**Контрольные работы для магистров по направлению «Строительство»по курсу «Математическое моделирование»**

**Вариант для выполнения выбирается из таблицы по последней цифре номера зачетки.**

Задание № 1

**Численные методы решения уравнения**

Цель работы:

1. Изучение методов отделения корней уравнения

2. Изучение численных методов решения уравнения 

3. Закрепление навыков в составлении блок-схем программ, написании и отладке программы на алгоритмическом языке.

4. Приобретение навыков в использовании стандартного программного обеспечения ЭВМ.

5. Решение уравнения на ЭВМ.

Формулировка задания:

1. Отделить корни конкретного уравнения

2. Составить блок-схему алгоритма и программу для нахождения корня уравнения с точностью указанным в вариантах методом.

3. Найти корень уравнения с помощью стандартной программы, имеющейся в математическом обеспечении ЭВМ.

4. Выполнить «вручную» с помощью микрокалькулятора три шага для нахождения корня уравнения.

5. Решить уравнение на ЭВМ.

6. Оформить отчет по выполнению задания.

Содержание отчета:

1. Конкретная постановка задачи.

2. Результаты отделения корней.

3. Блок-схема программы и распечатки, полученные на ЭВМ.

4. Ручной счет, оформленный в виде таблицы.

Варианты заданий:

*Таблица 1.1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер варианта | | Уравнение | Метод решения уравнения |
| 1 | |  | метод простой итерации |
| 2 | |  | метод касательных |
| 3 |  | | метод половинного деления |
| 4 |  | | метод половинного деления |
| 5 |  | | метод касательных |
| 6 |  | | метод касательных |
| 7 |  | | метод половинного деления |
| 8 |  | | метод простой итерации |
| 9 |  | | метод половинного деления |
| 10 |  | | метод касательных |
|  |  | |  |

Методические указания

Пусть дано уравнение (1.1)

где - непрерывная функция.

Если , то называется корнем уравнения (1.1) или нулем функции .

Решение задачи нахождения корней уравнения (2.1) состоит из двух этапов:

1) отделение корней (если они есть), т.е. определение интервалов, в каждом из которых существует единственный корень уравнения;

2) уточнение приближенных значений действительных корней, т.е. вычисление их с требуемой точностью.

Отделение корней

Процесс отделения корней уравнения (2.1) основан на теореме Больцано-Коши: если непрерывная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е. то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень. Т.о. для отделения корней достаточно определить знаки функции в ряде точек из области определения функции

Пример. Отделить корни уравнения

С этой целью найдем значение функции в нескольких точках:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | -1,125 | -0,25 | 0,5 | 1 | 1 | 0 | -3 |

Функция имеет противоположные знаки на концах отрезка и, значит, на этом отрезке имеется корень.

Второй корень уравнения .

Для отделения корней можно использовать графический метод. Строим график функции и находим приближенно точки его пересечения с осью абсцисс. Иногда проще заменить уравнение эквивалентным ему уравнением так, чтобы функции и имели несложные графики. Абсциссы являются действительными корнями уравнения

Пример. Отделить корни уравнения

.

Запишем данное уравнение в виде

и затем в одной системе координат построим графики функций.

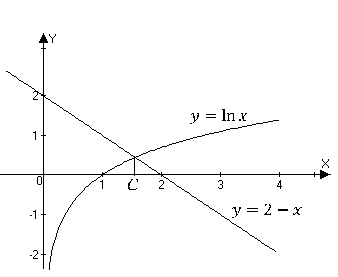


Рис.1.1. Графики функций и

Как видно из рис.1.1, абсцисса точки пересечения графиков C расположена в интервале Следовательно, уравнение

имеет единственный корень C, причем .

Рассмотрим методы уравнения приближенных корней.

Метод половинного деления

Метод половинного деления (метод бисекций) [2, с. 8] является самым простым и надежным алгоритмом нахождения корней уравнения

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.2.

