? Какими свойствами она обладает?

1. Решить систему уравнений методом Гаусса 
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

2. Найти  $A^2 - A^{-1} + E$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель четвертого порядка: 
$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Составить уравнения медианы и высоты треугольника  $ABC$ , проведенной из вершины  $C$ , если  $A(0;1)$ ,  $B(6;5)$ ,  $C(12;-1)$  и найти их длины.

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + y - 6x + 8 = 0$ .

6. Составить уравнение общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x-5)^2 + y^2 = 9$ .

7. Найти  $\cos$  угла между векторами  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ .

8. Найти разложение вектора  $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$  по векторам  $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$ ,  $\vec{c} = \{4; -2; 0\}$  и  $\vec{d} = \{7; 8; 1\}$ .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(1; 2; 3)$  и  $N(2; -1; 3)$  и параллельно вектору  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .

10. Доказать, что прямая  $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$  пересекает координатные

плоскости.

### Контрольные вопросы

1. Как определяются операции сложения матриц и умножение матриц на число?

2. Что такое вектор? Какие операции можно выполнить над векторами?

3. Что такое окружность? Какими свойствами она обладает?

### Вариант 11

1. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 2, \\ 3x + 4y - z = 8, \\ 6x + 2z = 10. \end{cases}$$

3. Вычислить  $A^2 - A \cdot A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

4. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + 9y^3 - 2x + 36y = 0.$

5. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(1;2)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(3;8)$ , и найти расстояние от точки  $A$  до диаметра окружности, проходящего через точку  $C$ .

6. Составить уравнение гиперболы, если ее действительная ось равна 5, а фокусы имеют координаты  $F_1(-8;0)$ ,  $F_2(8;0).$

7. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \{-5; 1; 4\}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = \{-2; 4; 1\}.$

8. Найти длину общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x-5)^2 + y^2 = 9.$

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1;2;-3)$  и параллельной плоскости  $2x - y + 3z - 1 = 0.$

10. Составить уравнение прямой, образованной пересечением плоскости  $2x - y + 3z = 0$  с плоскостью, проходящей через точки  $A(1;3;0)$ ,  $B(1;2;4)$ ,  $C(-2;5;-3).$

### Контрольные вопросы

1. Что такое ранг матрицы? Какими свойствами он обладает?
2. Как провести разложение вектора по базису?
3. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости и как он вычисляется?

1. Решить систему уравнений методом Крамера 
$$\begin{cases} x-2y+2z=2, \\ 2x+y-z=4, \\ 2x-y+5z=8. \end{cases}$$

2. Вычислить  $A + A^{-1} + E$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель четвертого порядка 
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
.

4. Найти уравнения медиан треугольника  $ABC$ , заданного вершинами  $A(2;2)$ ,  $B(-2;-8)$ ,  $C(-6;-2)$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $4x^2 - 16x + 16y - y^2 = 0$ .

6. Найти прямую, проходящую через центр окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$  и центр эллипса  $4x^2 + 9y^2 = 34 - 4x + 6y$ .

7. Найти вектор, коллинеарный векторам  $\vec{a} = \{3; 2; -4\}$  и  $\vec{b} = \{-3; 0; 2\}$ , коллинеарный вектору  $j$ .

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(3; 3; -4)$  перпендикулярно прямой  $x = 3t + 1$ ,  $y = -2t + 1$ ,  $z = -t - 1$ .

9. Найти параметрическое уравнение прямой  $\begin{cases} x+2y+z=1, \\ x-y+1=0; \end{cases}$  и расстояние от нее до точки  $A(2; 1; 3)$ .

10. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 5, -6\}$ . Найти его высоту и острый угол при основании.

### Контрольные вопросы

1. Что такое обратная матрица?
2. Как вычисляется смешанное произведение векторов?
3. Какими уравнениями описывается прямая в пространстве?

### Вариант 13

1. Решить уравнение  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. Исследовать систему уравнений  $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ x - y = b. \end{cases}$

3. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{vmatrix}$ .

4. В треугольнике  $ABC$  найти высоту, медиану проведенные из вершины  $A$ , и среднюю линию, параллельную стороне  $AB$ , если  $A(-1;2)$ ,  $B(3;5)$ ,  $C(-10;1)$ .

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точку  $(-5;3)$  и имеет эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

6. Определить вид кривой  $2x^2 + y^2 + 5x + y + 2 = 0$  и расстояние от центра до точки  $A(1;2)$ .

7. Найти вектор, коллинеарный вектору  $\vec{a} = \{-3;1;5\}$  с длиной равной  $2\sqrt{35}$ .

8. Найти уравнение и длину высоты в треугольнике  $ABC$ , проведенной из вершины  $A$ , если  $A(-3;1;5)$ ,  $B(0;1;2)$ ,  $C(1;-2;1)$ .

9. Дана пирамида с вершинами  $A(-1;1;2)$ ,  $B(1;1;0)$ ,  $C(2;6;-2)$ ,  $D(0;3;2)$ . Найти плоскость, соединяющую середины боковых ребер  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  и расстояние от нее до вершины  $D$ .

10. Определить угол между прямыми  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$  и  $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$

### Контрольные вопросы

1. Как решаются линейные системы  $m$  уравнений с  $n$  переменными методом Крамера?

2. Как располагаются прямые на плоскости?

3. Как располагаются прямые в пространстве?

1. Вычислить  $A \cdot B - B^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему 
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 6. \end{cases}$$

3. Решить уравнение  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ .

4. Найти кратчайшее расстояние от точки  $A(6; -2)$  до окружности  $x^2 + y^2 = 9$ .

5. Определить вид кривой и построить график  $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ .

6. Найти полуоси, фокусы, уравнения директрисс гиперболы  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

7. Определить при каком  $m$  плоскость  $x + my - 2 = 0$  пересекает эллиптический параболоид  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = y$  по эллипсу.

8. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} = \{1; 5; 4\}$  и  $\vec{b} = \{-3; 2; 3\}$ .

9. Найти каноническое уравнение прямой  $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0; \end{cases}$  и

расстояние от нее до точки  $A(1; -2; 0)$ .

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через середины боковых ребер прямоугольной пирамиды, заданной своими координатами  $A(-2; 0; 3)$ ,  $B(6; -2; 0)$ ,  $C(2; 2; 5)$ ,  $D(4; 2; 3)$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение эллипса и его основных свойств.
2. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?
3. Что такое скалярное произведение векторов? Перечислите основные свойства этого произведения.

1. Вычислить  $A \cdot B - B^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему  $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 6. \end{cases}$

3. Вычислить определитель:  $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ .

4. Определить вид кривой и построить график  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ .

5. Найти точки пересечения прямой  $4x - 3y - 16 = 0$  и гиперболы  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ .

6. Определить вид поверхности  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$  и проверить, принадлежит ли ей точка  $A(-2; 0; 1)$ .

7. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(-1; 2)$ ,  $B(5; -6)$ , являющимися концами диаметра.

8. Можно ли разложить вектор  $\vec{a} = \{3; 4\}$  по базису векторов  $\vec{b} = \{1; 3\}$  и  $\vec{c} = \{-2; 6\}$ .

9. Найти проекцию вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{BC}$ , если  $A(3; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(2; 5; 6)$ .

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$  и  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие вектора называются коллинеарными?
2. Что такое парабола? Какие виды парабол Вы знаете?
3. Дайте определение определителей второго и третьего порядка. Какими свойствами они обладают?

1. Вычислить  $A^2 - B^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений методом Гаусса  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

3. Решить уравнение  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ .

4. Найти расстояние между точками пересечения гиперболы  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  с прямой  $x - y = -1$ .

5. Определить вид кривой и построить график  $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ .

6. Составить уравнение эллипса софокусного с гиперболой  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , имеющего директрису  $x = 8$ .

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую  $x = 3t + 1$ ,  $y = 2t + 3$ ,  $z = -t - 2$  параллельно прямой  $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

8. Определить вид поверхности  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ .

9. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$  и  $\vec{b} = \{4; -3; 2\}$ .

