

# ТЕНЗОРО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МЕТАМОРФИЧЕСКИХ СЛАНЦЕВ ЛЕБЕДИНСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

**Редькин Г.М., канд. техн. наук, доц.**

*Белгородский государственный технологический  
университет им. В.Г. Шухова*

Эффективные технологии рационального и комплексного использования попутно добываемых вмещающих анизотропных горных пород возможны в том случае, когда они базируются на изученности горных пород, на наиболее полной и достоверной информации об их физико-механических свойствах.

Разработанные ниже тензоро-статистические модели физико-механических параметров попутно-добываемых горных пород являются одними из основных инструментов исследований изучаемых показателей, носителями и дополнительными источниками информации о них. В последнем и заключается эффективность математического моделирования.

В процессе обработки железорудного Лебединского месторождения попутно добывают в больших объемах вмещающие анизотропные горные породы, представленные в значительной степени метаморфическими (кристаллическими) сланцами. При изучении вмещающих анизотропных пород, как минерального сырья строительной и дорожно-строительной индустрии, определяли их физико-механические параметры следующим образом: динамический модуль упругости ( $E_D$ ) - по скорости распространения ультразвука с частотой  $V=150$ кГц при  $20^\circ\text{C}$  на установке ДУК-20; предел прочности при изгибе ( $R_{изг}$ ) - путем изгиба при четырехточечном нагружении со скоростью  $2,5$  МКМ/сек; предельную относительную деформацию ( $\epsilon$ ) - по стреле прогиба образца при предельном четырехточечном нагружении; статический модуль упругости ( $E_{ст}$ ) - по формуле

$$E_{ст} = R_{изг} / \epsilon.$$

Полученные результаты исследований [1, 2] приведены в табл.1.

Таблица 1

Физико-механические параметры вмещающих анизотропных  
горных пород Лебединского месторождения

№ п/п	Наименование		Един. изм.	Значение параметра	
	породы	параметры		⊥ слоям	 слоям
1	2	3	4	5	6
1	Железистый кварцит	Прочность при сжатии, $R_{сж}$	МПа	166- 378	67-141
2		Прочность при растяжении, $R_{рас}$	МПа	10,4- 23,6	4,2-8,8
3	Малорудные и безрудные кварциты	Прочность при сжатии, $R_{сж}$	МПа	165- 277	47-98
4		Прочность при растяжении, $R_{рас}$	МПа	10,3- 17,3	2,9-6,1
5	Сланец подсвиты $K_2^2$	Прочность при сжатии, $R_{сж}$	МПа	53,5- 73,5	29,5- 37,8
6		Прочность при растяжении, $R_{рас}$	МПа	2,7-3,9	1,2-1,6
7		Прочность при изгибе, $R_{изг}$	МПа	153,5	175,2
8	Сланец подсвиты $K_2^4$	Прочность при сжатии, $R_{сж}$	МПа	107,2- 160	48,2- 95,0
9		Прочность при растяжении, $R_{рас}$	МПа	4,5-8,1	1,9-3,8
10		Прочность при изгибе, $R_{изг}$	МПа	115,0	148,6
11	Сланец свиты $K_2 = K_2^2 \cup K_2^4$	Скорость ультразвука, $V$	км/сек	4,4	6,6

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6
12	Сланец подсветы $K_2^2$	Динамический модуль упругости, $E_D$	МПа	$1,210 \cdot 10^{-7}$	$1,209 \cdot 10^{-7}$
13		Статический модуль упругости, $E_{ст}$	МПа	$1,319 \cdot 10^{-7}$	$0,296 \cdot 10^{-7}$
14		Предельная деформация, $\mathcal{E}$	%	0,1164	0,5920
15	Сланец подсветы $K_2^4$	Динамический модуль упругости, $E_D$	МПа	$1,10 \cdot 10^{-7}$	$1,06 \cdot 10^{-7}$
16		Статический модуль упругости, $E_{ст}$	МПа	$0,477 \cdot 10^{-7}$	$0,336 \cdot 10^{-7}$
17		Предельная деформация, $\mathcal{E}$	%	0,241	0,335