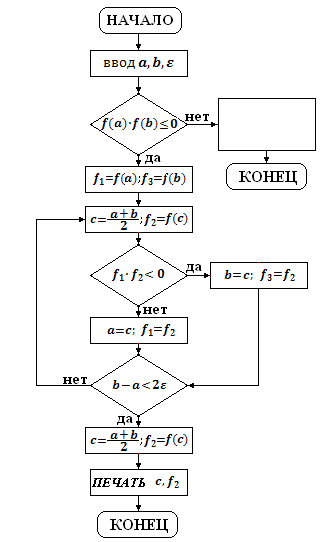


Рис. 1.2. Блок-схема алгоритма

Метод Ньютона-Рафсона (метод касательных)

Рассмотрим уравнение Пусть на отрезке функция дважды непрерывно дифференцируема, причем производные и на этом отрезке сохраняют знак, а на концах отрезка функция имеет разные знаки. Эти условия гарантируют, что корень уравнения содержится в интервале и других корней в этом интервале не имеется. Последовательное уточнение корня будем осуществлять по формуле Ньютона:

Рекомендуется начальное приближение выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие:

Для нахождения корня уравнения с заданной точностью вычисления по формуле Ньютона (1,2) выполняют до тех пор, пока не будет получено такое значение , для которого будет выполнено условие

гарантирующее существование точного значения корня в интервале

Отметим, что последовательность может не сходиться в тех случаях, если функция не удовлетворяет какому-либо из условий сходимости метода касательных. Поэтому при вычислениях на ЭВМ заранее задают максимально допустимое количество интераций М. Если за М шагов не будет найдено значение , для которого выполняется условие (1.4), то вычисления прекращают.

Блок-схема алгоритма уточнения корня методом касательных приведена на рис. 1.3.

Метод простой итерации

Этот метод применяется для решения уравнений, записанных в виде

Вычисления выполняются по формулам:

Последовательность сходится к точному значению корня, если функция удовлетворяет условию

при любом значении x, принадлежащем интервалу , на котором имеется корень. Начальное приближение выбирается из этого же интервала, а вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполняться условие

где - точность вычисления.

Блок-схема алгоритма метода простой итерации имеет вид, аналогичный блок-схеме алгоритма нахождения корня уравнения методом касательных (рис. 1.3).

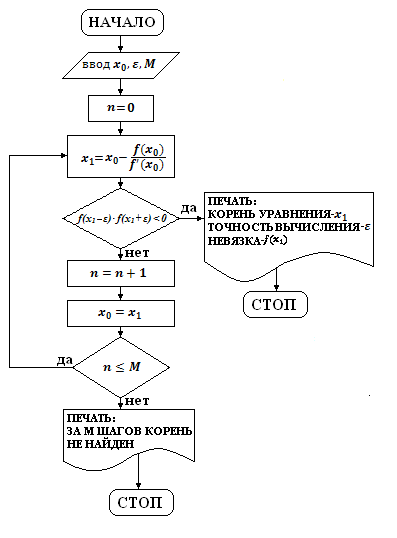


Рис. 1.3. Блок-схема алгоритма

Контрольные вопросы

1. Что значит отделить корни уравнения?

2. Составить блок-схему алгоритма табулирования функции на интервале .

3. В чем состоит метод половинного деления?

4. Каковы условия сходимости метода касательных?

5. Когда применяется метод простой итерации для решения уравнения с одной неизвестной?

6. Какие стандартные программы из математического обеспечения ЭВМ применяются для решения уравнения

7. Как осуществляется решение уравнения на ЭВМ.

8. До каких пор нужно продолжать вычисления методом касательных (методом простой итерации), чтобы получить решение с заданной точностью ?

9. Сколько шагов нужно выполнить в методе деления пополам для нахождения корня уравнения с заданной точностью

10. Оформите программу нахождения корня уравнения в виде подпрограммы.