10. Определить расположение прямых  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$  и  $\begin{cases} x = 7t - 1, \\ y = -2t - 2, \\ z = -2t - 3. \end{cases}$

### Контрольные вопросы

1. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости?
2. Что такое проекция вектора? Как ее определить?
3. Как вычисляется определитель  $n$ -ного порядка?

### Вариант 17

1. Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ 5x - 2y - 4z = 1. \end{cases}$$

2. Решить уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 11 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки  $A(2;5)$  и от прямой  $y=1$ . Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить график.

5. Определить вид кривой и построить график  $9x^2 - 4y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$ .

6. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Ox$ , с фокусом  $F(5;0)$ . Найти площадь треугольника, образованного вершинами  $O(0;0)$ ,  $F$ ,  $A(3;6)$ .

7. Даны три точки  $A(2;-3;1)$ ,  $B(6;1;-1)$ ,  $C(4;8;-9)$ . Найти внутренний угол  $B$  треугольника  $ABC$ .

8. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки  $A_1(3;-1;5)$ ,  $A_2(-1;0;3)$ ,  $A_3(2;1;2)$ .

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $(-3;2;1)$  параллельно прямой  $\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

10. Найти орт вектора  $\overline{M_1M_2}$ , если  $M_1(3;-3;0)$ ,  $M_2(1;-1;2)$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие уравнения прямой на плоскости Вы знаете?
2. Что такое матрица? Какие виды матриц Вы знаете?
3. Провести исследование общего уравнения прямой на плоскости.

### Вариант 18

1. Решить систему методом Гаусса: 
$$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$$

2. Выполнить действия  $2AB - A^{-1} + E$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Даны уравнения сторон треугольника  $2x+y-1=0$ ,  $x-2y+3=0$  и одна из вершин  $(0;1)$ . Найти уравнение третьей стороны, если она образует с прямой  $2x+y-1=0$  угол в  $30^\circ$ .

5. Даны точки  $A(4;-1)$ ,  $B(2;\sqrt{7})$ . Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через  $A$  и  $B$ , найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса.

6. Определить вид кривой и построить график  $4x^2 + 4y^2 - 2x - 12y - 6 = 0$ .

7. При каких значениях  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$  и  $\vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 10\vec{k}$  коллинеарны.

8. Найти точки пересечения прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$  с плоскостью  $2x+y-7z+1=0$  и с координатными плоскостями  $Oxy$ ;  $xOz$ ,  $yOz$ .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $C(4;2;1)$  перпендикулярно прямой  $AB$ , если  $A(3;-1;5)$ ,  $B(7;1;1)$ .

10. При каких  $a$  и  $b$  векторы  $\vec{p} = \{2;3;a\}$  и  $\vec{q} = \{b;-3;5\}$  коллинеарны.

### Контрольные вопросы

1. Как найти угол между векторами?

2. Как располагаются плоскости в пространстве?

3. Как перевести уравнение прямой в пространстве из общего вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \text{ в канонический?}$$

1. Решить систему матричным способом: 
$$\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 3x+y-3z=-1, \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$$

2. Решить уравнение  $A^2 \cdot X = B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Даны уравнения трех сторон треугольника  $x - y + 2 = 0$ ;  $x + y - 1 = 0$ ,  $x = 4$ . Найти уравнение высоты, проведенной к стороне  $x = 4$ .

5. Составить уравнение геометрического места точек, отношений расстояний которых до точки  $A(3;0)$  и до прямой  $x = \frac{4}{3}$  равно 1,5.

6. Определить вид кривой и построить график  $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .

7. Найти проекцию вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{BC}$ , если  $A(1;3;0)$ ,  $B(3;-2;1)$ ,  $C(3;2;5)$ .

8. Найти векторное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = \{-3;5;1\}$ ,  $\vec{b} = \{-6;1;5\}$ .

9. Найти каноническое уравнение прямой 
$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 5 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

10. Найти расстояние от точки  $M(-1;3;0)$  до плоскости, проходящей через точки  $A(-3;-2;-4)$ ,  $B(-4;2;-7)$ ,  $C(5;0;3)$ .

### Контрольные вопросы

1. Как вычисляется обратная матрица?
2. Что такое окружность? Какими свойствами она обладает?
3. Как выводится уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки?

1. Решить систему уравнений методом Крамера 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x + 2y + 2z = -5, \\ 7x + y - z = 10. \end{cases}$$

2. Найти  $A^2 + A - E$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 10 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
.

4. Даны вершины треугольника  $ABC$   $A(1;1)$ ,  $B(4;5)$ ,  $C(13;-4)$ . Найти уравнение медианы из вершины  $B$  и площадь треугольника.

5. Составить уравнение хорды окружности  $x^2 + y^2 = 49$ , делящейся в точке  $(1;2)$  пополам.

6. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$ .

7. Найти длину вектора  $\vec{a} = m\vec{i} + (m+1)\vec{j} + m(m+1)\vec{k}$ . При каком  $m$  вектор становится единичным?

8. Найти  $\vec{a}\vec{b}$  и  $|\vec{a} \times \vec{b}| - \vec{a}\vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \{5; 4; 6\}$ .

9. Найти уравнение плоскости проходящей через точки  $P(2;0;-1)$  и  $Q(1;-1;3)$  и перпендикулярной к плоскости  $3x + 2y - z + 5 = 0$ .

10. Найти угол между прямой  $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$  и плоскостью  $6x + 15y - 10z = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Как умножаются матрицы?
2. Что такое вектор? Какие операции можно выполнять над векторами?
3. Что такое гипербола? Какими свойствами она обладает?

### Вариант 21

1. Решить систему методом Гаусса: 
$$\begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ x+9y+6z=3, \\ x+3y+4z=1. \end{cases}$$

2. Найти  $AB+A^2+E$ , если  $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Даны вершины треугольника  $ABC$   $A(1;1)$ ,  $B(10;13)$ ,  $C(13;6)$ . Найти уравнение биссектрисы угла  $A$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2+4y^2+8y+5=0$ .

6. На эллипсе  $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$  найти точку, разность фокальных радиусов – векторов которой равна 3215.

7. Составить каноническое уравнение гиперболы с полуосями  $a=3$ ,  $b=4$ , если фокусы лежат на оси  $OY$ . Найти фокусы и уравнения директрис.

8. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(2;2;2)$ ,  $B(1;1;1)$   $C(3;4;5)$ ,  $D(5;1;6)$ .

9. При каких  $a$  и  $b$  плоскости  $3x-ay+5z-1=0$ ,  $bx+2y-10z+3=0$  параллельны.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;3;5)$ , перпендикулярно прямой  $x=2t-1$ ,  $y=4t-2$ ,  $z=t+3$ .

### Контрольные вопросы

1. Как располагаются плоскости в пространстве?
2. Как найти угол между векторами?
3. Что такое векторное произведение векторов? Перечислите его свойства.

1. Найти  $2A \cdot 3B + E$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений матричным методом  $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6, \\ x + 3y + z = 5, \\ -x - 4 + 2z = -3. \end{cases}$

3. Вычислить определитель:  $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ .

4. Написать уравнение биссектрисы угла, образованного прямыми  $x - 3y + 2 = 0$ ,  $3x + y - 1 = 0$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ .

6. Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус имеет координаты  $(3; 0)$ .

7. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$ .

8. Показать, что векторы  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + (m+1)\vec{k}$  и  $\vec{c} = -\vec{j} + \vec{i} + m\vec{k}$  ни при каком  $m$  не будут компланарны.

9. Через точку  $M(1; -3; 4)$  провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

10. Найти уравнение прямой, перпендикулярной плоскости  $3x - 2y + 5z = 0$ , проходящей через точку  $A(1; -2; 3)$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое эксцентриситет эллипса?
2. Что такое базис векторов?
3. Какие правила вычисления определителей Вы знаете?

### Вариант 23

1. Решить уравнение  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений методом Гаусса 
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 7 & 8 & 9 \\ -3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
.

4. В треугольнике  $ABC$  найти уравнение медианы и высоты, проведенных из вершины  $B$ , и площадь треугольника, если  $A(3;4)$ ,  $B(5;-6)$ ,  $C(4;2)$ .