Важным физико-механическим показателем горных пород является прочность или предел прочности при сжатии ( $R_{сж}$ ), который характеризует величину критических сжимающих напряжений, разрушающих породу. В первой строке и пятом, шестом столбцах табл. 1 приведены диапазоны изменения экспериментальных значений прочности при сжатии железистых кварцитов соответственно перпендикулярно ( $R_{сж}^\perp$ ) и параллельно ( $R_{сж}^\parallel$ ) слоям.

Тогда в предположении нормального закона распределения этих значений справедливо правило трех сигм, заключающих в том, что вероятность события – интервала с центром в точке  $[R_{сж}]$  и радиусом  $3\sigma$  равна  $P(|R_{сж} - [R_{сж}]| < 3\sigma) = 0,997$ , где  $[R_{сж}]$  есть среднее значение, а стандарт (среднее квадратическое отклонение)  $\sigma$  - погрешность значений в рассматриваемом диапазоне ( $R_{сж,\min}; R_{сж,\max}$ ). Для железистых кварцитов из правила трех сигм, первой строки, пятого и шестого столбцов табл. 1 следует

$$\sigma_{сж}^\perp = (R_{сж,\max}^\perp - R_{сж,\min}^\perp) / 6 = (378 - 166) / 6 = 35,33 \text{ (МПа)}, \quad (1)$$

$$[R_{сж}^\perp] = (R_{сж,\min}^\perp + R_{сж,\max}^\perp) / 2 = (166 + 378) / 2 = 272 \text{ (МПа)} \quad (2)$$

и, аналогично,

$$\sigma_{сж}^\parallel = (R_{сж,\max}^\parallel - R_{сж,\min}^\parallel) / 6 = (141 - 67) / 6 = 12,33 \text{ (МПа)}, \quad (3)$$

$$[R_{сж}^\parallel] = (R_{сж,\min}^\parallel + R_{сж,\max}^\parallel) / 2 = (67 + 141) / 2 = 104 \text{ (МПа)} \quad (4)$$

Данные (1) - (4) определяют в классе статистико-анизотропных моделей тензоро-вероятностные характеристики анизотропных структур средних значений и дисперсий значений прочности железистых кварцитов, выраженные согласно [3] соответственно тензорами второго ранга

$$M = \begin{bmatrix} [R_{сж}^\parallel]^2 & 0 \\ 0 & [R_{сж}^\perp]^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10816 & 0 \\ 0 & 73984 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$D = \begin{bmatrix} DR_{сж}^\parallel & 0 \\ 0 & DR_{сж}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152,03 & 0 \\ 0 & 1248,21 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $DR_{сж}^\parallel = (\sigma_{сж}^\parallel)^2$ ,  $DR_{сж}^\perp = (\sigma_{сж}^\perp)^2$ .

Тензоры (5), (6) индуцируют тензоро-статистическую модель [3]

$$[R_{сж}(\alpha)] = \begin{pmatrix} \cos \alpha; \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 10816 & 0 \\ 0 & 73984 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}^{1/2}, \quad (7)$$

$$DR_{сж}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha; \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 152,03 & 0 \\ 0 & 1248,21 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (8)$$

которая выражает среднее значение (математическое ожидание) (7) и дисперсию (погрешность значений) (8) пределов прочности при сжатии железистых кварцитов в зависимости от угла  $\alpha$  - направления их изучения.

Перемножая скалярно тензоры в правых частях равенств (7), (8), получим тензоро-статистическую модель пределов прочности при сжатии в функциональном виде

$$[R_{сж}(\alpha)] = \sqrt{10816 \cos^2 \alpha + 73984 \sin^2 \alpha} \text{ (МПа)}, \quad (9)$$

$$DR_{сж}(\alpha) = 152,03 \cos^2 \alpha + 1248,21 \sin^2 \alpha \text{ ((МПа)}^2\text{)}. \quad (10)$$

Подобно рассмотренной первой строке табл. 1 во 2-6, 8, 9 строках и 5, 6-ом столбцах также приведены диапазоны изменений экспериментальных значений показателей и, следовательно, к этим исходным данным применим вычислительные процедуры аналогичные (1) – (10) и полученные результаты приведем в табл. 2.

