Контрольная работа

Задания выбираются по последней цифре зачетки

Комплексные числа

Комплексные числа – выражения вида $z = a + ib$, где a,b – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1(\sqrt{-1} = i)$. Модуль числа z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

Сопряженным к данному числу $z = a + bi$ называют число $\overline{z} = a - bi$.

С комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ можно производить арифметические операции (по правилам алгебры):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Если $z_2 \neq 0$, то $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} =$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Решение квадратного уравнения: $ax^2+bx+c=0$

$D = b^2 - 4ac$.

1) если $D > 0$, то 2 действительных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) если $D=0$ то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$,

3) если $D < 0$, то 2 комплексных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a} \cdot i$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно представить в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, φ- аргумент числа z. Значение аргумента, заключенное в границах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, называется главным значением аргумента arg z и определяется по формуле

$$Arg\, z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} \text{ при } x > 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi \text{ при } x < 0;\, y \geq 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi \text{ при } x < 0;\, y < 0. \end{cases}$$

Кроме тригонометрической формы комплексных чисел $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, используют показательную форму комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$, где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа.

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня удобно выполнять в тригонометрической или показательной форме.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = r_1 \cdot r_2 e^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{r_1}{r_2} e^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}, r_2 \neq 0.$$

$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Пример. Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = 2 - 2i$. а) Найти их сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$. б) Перевести их в тригонометрическую и показательную форму и найти $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i + 2 - 2i = 2 + \sqrt{3} - i;\quad z_1 - z_2 = \sqrt{3} + i - 2 + 2i = -2 + \sqrt{3} + 3i.$

б) Найдем модуль и аргумент $z_1 = \sqrt{3} + i$. $\left|z_1\right| = r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2;$

$\arg z = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, тогда $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Для числа z_2: $\left|z_2\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$ $\arg z_2 = arctg\,\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4}$, тогда

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра: $\left(z_1\right)^3 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{6} \cdot 3 + i\sin\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

Пример Извлечь $\sqrt[3]{a}$, где $a = 1 + i$.

Решение. Число a представим в тригонометрической форме. Найдем модуль данного числа по формуле $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Для того чтобы найти аргумент, построим точку на комплексной плоскости.

Находим главное значение аргумента $\varphi = arctg\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4})$

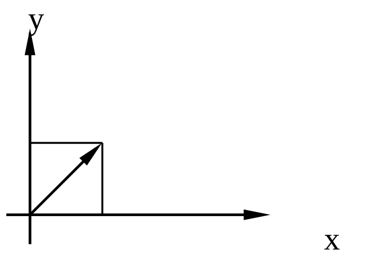

Рис. 10

Для вычисления корня *n степени* из данного числа используем формулу

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$ (k = 0, 1, 2, …, n –1), тогда имеем

$a_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$;

$a_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{9}{12}\pi + i\cdot\sin\frac{9}{12}\pi)$;

$a_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{17}{12}\pi + i\cdot\sin\frac{17}{12}\pi)$.

Пример. Решить уравнение $z^3-6z-9=0$.

Решение. Рассматривая делители свободного члена, убеждаемся в том, что $z=3$ является корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на z – 3:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,z^3-6z-9 & z-3 \\
\underline{z^3-3z^2} & \overline{z^2+3z+3} \\
-\,3z^2-6z & \\
\underline{3z^2-9z} & \\
3z-9 & \\
\underline{3z-9} & \\
0 &
\end{array}
$$

И, решая квадратичное уравнение $z^2+3z+3=0$, получаем остальные корни.

Итак, $z_1=3$, $z_2=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Задания по контрольной работе.

В **задачах 1-10** заданы два комплексных числа z_1 и z_2. а) найти их сумму и разность z_1-z_2; б) записать эти числа в тригонометрической и показательной форме; в) вычислить $z_1 * z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^{n+1}, где n-номер варианта.

1. $z_1=-\sqrt{3}+i$; $z_2=3-3i$
2. $z_1=1+\sqrt{3}$; $z_2=2-2i$
3. $z_1=3-3i$; $z_2=1-\sqrt{3}i$
4. $z_1=4+4i$; $z_2=\sqrt{3}-i$
5. $z_1=2+2i$; $z_2=2-2\sqrt{3}i$
6. $z_1=2+2\sqrt{3}i$; $z_2=1-i$
7. $z_1=2\sqrt{3}-2i$; $z_2=-3-3i$
8. $z_1=-1-\sqrt{3}i$; $z_2=3+3i$
9. $z_1=-4+4i$; $z_2=2-2\sqrt{3}i$
10. $z_1=-2-2i$; $z_2=-2\sqrt{3}-2i$

В задачах 11-20 найти общее решение дифференциального уравнения

11. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$
12. $y''-4y'+4y=e^{2x}$
13. $y''+y=x^3-4x^2+7x-10$
14. $y''-5y'+4y=6\cos 2x$
15. $y''-4y'=2e^{3x}$
16. $y''+4y=3\sin 3x$
17. $y''+2y'=10e^{x}(\sin x+\cos x)$
18. $y''-4y'+8y=2\sin x$
19. $y''-7y'+12y=5e^{5x}$
20. $y''+y'-6y=x^2-2x+5$

В задачах 21-30 найти решение уравнения теплопроводности методом Фурье.

21. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=2} = 0$

22. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=1} = 0$

23. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=2} = 0$

24. $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 4x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=4} = 0$

25. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=2} = 0$

26. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=1} = 0$

27. $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=2} = 0$

28. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 3x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=3} = 0$

29. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 4x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=4} = 0$

30. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=2} = 0$

В задачах 31-40 найти решение волнового уравнения методом Фурье.

31. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = \sin x$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=\pi} = 0$

32. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = x - x^2$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=1} = 0$

33. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = \sin 2x$, $u\big|_{x=o} = u\big|_{x=\pi/2} = 0$

34. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 4x - x^2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=4} = 0$

35. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 2x - x^2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=2} = 0$

36. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = x - x^2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=1} = 0$

37. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = \sin x/2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=2\pi} = 0$

38. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 3x - x^2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=3} = 0$

39. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = 4x - x^2$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=4} = 0$

40. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u\big|_{t=o} = \sin x$, $u\Big|_{x=o} = u\Big|_{x=\pi} = 0$