5. Найти расстояние от точки  $A(6;-8)$  до прямой, проходящей через точки  $M_1(-5;0)$ ,  $M_2(3;6)$ .

6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точку  $(-5;3)$  и имеет эксцентриситет  $\varepsilon = \sqrt{2}$ .

7. Определить вид кривой  $2x^2 - y^2 + 5x - y + 2 = 0$ . Построить график.

8. Найти разложение вектора  $\vec{x} = \{1; 3; 2\}$  по векторам  $\vec{a} = \{-3; 1; 5\}$ ,  $\vec{b} = \{0; 1; 2\}$ ,  $\vec{c} = \{1; -2; 1\}$ .

9. Дан треугольник своими вершинами  $A(-1;1;2)$ ,  $B(1;1;0)$ ,  $C(2;6;-2)$ . Найти: а) площадь треугольника; б) косинусы внутренних углов; в) длину высоты  $VH$ .

10. Определить угол между прямой  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$  и плоскостью  $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое ранг матрицы? Какими свойствами он обладает?
2. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости и как он вычисляется?
3. Как провести разложение вектора по базису?

1. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ .

2. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Решить уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

4. Найти расстояние от точки  $A(1; 2)$  до прямой  $2x - 21y - 58 = 0$ .

5. Определить вид кривой и построить ее  $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ .

6. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(1; 2)$ ,  $B(0; -1)$ ,  $C(-3; 0)$ .

7. Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} = \{-5; 1; 4\}$  и  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .

8. При каких  $a$  и  $b$  прямые параллельны, если  $\frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{b}$ ,

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z - 1 = 0, \\ x + 4y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям  $2x - y + 3z - 1 = 0$  и  $x + 2y + z = 0$ .

10. Составить уравнение прямой, образованной пересечением плоскости  $x - y + z = 0$  с плоскостью, проходящей через точки  $A(2; 0; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$ ,  $C(2; 4; -3)$ .

### Контрольные вопросы

1. Какими уравнениями описывается прямая в пространстве?
2. Что такое обратная матрица?
3. Что называется смешанным произведением векторов? Какими свойствами оно обладает?

1. Решить систему методом Крамера 
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

2. Вычислить  $(A^{-1} + A)E$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
.

4. Составить уравнения медиан треугольника  $ABC$ , если заданы вершины  $A(2; 2)$ ,  $B(-2; -8)$ ,  $C(-6; -2)$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $4x^2 - 16x + 16 - y = 0$ .

6. Найти угол между радиусами окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ , проведенными в точки пересечения ее с осью  $OX$ .

7. При каком  $m$  векторы  $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$  перпендикулярны?

8. Найти  $(\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b})$ , если  $\vec{a} = \{5; -2; 1\}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(3; 2; 4)$  и отсекающей на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

10. Найти параметрическое уравнение прямой: 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

### Контрольные вопросы

1. Как располагаются прямые в пространстве?
2. Объясните, как решаются системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными методом Гаусса.
3. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?

1. Найти  $A \cdot B$  и  $BA$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ .

4. Решить уравнение:  $\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 5, \\ 5x + y - 4z = 3. \end{cases}$

5. Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми  $3x + 4y - 3 = 0$ ,  $5x + 2y + 6 = 0$ .

6. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ .

7. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между директрисами равно 12, большая ось равна  $2\sqrt{3}$ .

8. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости  $x - 2y + 4z - 21 = 0$ .

9. Найти угол  $A$  в треугольнике  $ABC$ , заданного своими вершинами  $A(2; 1; \sqrt{2})$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1 + \sqrt{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{6})$ .

10. Найти точку, симметричную точке  $A(-3; 1; 2)$ , относительно плоскости  $5x - y + 7z - 1 = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Как перевести уравнение прямой в пространстве из общего вида  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$  в канонический?
2. Что такое ранг матрицы? Какими свойствами он обладает?
3. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости и как он вычисляется?

1. Решить систему методом Гаусса: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Вычислить  $2A + 3B + E$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Найти расстояние от точки  $M(2; -1)$  до прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a = 8$ ,  $b = 6$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$ .

6. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

7. Найти проекции вектора  $\vec{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$  на оси координат, если  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(4; 6; 5)$ ,  $D(1; 6; 3)$ .

8. Составить уравнение плоскости проходящей через точку  $M(0; 2; 1)$  и параллельной векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

9. Установить расположение прямых:  $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z = 4; \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

10. Найти точку, находящуюся на удвоенном расстоянии от прямой  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{1}$  в противоположной стороне от точки  $A(3; -1; 2)$ .

### Контрольные вопросы

1. Что называется определителем второго порядка?
2. Каким свойством обладают коллинеарные вектора на плоскости?
3. Что такое эллипс? Каковы его основные характеристики?

### Вариант 28

1. Исследовать систему уравнений (определить совместность или несовместность)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Найти обратную матрицу для  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Решить уравнение:  $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

4. Составить уравнение биссектрисы угла, образованного прямыми  $x + y - 5 = 0$ ,  $7x - y - 19 = 0$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ .

6. Составить уравнение касательных к окружности  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ , проведенных в точках пересечения окружности с прямой  $x - y + 2 = 0$ .

7. Составить уравнение гиперболы, симметричной осям координат, с центром в начале координат, если действительная полуось равна 3 и точка  $(6; 2\sqrt{3})$  принадлежит ей.

8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{-2; 1; -3\}$ .

9. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки  $N(2; 3; -5)$  на плоскость  $4x - 2y + 5z = 12$ .

10. При каком  $m$  прямая  $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{5}$  и плоскость  $x - 5y - 3z - 4 = 0$  перпендикулярны.

### Контрольные вопросы

1. Как располагаются прямые на плоскости?
2. В чем заключается геометрический смысл смешанного произведения?
3. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?

### Вариант 29

1. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ .

2. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Какую матрицу  $B$  следует прибавить к

$A$ , чтобы получить единичную матрицу?

3. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x - y + 5z = 5, \\ 2x + 2y - z = 3, \\ -3x + y + 4z = 2. \end{cases}$$

4. Даны две смежные вершины квадрата:  $A(3; -9)$ ,  $B(8; -14)$ . Определить остальные вершины квадрата и составить уравнения его сторон.

5. Определить вид кривой и построить ее:  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ .

6. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса имеет уравнение  $y + 12 = 0$ .

7. При каком  $m$  векторы  $\vec{a} = \{3; -4; m\}$ ,  $\vec{b} = \{2; 5; 4\}$  перпендикулярны?

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 1; -3)$  параллельно вектору  $\vec{p} = \{1; -3; 1\}$ .

9. Привести уравнение прямой  $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 5x + 4y - z = 7. \end{cases}$  к каноническому виду.

10. Найти точку пересечения прямой  $\frac{x-4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{-3}$  и плоскости  $x + 2y - 5z - 1 = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие вектора называются компланарными?
2. Что такое парабола? Какие виды парабол Вы знаете?
3. Дайте определение определителей второго и третьего порядка. Какими свойствами они обладают?

1. Определить ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ .

2. Найти обратную матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(5;1)$  и образующую с прямой  $2x + y - 4 = 0$  угол  $45^\circ$ .

5. Определить вид кривой и построить ее:  $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ .

6. Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

7. Найти  $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

8. Найти модуль векторного произведения двух векторов  $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \{5; 4; -3\}$ .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; -3; 2)$  и параллельной двум прямым  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$  и  $x = 2t - 1$ ,  $y = t - 3$ ,  $z = 5$ .

10. Установить положение прямых 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение эллипса и его основных свойств.
2. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?
3. В чем заключается геометрический смысл векторного произведения?

### Контрольная работа № 2

**Темы:**

1. Введение в анализ: функция, предел функции.
2. Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной.