Однако, экспериментальные значения в 7, 10 – 17-ой строках и 5, 6-ом столбцах табл. 1 выражены одним числом, характеризующем среднее значение показателя. В этом случае математическая модель анизотропии исследуемого свойства будет представлена одним выражением, подобным (7), либо (9).

В качестве примера рассмотрим десятую строку табл. 1, в которой приведены пределы прочности при изгибе сланцев подсветы  $K_2^4$  перпендикулярно -  $[R_{изг}^\perp]=115,0$  и параллельно -  $[R_{изг}^\parallel]=148,6$  слоям. Согласно [3] получим в классе статистико-анизотропных моделей тензоро-статистическую модель анизотропии пределов прочности при изгибе метаморфических сланцев подсветы  $K_2^4$  вмещающих Лебединское месторождение

$$[R_{изг}(\alpha)] = \left( (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{vmatrix} 22082 & 0 \\ 0 & 132225 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right)^{1/2}, \text{ (МПа)} \quad (11)$$

или в функциональном виде

$$[R_{изг}(\alpha)] = \sqrt{22082 \cos^2 \alpha + 132225 \sin^2 \alpha}. \quad (12)$$

Геометрическими интерпретациями полученных математических моделей (9), (10) и (12) являются индикатрисы анизотропных структур исследованных показателей  $[R_{сж}(\alpha)]$ ,  $DR_{сж}(\alpha)$ ,  $[R_{изг}(\alpha)]$ , которые представляют приведенные на рис. графики подер (9), (12) и квадрата подеры (10).

По данным табл. 1 приведем в табл. 2 результаты тензоро-статистического моделирования физико-технических параметров вмещающих анизотропных горных пород Лебединского месторождения. Табл. 2 устроена следующим образом:

1) над чертой в 1 – 6, 8, 9-ой строках и 4, 5-ом столбцах расположены элементы тензора  $M$ , а под чертой – тензора  $D$ ;

2)  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  – элементы тензоров  $M$  либо  $D$  принадлежащие соответственно первой строке, первому столбцу и второй строке, второму столбцу;

3) в шестом столбце 1 - 6, 8, 9-ой строк над чертой приведены математические модели, индуцированные тензором  $M$ , а под чертой – тензором  $D$ ;

4) в 4, 5, 6-ом столбцах остальных строк связанные с тензором  $D$  объекты не представлены.

Таблица 2

Тензорно-статистические модели анизотропии физико-технических показателей вмещающих горных пород Лебединского месторождения

№ п/п	Наименование породы	Показатель	Элементы тензоров $M/D$		Тензорно-статистическая модель показателя
			$a_{11}$	$a_{22}$	
1	2	3	4	5	6
1	Железистый кварцит	$R_{сж}$	$\frac{10816}{152,03}$	$\frac{73984}{1248,21}$	$\frac{[R_{сж}(\alpha)] = \sqrt{10816\cos^2\alpha + 73984\sin^2\alpha}}{DR_{сж}(\alpha) = 152,03\cos^2\alpha + 1248,21\sin^2\alpha}$
2		$R_{рас}$	$\frac{4225}{0,59}$	$\frac{289}{4,84}$	$\frac{[R_{рас}(\alpha)] = \sqrt{42,25\cos^2\alpha + 289\sin^2\alpha}}{DR_{рас}(\alpha) = 0,59\cos^2\alpha + 4,84\sin^2\alpha}$
3	Малорудные и безрудные кварциты	$R_{сж}$	$\frac{5256,25}{7225}$	$\frac{48841}{348,44}$	$\frac{[R_{сж}(\alpha)] = \sqrt{5256,25\cos^2\alpha + 48841\sin^2\alpha}}{DR_{сж}(\alpha) = 72,25\cos^2\alpha + 348,44\sin^2\alpha}$
4		$R_{рас}$	$\frac{2025}{0,28}$	$\frac{190,44}{1,36}$	$\frac{[R_{рас}(\alpha)] = \sqrt{20,25\cos^2\alpha + 190,44\sin^2\alpha}}{DR_{рас}(\alpha) = 0,28\cos^2\alpha + 1,36\sin^2\alpha}$
5	Сланец подсвиты $K_2^2$	$R_{сж}$	$\frac{1132,32}{1,91}$	$\frac{4032,25}{11,11}$	$\frac{[R_{сж}(\alpha)] = \sqrt{1132,32\cos^2\alpha + 4032,25\sin^2\alpha}}{DR_{сж}(\alpha) = 1,91\cos^2\alpha + 11,11\sin^2\alpha}$
6		$R_{рас}$	$\frac{1,96}{0,004}$	$\frac{10,89}{0,04}$	$\frac{[R_{рас}(\alpha)] = \sqrt{1,96\cos^2\alpha + 10,89\sin^2\alpha}}{DR_{рас}(\alpha) = 0,004\cos^2\alpha + 0,04\sin^2\alpha}$
7		$R_{изг}$	30695	23562	$[R_{изг}(\alpha)] = \sqrt{30695\cos^2\alpha + 23562\sin^2\alpha}$
8	Сланец подсвиты $K_2^4$	$R_{сж}$	$\frac{5126,56}{60,84}$	$\frac{17849}{77,44}$	$\frac{[R_{сж}(\alpha)] = \sqrt{5126,56\cos^2\alpha + 17849\sin^2\alpha}}{DR_{сж}(\alpha) = 60,84\cos^2\alpha + 77,44\sin^2\alpha}$
9		$R_{рас}$	$\frac{8,12}{0,10}$	$\frac{39,69}{0,36}$	$\frac{[R_{рас}(\alpha)] = \sqrt{8,12\cos^2\alpha + 39,69\sin^2\alpha}}{DR_{рас}(\alpha) = 0,10\cos^2\alpha + 0,36\sin^2\alpha}$
10		$R_{изг}$	22082	13225	$[R_{изг}(\alpha)] = \sqrt{22082\cos^2\alpha + 13225\sin^2\alpha}$
11	Сланец свиты $K_2 = K_2^2 \cup K_2^4$	$\nu$	43,56	19,36	$[\nu(\alpha)] = \sqrt{43,56\cos^2\alpha + 19,36\sin^2\alpha}$

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6
12	Сланец под- свиты $K_2^2$	$E_d$	$1,46 \cdot 10^{-14}$	$1,46 \cdot 10^{-14}$	$[E_d(\alpha)] = 1,21 \cdot 10^{-7}$
13		$E_{cm}$	$0,088 \cdot 10^{-14}$	$1,74 \cdot 10^{-14}$	$[E_{cm}(\alpha)] = \sqrt{0,088 \cos^2 \alpha + 1,74 \sin^2 \alpha} \cdot 10^{-7}$
14		$\mathcal{E}$	0,35	0,014	$[\mathcal{E}(\alpha)] = \sqrt{0,35 \cos^2 \alpha + 0,014 \sin^2 \alpha}$
15	Сланец под- свиты $K_2^4$	$E_d$	$1,12 \cdot 10^{-14}$	$1,21 \cdot 10^{-14}$	$[E_d(\alpha)] = \sqrt{1,12 \cos^2 \alpha + 1,21 \sin^2 \alpha} \cdot 10^{-7}$
16		$E_{cm}$	$0,11 \cdot 10^{-14}$	$0,23 \cdot 10^{-14}$	$[E_{cm}(\alpha)] = \sqrt{0,11 \cos^2 \alpha + 0,23 \sin^2 \alpha} \cdot 10^{-7}$
17		$\mathcal{E}$	0,11	0,06	$[\mathcal{E}(\alpha)] = \sqrt{0,11 \cos^2 \alpha + 0,06 \sin^2 \alpha}$

Разработанные и приведенные в табл. 2 и на рис. тензоростатистические модели адекватно описывают анизотропные структуры физико-механических параметров попутно добываемых метаморфических сланцев Лебединского месторождения, что необходимо для решения научно-технических проблем строительного материаловедения, оптимизации эффективности производства и использования строительных и дорожно-строительных материалов.