1. Найти производные: а)  $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x^2 + 1}$ ; б)  $y = \ln^2(x+3) - e^x \sin x$ ;
- в)  $y = \frac{x-x^2}{\sin x}$ ; г)  $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:  $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$ ,  
 $x \in \left[ \frac{3}{2}; 3 \right]$ .
3. Исследовать функцию и построить график функции: а)  $y = (x-6)e^{\frac{1}{x}}$ ;
- б)  $y = x^2(x-1)$ .
4. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^x$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$ ; в)  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{4x^3 - 3x^2}$ .
5. Найти длину высоты прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса  $R$ .
6. Найти дифференциал функции  $y = \cos^2(x+3x^2)$  и его приближенное значение в точке  $x_0 = 0$ .
7. Составить уравнение касательной прямой и уравнение нормали к функции  $y = x^3 - 3x^2 - 5$  в точке  $x_0 = 3$ .
8. Найти область определения функции  $y = \arccos \frac{x-1}{2}$ .
9. Найти точки разрыва функции и построить ее график
- $$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ 5, & x = 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$
10. Найти производную неявной функции:  $3x^2y^2 - \sin xy + 10x = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое числовая последовательность? Какие числовые последовательности Вы знаете?
2. Дайте определение горизонтальной асимптоты функции. Приведите примеры.
3. Выведите производную функции  $y = x^3$ , используя определение производной.

### Вариант 2

1. Найти область допустимых значений функции:  $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x + 4}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{(1 + 2x)^2}{\sqrt{x}}$ ; б)  $y = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) + \ln(\sqrt{1 + x^2} + x)$ ;
- в)  $y = \frac{x \ln x}{1 + x^2}$ ; г)  $\begin{cases} x = \sin^2(t + 1), \\ y = 1 - \cos t^2. \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции:  $y \cos(x^2 + 1) - \sin xy + x^3 = 0$ .
4. Исследовать функцию и построить график: а)  $y = x^2 e^{x^2}$ ;
- б)  $y = x^3 + 4x^2 - x + 1$ .
5. Найти предел: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{3x}$ .
6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = x - 2 \ln x$ ,  $x \in [1; e]$ .
7. Найти длины сторон прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса  $R$  так, что одна из его сторон лежит на диаметре окружности.
8. Используя логарифмическую производную, найти производную функции:  $y = x^{\ln x}$ .
9. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = -x^2 + 4$  параллельно прямой  $y = -2x + 6$ .
10. Найти асимптоты функции:  $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^3}$ .

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные свойства непрерывных числовых последовательностей.
2. Перечислите основные свойства монотонных функций.
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = tgx$ .

1. Найти область определения функции:  $y = \arcsin \frac{x-6}{2} + \sqrt{x-3}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{\sin^2 x}{x^2 + 3x - 1}$ ; б)  $y = \arcsin^2(x+3)e^x$ ;
- в)  $y = \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x$ ; г)  $\begin{cases} x = 3 \cos t - t^2, \\ y = t^3 - 3t^2 + t. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти  $y'$  для:
- а)  $y = (\sin x)^{x^2+3}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^4}{x^2(x+2)^5}}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $e^{xy^2} - \cos xy + x^2 = 0$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:  
 $y = (x-1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ,  $x \in [0; 3]$ .
6. Найти пределы функций: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3+n}{1+n} \right)^{1-n}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-1)(x+3)}{3x^3 + 2x - 5}$ .
7. Исследовать и построить график функции: а)  $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ ;
- б)  $y = (x-4)(x^2-9)$ .
8. Найти высоту конуса наибольшего объема, образующая которого равна  $l$ .
9. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$  в точке пересечения графика с осью  $Ox$ .
10. Найти экстремумы функции:  $y = \frac{x^2(x-2)}{8x+4}$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое предел числовой последовательности?
2. Дайте определение функции одной переменной, приведите примеры.
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = (x+2)^2$ .

1. Найти область определения функции:  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4} + \frac{5}{x-1}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \ln(\sqrt{x+e^x} - e^x)$ ; б)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x}$ ;
- в)  $y = \arcsin^3(x-2^x)$ ; г)  $\begin{cases} x = t + t^2 - t^3, \\ y = e^{t+t^2}. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую функцию, найти производную: а)  $y = (\operatorname{tg}(x-1))^{\cos x}$ ; б)  $y = \sqrt[6]{\frac{(x-1)^7}{(x+4)^5}}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $e^{x+y} - \sin xy + \cos x^2 = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{\sin \pi x}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 3}$ ;
- б)  $y = x^2(x+4)$ .
7. Найти уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  в точке  $x_0 = 2$ .
8. От канала шириной  $a$  под прямым углом к нему отходит канал шириной  $b$ . Найти наибольшую длину бревна, которое при сплаве из одного канала в другой не застрянет при повороте.
9. Исследовать функцию на непрерывность  $y = \frac{\log_3(x-3)}{(4-x)(x-10)}$  в точках  $x = 3, x = 4, x = 10, x = 5$ .
10. Определить промежутки выпуклости и вогнутости функции:  $y = x^4 + 5x^3 - 3$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое предел функции в точке?
2. Какие функции называются четными, нечетными общего вида? Какими свойствами обладают графики таких функций?
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = \cos 2x$ .

### Вариант 5

1. Найти область определения функции:  
 $y = \log_2 \left( \frac{x^2 - 3x + 4}{x} \right) - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \arcsin \frac{2^x - 2^{-x}}{e^x}$ ; б)  $y = \sin^3 x \cos(x^2 + 3)$ ;  
 в)  $y = e^{\arccos x} + x \ln x$ ; г)  $\begin{cases} x = \sin(t + t^2), \\ y = \cos(t - t^2). \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = (x+3)^{\arccos x^2}$ ; б)  $y = (\sin x)^{e^x}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $(x^5 + y^5)e^y - e^x \sin y = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x}{x - e}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{3x+1} \right)^{x+1}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2 + 3}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = x \ln x^2$ ;  
 б)  $y = (x+2)^2 x$ .
7. Исследовать функцию  $y = \frac{1}{(x-1)^2 x}$  на непрерывность в точках  $x=1, x=0, x=2$ .
8. Найти наименьшее значение  $a$ , при котором уравнение  $\frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} = a$  имеет на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  хотя бы одно решение.
9. Найти дифференциал функции  $y = \arcsin(x^2 - 1)$  и с его помощью посчитать значение функции в точке 1,2.
10. Составить уравнение касательной и нормали в точке  $M(1; -2)$  к графику функции  $y = x^3 - 3x^2$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое односторонние пределы функций? Дайте определение предела функции в точке слева.
2. Что такое нули функции? Какие способы определения Вы знаете?
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = \sin x$ .

### Вариант 6

1. Найти область определения функции:  $y = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{\log_2(x-x^2+4)}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{\ln(4x+3)}{\sin^2 x}$ ; б)  $y = \ln^3\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x-1}\right)$ ;
- в)  $y = (\arcsin x + \arccos x)e^x$ ; г)  $\begin{cases} y = \cos t - t^2, \\ x = t^2 + 3t - 4. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, вычислить: а)  $y = x^{\cos x}$ ;
- б)  $y = \frac{(x-3)^5(x+1)^4}{x(2x-1)^3}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $\arcsin(xy) - xy^2 + x^2y = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \sin 5x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = x^2 \ln^2 x$ ;
- б)  $y = (x-2)(x+3)(x-1)$ .
7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x$ ,  $x \in [0; \pi]$ .
8. Найти все значения  $a$ , при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$  принимает наименьшее значение.
9. Составить уравнение касательной в точках графика функции  $y = xe^{-x^2}$ , в которых она параллельна оси абсцисс.
10. Докажите, что функция  $y = \frac{x-1}{(x-4)(x+3)}$  в точке  $x_0 = -3$  терпит разрыв. Определить все точки разрыва функции.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение одностороннего предела функции в точке справа?
2. Какая асимптота функции называется вертикальной? Приведите примеры.
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = \log_2 x$ .

### Вариант 7

1. Найти область определения функции:  $y = \log_3 \sqrt{(x-3)(x+5)} + \frac{1}{x-5}$
2. Найти производные: а)  $y = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 e^{-x^2}$ ; б)  $y = x^3 \arcsin x + \frac{1}{x^2 \cos x}$ ;
- в)  $\begin{cases} x = t \sin t, \\ y = t^2 + t \sin t; \end{cases}$  г)  $y = (e^x)^{\arcsin x^2}$ .
3. Используя логарифмическую производную, вычислить: а)  $\begin{cases} x = t - 3t + \sin t, \\ y = \frac{t}{\ln t}; \end{cases}$  б)  $y = (\arccos x)^{\lg x}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}(e^x - 3)$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{x+2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)x(x+1)}{x^4 + 2x^2 + 1}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \cos x \cos 2x$ ;
- б)  $y = x^2(x+5)$ .
7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x$ ,  $x \in [-1; 1]$ .
8. Найти расстояние между графиками функций  $y = -x$  и  $y = \frac{1}{x}$ .
9. Составить уравнение касательной в точке, в которой касательная функции  $y = \frac{2x-2}{x+1}$  имеет угловой коэффициент, равный 4.
10. Найти асимптоты функции  $y = \frac{x(x+1)}{x-2}$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое экстремум функции?
2. Как раскрыть неопределенность типа  $0^0, \infty^0$  при вычислении пределов?
3. Используя определение производной функции найти производную функции  $y = (3x^2 - 6x)$ .

### Вариант 8

1. Найти область определения функции:  $y = \arcsin(x+1) - \sqrt[4]{\frac{x+3}{x}}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \arctg x - \frac{1}{2} \sin^2 x$ ; б)  $y = \frac{\ln^2 x + 3x^3}{(x + \sqrt{x})^2}$ ;
- в)  $\begin{cases} x = t - 3t + \sin t, \\ y = \frac{t}{\ln t} \end{cases}$ ; г)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}(e^x - 3)$ .
3. Используя логарифмическую производную, вычислить:  
а)  $y = [\arccos(\ln x)]^x$ ; б)  $y = (tg(x-1))^{\cos x}$ .
4. Найти производную неявной функции:  $\cos y \cdot \cos(xy) + 3 = 0$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$  на отрезке  $[-1; 2; 0]$ .
6. Найти пределы функции: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{2x^3 - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right)$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^2 - 1}$ .
7. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$ ;
- б)  $y = (x-1)e^x$ .
8. Найти конус наибольшего объема, вписанного в шар радиусом  $R$ .
9. Найти абсциссу точки касания графика функции  $y = 2x - \ln x$  и касательной к нему  $y = x + 2$ .
10. Найти экстремумы функции  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
2. Дайте определение точек разрыва функции.
3. Используя определение производной функции найти производную функции  $y = 2tgx$ .

1. Найти область определения функции  $y = (x^2 - 9)\sqrt{6 - 5x} - \frac{1}{x+1}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \log_2 x + 2\log_4 x - \ln x$ ; б)  $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} + \arctg x^6$ ;
- в)  $y = \ln^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{-x^2}$ ; г)  $\begin{cases} x = \cos(t^2 + 3t), \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $\cos^2(xy) - \sin xy + x^2 = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функций: а)  $y = x^{\sin x}$ ; б)  $y = (\ln(\cos x))^{\sin x}$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+x}}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2-x+3}\right)^{x-1}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - x^4}{3x^4 + 2x^2}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = x^3 - x + 3$ ;
- б)  $y = 2x + 4\arctg x$ .
7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 2\sin 2x + \cos 4x$ ,  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .
8. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади  $S$ , чтобы радиус вписанного в треугольник круга был наибольшим?
9. Найти все точки графика функции  $y = x^2 e^{-x}$ , в которых касательная параллельна оси  $Ox$ .
10. При каком значении  $a$  функция  $y = a \ln x + x^2 - x$  имеет экстремум в точке  $x = 1$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.
2. Дайте определения известных типов асимптот графика функции.
3. Используя определение производной функции найти производную функции  $y = 2x^3 + 5x$ .

### Вариант 10

1. Найти область определения функции  $y = 2^{\log_3(x-2)} \sqrt{x^2 - 3x}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ ; б)  $y = \sin^4(x + y^2) - e^{xy} = 0$ ;
- в)  $y = \left(\frac{x-3}{4x+1}\right)e^x$ ; г)  $\begin{cases} x = e^t t, \\ y = t - \ln t. \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $\sin(x + y^2) - e^{xy} = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = (\arcsin x \cdot 2^x)^x$ ; б)  $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{(x+3)^5}}$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x^2 + 3x - 5}\right)$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = (x-1)\sqrt{x}$ ;
- б)  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ .
7. В конус, радиусом 6 и высотой 12, вписан цилиндр наибольшего объема (основание цилиндра лежит на основании конуса). Найти радиус основания и высоту цилиндра.
8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ ,  $x \in [-5; -1]$ .
9. Найти экстремумы функции  $y = \sqrt{1 - 2x} \cdot x$ .
10. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = -3x^2 + 6x + 1$  в точке пересечения этого графика с осью ординат.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимое условие существования точек перегиба графика функции.
2. Дайте определение функции.
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = \sin 3x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{35-2x-x^2}}{\lg x}$ .
2. Найти производные: а)  $y = 2x^6 \operatorname{arctg} x^2$ ; б)  $y = \log_2(x+3x^2)\sqrt{x}$ ;
- в)  $\sqrt[4]{\arccos(1+2x)^5}$ ; г)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \cos(t^2+1). \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $\sqrt[3]{xy} - \ln(x+y) = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = \left(\sin \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{2x}$ ; б)  $y = \sqrt{5x-x^3} \sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+2)^2}}$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{5}{1+x^3} - \frac{1}{x+1}\right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+5}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-3)(x+2)}{\sqrt{x^6-3x}}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \sqrt{x^2}(x+1)^2$ ;
- б)  $y = \frac{x}{x^2-1}$ .
7. Дан шар радиуса  $R$ . Найти конус наибольшего объема, вписанный в этот шар.
8. Построить график функции  $\begin{cases} x = t^3 + 3t - 1, \\ y = t^3 - t + 1. \end{cases}$
9. На графике  $y = x^2$  найти точку с положительной абсциссой, ближайшую точке  $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ .
10. Определить промежутки возрастания и убывания функции  $y = |x-x^3|$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте достаточное условие существования точек перегиба графика функции.
2. Какие основные способы вычисления пределов функции существуют?
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = 2^{3x}$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\lg(-x^2 + 3x + 4)}{\sqrt{x-2}}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{\sqrt{x+2^{-x}}}{\arctg x}$ ; б)  $y = \arccos^2(\ln(x+1))$ ;
- в)  $\begin{cases} x = \sin(t^2 + 1), \\ y = 1 - \cos^2(t^2 + 1); \end{cases}$  г)  $y = 2\sin\left(\cos\frac{1+x}{x^2}\right)$ .
3. Найти производную неявной функции  $3y^2 - e^x \cos y + 5x^3 = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = \sqrt[3]{x^4 \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \cdot (x+1)}$ ; б)  $y = (\sin(x-1))^{\lg x}$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2-x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(2 - \frac{x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x-x^2}}{x-1}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ ;
- б)  $y = (x-1)e^{-x}$ .
7. Среди всех конусов с правильным треугольником в осевом сечении найти конус с наибольшим объемом и найти его объем.
8. На графике функции  $y = x^3 - 2x - a$ . Найти точки, в которых касательная к ней проходит через точку  $A(1; 2)$ .
9. Определить промежутки убывания функции  $y = |x - x^3|$ .
10. На графике функции  $y = |3x - 2|$  найти точку, ближайшую к точке  $A(3; 0)$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение предела числовой последовательности.
2. Перечислите основные этапы исследования функции и построения графика.
3. Используя определение производной, выведите производную функции  $y = 3 \sin 3x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-6x+9}} + \frac{3-x}{x-1}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x \cos x}$ ; б)  $y = \arcsin(x - e^x \cos x)$ ;
- в)  $y = \sin^2 x - \cos^3 x$ ; г)  $\begin{cases} x = t^2 + 3t^3, \\ y = \cos(t^3 + 1). \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $5x^2 y^2 - \sin(xy) = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = (\sqrt[3]{x^2+1})^{\sin x}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{(x-1)^5}} \cdot x$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 - 3x + 1}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = (x-1)^2 x$ ;
- б)  $y = \sqrt{x} \ln \frac{1}{x}$ .
7. Представить число  $a$  в виде суммы двух квадратов положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.
8. Найти все общие точки графика функции  $y = |x|(x-3) + 3x$  и касательной, проведенной к этому графику в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ .
9. На графике  $y = 2|x| - 3$  найти точку, ближайшую точке  $A(2; -3)$ .
10. Найти критические точки функции  $y = \cos 2x \cos 7x - \sin 2x \sin 7x$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение сходящейся, расходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, числовой последовательности.
2. Как можно задать функцию?
3. Используя определение производной функции. Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{\sin x} \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sin(x+15x^2) - e^{x+1}$ ; б)  $y = tg(\ln\sqrt{x+88\cos x})^3$ ;  
в)  $y = \frac{x^2+3x-1}{(x+1)^3}$ ; г)  $\begin{cases} x = t - e^{\cos t}, \\ y = t^2 + \cos 2t. \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $2^{xy} - e^{x+y} - x^2y^3 = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = (x^2-1)^{tg(x-1)}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{(x+3)^5} \sqrt[7]{(x-1)^9} (x-8)^{-5}$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2x + 2}{x^2 - x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(1-x) - 1}{x-1}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{2x+5} \right)^x$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y - 2 = \frac{x-1}{x^2-x}$ ;  
б)  $y = e^x \sin x$ .
7. Найти кратчайшее расстояние от точки  $A(6; -2)$  до окружности  $x^2 + y^2 = 9$ .
8. При каких значениях  $p$  из точки  $A(p; -1)$  можно провести три различных касательных к графику функции  $y = x^3 - 3x^2 + 3$ .
9. Найти критические точки функции  $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$  и среди них указать  $\min$ .
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 2 \sin 3x + \cos 6x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение неявной, сложной функции.
2. Перечислите основные правила вычисления производной функции в точке.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \frac{1}{x^2}$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}} + \lg(x^2 - 3x + 2)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \cos(e^x + x^2 - 3)$ ; б)  $y = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}$ ;
- в)  $y = \sqrt{\ln(x^2 - \sin x) \arcsin x}$ ; г)  $\begin{cases} x = 3 + t^2, \\ y = t - t^2 + 2. \end{cases}$
3. Найти производную неявной функции  $(y^2 + x) \sin xy = 0$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = [\ln(x-2)]^{\sin x}$ ; б)  $y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{(x-3)^5}{x+1}} \cdot (2x+3)$ .
5. Найти пределы функции: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\cos 7x - \cos x}{x^2 - 49}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{x^3 - 2x}}{\sqrt{3x^5 + 4x^4 - 8x}}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $(x-3)(y-1) = x^2 - 1$ ; б)  $y = \ln^2 x - 3$ .
7. Найти цилиндр наибольшего объема, вписанный в конус с высотой 10 и радиусом 5.
8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 2 \cos 2x - \cos 4x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
9. Найти промежутки убывания функции  $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x + 1$ .
10. Является ли прямая  $y = 3x - 3$  касательной к графику функции  $y = x^2 - x - \frac{1}{x^2}$ ? Почему?