а)  $[R_{сжк}(\alpha)] = \sqrt{10816 \cos^2 \alpha + 73984 \sin^2 \alpha}$     б)  $DR_{сжк}(\alpha) = 152,03 \cos^2 \alpha + 1248,21 \sin^2 \alpha$     в)  $[R_{изг}(\alpha)] = \sqrt{22082 \cos^2 \alpha + 13225 \sin^2 \alpha}$

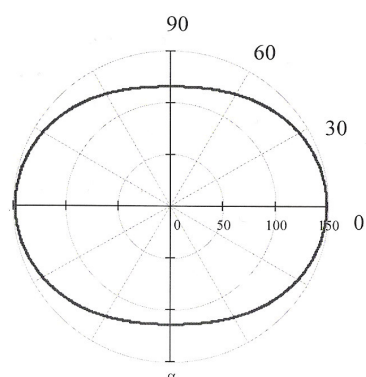
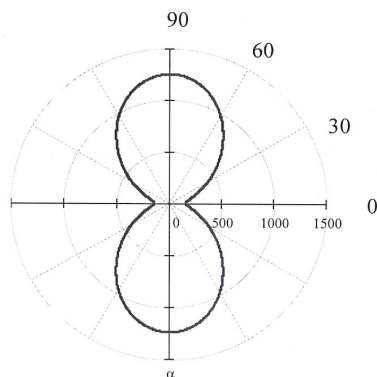
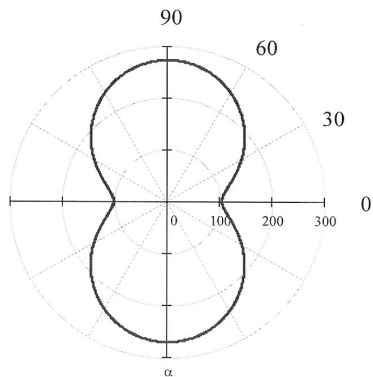


Рис. Индикатрисы (подеры) анизотропных структур по Лебединскому месторождению: а) – пределов прочности при сжатии железистых кварцитов; б) – дисперсий пределов прочности при сжатии железистых кварцитов; в) – пределов прочности при изгибе метаморфических сланцев подсветы  $K_2$



### Библиографический список

1. Зошук Н.И. Перспективы использования нерудных горных пород КМА в дорожном строительстве Белгородской области/ Н.И. Зошук, П.А. Боровский, В.И. Шухов, А.М. Гридчин// Комплексное использование нерудных пород КМА в строительстве: Сб. научн. тр. – Москва, 1975. – Выпуск 13 – с. 17- 24.
2. Зошук Н.И. Скальные породы Курской магнитной аномалии – сырье для строительных материалов/ Н.И. Зошук. – М.: Стройиздат, 1986. – 140 с.
3. Редькин Г.М. Тензоро-вероятностная модель физико-механических показателей анизотропных пород/ Г.М. Редькин// Известия вузов. Строительство. – 2004. - №10 – С. 113 – 118.

## Реферат

Редькин Г.М. Тензоро-статистическое моделирование показателей метаморфических сланцев Лебединского месторождения

Разработаны тензоро-статистические модели физико-механических параметров попутно добываемых метаморфических сланцев Лебединского месторождения, которые могут быть положены в основу эффективных технологий строительных и композиционных материалов.

Табл. 2 Илл. 1. Библ.: 3 назв.