### Контрольные вопросы

1. Перечислите классы простейших функций и приведите их графики.
2. Докажите правило вычисления производной суммы двух функций.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \frac{1}{3x-1}$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}} + \lg(x^2 - 6x + 9)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \arcsin(\cos x)$ ; б)  $y = \arctg^2(\ln(x-1))$ ;
- в)  $\begin{cases} x = tg(t+1), \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$  г)  $y = \frac{1}{x^2 - x^3 + x^4}$ .
3. Найти производную неявной функции  $3^{xy} - \ln(y+x) = 2$ .
4. Используя логарифмическую производную, найти производную функции: а)  $y = (2^{\cos x})^{tg \sqrt{x}}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 25}{\cos x(x-6)^3}}$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^3 - x^3}{a^2 - 2ax + x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right)^{\sqrt{x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^5}{10x^5 + 5}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = (x-3)(x^2 - 4)$ ; б)  $y = \sin x + x^2$ .
7. Найти цилиндр наибольшего объема, вписанного в шар радиуса  $R$ .
8. При каких  $a$  прямая  $y = 1 - ax$  является касательной к графику функции  $y = x + e^{-2x}$ .
9. Найти критические точки функции  $y = \sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x$ .
10. Найти значений производной функции  $y = e^{2+x} + \frac{x}{x^2 - 1}$  в точке  $x_0 = -2$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое обратная функция? Приведите примеры.
2. Дайте определение предела функции в точке.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 3$ .

1. Найти область определения функции  $y = \arcsin \frac{x^2+1}{x-1} + \sqrt{x^2-1}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}$ ; б)  $y = (3^{\arctg 2x} + \ln(1+4x^2))^4$ ;
- в)  $y = \sin^3 2x \cdot \tg(3x-x^2)$ ; г)  $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$ .
3. Используя логарифмическую производную, найти производные:
  - а)  $y = (\ctg x)^{\arcsin x}$ ; б)  $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2(x+4)^5}}$ .
4. Найти производную неявной функции  $xy = e^x - \cos(x+3y)$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arctg 2x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2x+5}\right)^{1-3x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x + 1}{\sqrt[3]{x^{12} + 2x}}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = 4xe^{\frac{x^2}{2}}$ ;
- б)  $y = (2x-3)^2 x$ .
7. Исследовать функцию  $y = \frac{4x+1}{(x+4)x}$  на непрерывность в точках  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = 4$ .
8. Найти наименьшее значение  $a$ , при котором уравнение  $\frac{2}{\sin x} + \frac{1}{2-2\sin x} = a$  имеет на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , хотя бы одно решение.
9. При каких  $a$  функция  $y = e^{ax}$  удовлетворяет уравнению  $2y''' + 3y'' - 8y' + 3y = 0$ .
10. Найти точки экстремума функции  $y = 4x - 2e^x - e^{2x} - 5$ .

### Контрольные вопросы

1. Докажите правило вычисления производной произведения двух функций.
2. Что такое замечательные пределы функции? Приведите примеры.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = x^5$ .

### Вариант 18

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 4x + 6}}{x - 2} + \lg x$ .
2. Найти производные: а)  $y = (4^{9 \cdot 2x} - \operatorname{tg} 2x)^5$ ; б)  $y = \ln(2x^2 - 1) \operatorname{tge}^{2\sqrt{x}}$ ;
- в)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2); \end{cases}$  г)  $y = \frac{4x + 3}{\sqrt[3]{x^3 - 4x - 1}}$ .
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функций: а)  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin^2 x}$ ; б)  $y = \frac{(x-1)^3 (x+2x^2)^{10}}{(x-5)^6}$ .
4. Найти производную неявной функции  $\operatorname{ctg} x + \ln \sqrt{4y+1} = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin(x-3)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1-5x}{1+3x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x + 2}{3x^3 + 4x^2 - 1}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \frac{4x^3}{9(3-x^2)}$ ;
- б)  $y = \frac{3 \ln x}{x}$ .
7. Исследовать функцию  $y = \frac{3x-1}{(x^2-4)x}$  на непрерывность в точках

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

8. Равнобедренный треугольник с периметром  $P=12$  вращается вокруг основания. Найти основание  $a$ , при котором полученное тело вращения имеет наибольший объем.

9. При каких значениях  $p$  из точки  $B(p; -1)$  можно провести три различных касательных к графику функции  $y = x^3 - 2x^2 + 3$ .

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$  на отрезке  $[0; 2,5]$ .

### Контрольные вопросы

- Докажите правило вычисления отношения двух функций.
- Сформулируйте основные свойства пределов функции в точке.
- Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 2x^4$ .

### Вариант 19

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{\log_2(x-3)} + \arcsin(x-2)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{5x-6}{\sqrt[5]{x^3+3x^2-x}}$ ; б)  $y = \ln \sqrt[4]{\frac{2x^2-3}{2x^2+3}}$ ;
- в)  $y = e^{\arctg \sqrt{4x-1}} \cdot \ln \arccos \sqrt{x}$ ; г)  $y = (3^{\arccos \sqrt{x}} - \sqrt{1-x})^4$ .
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функций: а)  $y = (tgx)^{\sqrt{x^2+3x-1}}$ ; б)  $y = \sqrt{2x+x^5} \cdot \sqrt[5]{\frac{(x-1)^3}{x+3}}$ .
4. Найти производную неявной функции  $2xy - \sin^2(x+2y) - y^2 = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{tg(x-1)}{\cos^2(x-1)-1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{1-3x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-28}{x^3+x^2+2x}$ .
6. Исследовать функцию и построить ее график: а)  $y = \ln(x^2+2x+2)$ ;
- б)  $y = \frac{2(x-1)^2}{x^2}$ .
7. Исследовать функцию  $y = \frac{x-2}{(x^2-9)x}$  на непрерывность в точках

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2.$$

8. Найти, при каком значении  $a$  уравнение  $(a-3)x^2 - 4x + (a-2) = 0$  имеет минимальную разность квадратов корней.

9. Найти общие точки графика функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$  и касательной, проведенной к этому графику в точке  $M(0;18)$ .

10. Найти промежутки монотонности функции  $y = 0,25x^4 - 2x^3 + 5,5x^2 - 6x + \ln 3$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило Лопиталья для вычисления пределов функций.
2. Как вычислить производные высших порядков?
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 5x^4 + 3x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} - \sqrt{x^2 - 4}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sin^2 \frac{1}{x} + \cos^2 \frac{1}{x}$ ; б)  $y = x^3 \arcsin \sqrt{x}$ ;
- в)  $y = \log_3 \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$ ; г)  $\begin{cases} x = e^t + e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\log_3 \sin x)^x$ ; б)  $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{(x+2)^3}} \cdot \sqrt[6]{x^7(x+4)^8}$ .
4. Найти производную неявной функции  $y = x^y \sin(xy)$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3x^5}{\sqrt{x^{10}} - x^9}$ .
6. Исследовать функцию и построить график: а)  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}$ ;
- б)  $y = \frac{x^3}{x+1}$ .

7. При каждом  $a$  найти наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x} - \frac{a^2}{6-x}$ ,  $x \in [2; 3]$ .

8. Найти производную функции  $y = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  в точках  $x = 2$  и  $x = 0$ .

9. При каких  $p$  касательная, проведенная к графику функции  $y = x^3 - px$  в точке графика с абсциссой  $x_0 = 1$ , проходит через точку  $M(2; 3)$ ?

10. Найти промежутки возрастания и убывания функции  $y = \sin^2 x - \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение непрерывной функции в точке и на множестве.
2. Чему равна производная обратной функции?
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \operatorname{ctg} 2x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3} + \log_2(x-8)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sqrt{1 + \sqrt{2x} + \log_x 2}$ ; б)  $y = \frac{1}{3^{x+1} - 1}$ ;
- в)  $y = \cos^3(\sqrt{x+x^2}) + \operatorname{ctg} x^2$ ; г)  $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t}, \\ y = t^3 + 3t^2. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (1+x+x^2)^{\operatorname{arctg} x}$ ; б)  $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[4]{x-3} \cdot \sqrt[5]{x+5}$ .
4. Найти производную неявной функции  $y = 3^{x+1} y^2 + (x+y)^2$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \ln \cos x - 1}{\sin^2 x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x^3+3}}{3x^2 + x^{\frac{3}{2}} - 8x}$ .
6. Исследовать функцию и построить график: а)  $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ ;
- б)  $y = \frac{x^3}{x^2+4}$ .
7. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом  $V$ , чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
8. Найти производную функции  $y = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  в точках  $x=1$  и  $x=0$ .
9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 0,25x^4 - 2x^2 + 1$  на промежутке  $[-1; 3]$ .
10. Найти точку пересечения касательных, проведенных к графику функции  $y = x^2 + |7-4x|$  через точки графика с абсциссами 3 и -3.

### Контрольные вопросы

1. Как найти производную сложной функции? Приведите примеры.
2. Дайте определение числовой последовательности.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \cos 3x$ .

### Вариант 22

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\lg(-x^2 + 3x + 4)}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{x}{1+x^2} + 2^{2x} + x^3 \sin x$ ; б)  $y = \sqrt{x} \frac{2^{-x}}{\arctg x}$ ;
- в)  $y = (1+x^2)^{100} \cdot x$ ; г)  $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2t+3), \\ y = \sin^3 t^2. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найдите производные функции: а)  $y = (\arcsin x^2)^{\cos x}$ ; б)  $y = \frac{\sqrt[3]{(x+10)^5}}{\sqrt[4]{(x^2-1)^7} \cdot \sqrt{x^3}}$ .
4. Найти производную неявной функции  $x^2(y-2) + \operatorname{tg}xy - x^3 = 0$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:  $y = \frac{x}{x^2+4}$ ,  $x \in [-4; 0]$ .
6. Исследовать функцию и построить график: а)  $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ ;
- б)  $y = (x-3)^2 x$ .
7. Найти пределы функции: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x+4}{x+2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{\sin^3 2x}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{2x+5} \right)^x$ .
8. В данный круговой сектор радиуса  $R$ , вписать прямоугольник большей площади (угол сектора равен  $\lambda$ ).
9. Найти дифференциал второго порядка для функции  $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$ .
10. Написать уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(2; 2)$  к кривой  $x = \frac{1+t}{t^3}$ ;  $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$ ;  $t \neq 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл производной функции?
2. Сформулируйте признак монотонности функции.
3. Используя определение производной, найти производную функции  $y = \ln x$ .

### Вариант 23

1. Найти область определения функции  $y = \log_3(x+21) - \frac{27x}{3^{x-7}-3}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ ; б)  $y = \arcsin x - e^x \cos x$ ;
- в)  $\begin{cases} x = t^2 + 3t, & \Gamma) \\ y = \cos t + t; \end{cases} y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = \sqrt[3]{x^3\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt[5]{x^2+1}$ ; б)  $y = (\sqrt[5]{x+2x^3})^{\sin x}$ .
4. Найти производную неявной функции  $3xy^2 - \sin(x+y) = 0$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:  $y = \sin 2x - x$  на отрезке  $[0; \pi]$ .
6. Исследовать функцию и построить график: а)  $y = (x-1)x^2$ ; б)  $y = \sqrt{x} \ln x$ .
7. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+2} \right)^{2x-1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{4}}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x + 5}}{\sqrt[3]{2x^6 - 5x^5}}$ .
8. Представить число  $a$  в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.
9. Найти уравнение касательной и нормали в точке  $M(-2; y_0)$  к графику функции  $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ .
10. Найти асимптоты графика функции  $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциала функции. Каков его геометрический смысл?
2. Определите понятие выпуклости и вогнутости графика функции.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = e^x$ .

### Вариант 24

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{x(x-1)^5}}{x+2}$ .
2. Найти производные: а)  $y = x^2 \arctg x$ ; б)  $\sqrt{xy} - \ln(xy) = 0$ ;
- в)  $y = \frac{\text{Log}_3(x+3x^2)}{\sqrt{x}}$ ; г)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+t}, \\ y = \sin(t^2+t). \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\arcsin(1+2x))^{\sqrt{x}}$ ; б)  $y = \frac{(x-3)^5(x+8)^6}{x(x-7)^8}$ .
4. Найти производную неявной функции  $y^2 + \sin xy + 3x^2 y^5 = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{2x+3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{4x^5 + x - 3}$ .
6. Исследовать функцию и построить график функции: а)  $y = \sqrt{x^2(1+x)}$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ .
7. Дан шар радиуса 10. Найти радиус основания и длину образующей вписанного цилиндра, наибольшей площади боковой поверхности.
8. Найти точки графика функции  $y = x^3 - 2x^2$ , в которых касательная к этой графику образуя угол  $45^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ .
9. Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$ .
10. Найти  $y'''(0)$ , если  $y = e^{2x} \sin 3x$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм исследования функции на экстремум.
2. Сформулируйте теорему Коши (о связи двух функции и их производных).
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \log_2 x$ .

## Вариант 25

1. Найти область определения функции  $y = \frac{2x}{x^2-1} + \log_2 \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \sqrt{x} \frac{2^{-x}}{\arctg x}$ ; б)  $y = \frac{1}{\arccos(\ln x)}$ ;
- в)  $y = \sqrt{\sin\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)}$ ; г)  $\begin{cases} x = \sin(t+1), \\ y = 1 - \cos(t+1). \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = \sqrt[3]{x^4} \left( \frac{x}{x-1} \right)^3 \cdot (x+1)^{\frac{7}{5}}$ ; б)  $y = (\cos(2x+1))^{e^x}$ .
4. Найти производную неявной функции  $3y - e^x \sin y + 15x^2 = 0$ .
5. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{e^x}{3}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + 3x^2 + 5}}{(x+1)(x^2-1)}$ .
6. Исследовать функцию и построить график функции:  
а)  $y = \sin x \sin 2x$ ; б)  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ .
7. Среди всех конусов периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус с наибольшим объемом и найти объем.
8. На графике функции  $y = x^3 - 2x - 1$  найти точки, в которых касательные к ней перпендикулярны прямой  $x + y = 0$ .
9. Найти  $y''(0)$ , если  $y = 2^{\sin x} \cos(\sin x)$ .
10. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции  $y = \frac{x-4}{x-2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ .

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
2. Дайте определение бесконечно малых величин, эквивалентных бесконечно малых.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 2^x$ .

## Вариант 26

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$ ; б)  $y = x + x^x$ ;
- в)  $y = \frac{(1-3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$ ; г)  $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t + \cos t. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = \left(2^{\log_3 e^x} e^x\right)^{\cos x}$ ; б)  $y = \sqrt[5]{\frac{(x-1)^6}{x^2(x-3)^4}}$ .
4. Найти производную неявной функции  $x + y^2 - \sin(x+y) = 0$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln(x))$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$ .
6. Исследовать и построить график функции: а)  $y = \sqrt{x^2}(x+2)$ ; б)  $y = (x^2 - 4)(x+1)$ .
7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:  $y = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 3$ ,  $x \in [0, 14; 1]$ .
8. Найти расстояние между графиками функций  $y = x^2$  и  $y = x - 1$ .
9. Найти дифференциал второго порядка для функции  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .
10. Найти асимптоты функции  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение точек перегиба графика функции.
2. Сформулируйте теорему Лагранжа.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \log_3 x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \sqrt[3]{x-1} + \frac{x^2}{\ln x}$ .
2. Найти производные: а)  $y = e^{-x^2} e^x$ ; б)  $y = \ln \operatorname{tg} x^2 - \cos x \cdot \ln x$ ;
- в)  $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^3})$ ; г)  $\begin{cases} x = \sin \sqrt{t}, \\ y = \cos \sqrt{t+1}. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\arcsin x)^{\arccos x}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{x(x-2)^5}{(x+7)^4(x-3)}}$ .
4. Найти производную неявной функции  $\ln(x+y) - x^2 y^2 = 0$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin 2x} - 1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right)^x$ .
6. Исследовать и построить график функции: а)  $y = 16x(x-1)^3$ ;
- б)  $y = x + e^{-x}$ .
7. Найти все значения  $a$  при которых функция  $y = \frac{1}{2} e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$  имеет критические точки и найти их.
8. Найти уравнение касательной функции  $y = x \ln x$  в точке  $x_0 = e$ .
9. Найти приближенное значение функции  $y = e^{x^2-x}$  при  $x = 1, 2$ .
10. Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Ферма.
2. Какая функция называется дифференцируемой?
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 5x^3$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x} + \log_2(x^2 + 5x - 6)$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{tgx + ctgx}{tgx - ctgx}$ ; б)  $y = \ln(\cos^2 x)e^{x+1}$ ;
- в)  $y = \sqrt[3]{\arcsin(x + \sqrt{x})}$ ; г)  $\begin{cases} x = \sin t + e^t, \\ y = \ln t + \cos t. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\arctg x)^{\sin x}$ ; б)  $y = \sqrt{x} \sqrt[3]{x-1} \sqrt[4]{x-4} \sqrt[5]{x-5}$ .
4. Найти производную неявной функции  $\ln(xy) + e^{xy} - (x+y)^3 = 0$ .
5. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin 2x} - 1}{\sqrt[3]{tgx} - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{3x^3 - 5x + 6}$ .
6. Исследовать и построить график функции: а)  $y = 16x(x-1)^3$ ;
- б)  $y = x + e^{-x}$ .
7. Найти все значения  $a$ , при которых функция  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$  имеет критические точки и найти их.
8. Найти уравнение касательной функции  $y = x \ln x$  в точке  $x_0 = e$ .
9. Найти асимптоты графика функции  $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$ .
10. С помощью дифференциала найти значение функции  $y = \sqrt[3]{x}$  при  $x_0 = 25$ .

### Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства бесконечно больших функций.
2. Поясните, как раскрыть неопределенности типа  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  при вычислении пределов?
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = tg 4x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\log_3(x^3 + 1)}{x - 2} + \sqrt{x^2 - 9}$ .
2. Найти производные: а)  $y = \frac{1}{x^2} \arccos x$ ; б)  $y = \arctg^4 \frac{1}{x + 2}$ ; в)  $y = \frac{\sin^4 x^2}{x - 3}$ ;
- г)  $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t + 2}, \\ y = t^2 - 3. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\sin x)^{\cos x}$ ; б)  $y = \sqrt[5]{x(x-1)^2(x-3)^3}$ .
4. Найти производную неявной функции  $2^{x+y} - \sin(x^2 + y^2) + 3x^2 = 0$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ ,  $x \in [-1; 2]$ .
6. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8. Найти минимум суммы квадратов длин всех сторон параллелограмма.
7. Исследовать и построить график функции: а)  $y = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;
- б)  $y = \sin^2 x$ .
8. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \sin 5x}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$ .
9. Составить уравнение касательной и нормали в точке  $x_0 = 1$  к графику функции  $y = \ln x$ .
10. Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{x^2}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$ .

### Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
2. Поясните, как раскрыть неопределенность типа  $\infty - \infty$ ;  $0 \cdot \infty$  при вычислении пределов.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = 3^x$ .

1. Найти область определения функции  $y = \frac{\log \sin x}{x} - \arcsin(x^2 - 4)$ .
2. Найти производные: а)  $y = 2^{\log_4(x^2 + x + 1)}$ ; б)  $y = \ln \sin^2(x^2 + 3x)$ ;  
в)  $y = \arctg x \cdot \sin^2 7x$ ; г)  $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 + t^2}. \end{cases}$
3. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: а)  $y = (\sin x)^{\cos x}$ ; б)  $y = \sqrt{x} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-2}} \sqrt[5]{(x-5)^4}$ .
4. Найти пределы функций: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x^3 \sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{2}{x}}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x^3 - 1}{x^5 + x^3 - x + 1}$ .
5. Исследовать и построить график функции: а)  $y = x^2 + 1 + \frac{1}{x}$ ;  
б)  $y = x^2 e^{-x^2}$ .
6. Найти угол между касательной к функциям  $y = \sqrt{1-x^2}$  и  $y = \sqrt{x}$  в точке их пересечения.
7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \frac{-x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in [-5; 0]$ .
8. Найти производную неявной функции  $(x^2 + y^2)^{x+y} - \sin x = 0$ .
9. Найти экстремумы функции  $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ .
10. Найти уравнение касательной и нормали в точке  $M\left(\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$  к графику функции  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему сравнения бесконечно малых и больших величин.
2. Поясните, как раскрыть неопределенность типа  $1^\infty$  при вычислении пределов.
3. Используя определение производной функции, найти производную функции  $y = \log_4 x$ .

Учебное издание

**Методические указания  
по выполнению индивидуальных заданий при подготовке  
к промежуточным итоговым аттестациям для студентов 1  
курса заочной формы обучения**

Составители: **Окунева** Галина Леонидовна  
**Лавриненко** Тамара Николаевна  
**Рябцева** Светлана Васильевна

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4. Уч.-изд. л. 3,0

Тираж 100 экз. Заказ № Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете  
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46