11. Как выбрать начальное приближение в методе касательных (в методе простой итерации)?

Задание № 2

**Численное решение систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод простой итерации**

Цель работы:

1. Изучение численных методов решения систем нелинейных уравнений.

2. Использование графического метода для выбора начального приближения решения.

3. Изучение правил оформления и применения подпрограмм.

4. Отладка программы и решение на ЭВМ конкретного варианта задания.

Формулировка задания:

1. Выбрать начальное приближение графическим способом.

2. Выполнить «вручную» два шага вычислений указанным в варианте методом. Решить задачу на ЭВМ с помощью стандартной подпрограммы.

3. Составить программу численного решения задачи. Оформить вычисления в виде подпрограммы значений функций , и их производных.

4. Отладить программу и решить конкретную задачу с точностью .

5. Оформить отчет по выполнению задания.

Содержание отчета:

1. Конкретная постановка задачи.

2. Результаты ручного счета.

3. Блок-схема алгоритма и распечатка программы.

4. Результаты решения задачи на ЭВМ.

Варианты задания:

*Таблица 3.1*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер варианта | Система уравнений | Метод решения |
| 1 |  | Ньютона |
| 2 |  | итерации |
| 3 |  | Ньютона |
| 4 |  | итерации |
| 5 |  | Ньютона |
| 6 |  | итерации |
| 7 |  | Ньютона |
| 8 |  | итерации |
| 9 |  | Ньютона |
| 10 |  | итерации |

Методические указания:

Для простоты изложения метода Ньютона и метода простой итерации рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

(3.1)

Случай системы уравнений с неизвестными рассматривается аналогично.

Метод Ньютона

Пусть функции и дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки , являющейся решением системы (1). Пусть известно некоторое приближение к решению системы Запишем связь между решением и его приближением в виде

Полагая, что и малы, разложим функции и по формуле Тейлора как функции двух переменных, оставляя только линейные члены разложения относительно и (отброшенные члены имеют не менее чем второй порядок малости по сравнению с и ):

(3.2)

.

Так как левые части соотношений (2) равны нулю (поскольку представляют собой значения и ), то для определения и имеем систему двух линейных алгебраических уравнений:

(3.3)

Матрица , составленная из коэффициентов при неизвестных и системы (3), является матрицей производных и называется матрицей Якоби:

.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то систему (3) можно решить, например, по формулам Крамера:

(3.4)

Метод Ньютона состоит в том, что новое приближение к решению системы находится по формулам:

(3.5)

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к решению системы , то последовательность сходится быстро (по квадратичному закону). Условием окончания счета может являться, например, выполнение неравенства

или (3.6)

где - заданная точность.

Выбор начального приближения

Часто начальное приближение решения системы определяют:

1.Из физических соображений описываемого процесса.

2.Графически.

3.С помощью табулирования функции

на ЭВМ (т.к. ).

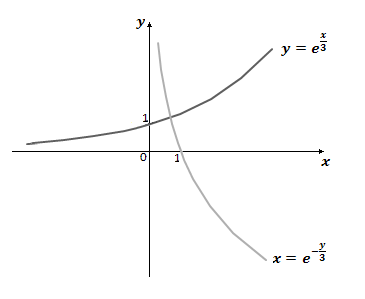
Пример. Определить графически начальное приближение .

Решение системы:

(3.7)

Для выбора начального приближения запишем систему (3.7) в виде:

Т.к. графики функций , построенные в одной и той же системе координат, пересекаются в одной точке, то система (3.7) имеет единственное решение (рис.3.1)



Аккуратное построение графиков функций позволяет достаточно хорошо выбрать начальное приближение. Так, в качестве начального приближения решения системы (3.7) можно взять, например

Дальнейшее уточнение решения системы производится по формулам (3.4), (3.5). Процесс вычислений заканчивается, как только выполняется условие (3.6).

Блок-схема алгоритма приведена на рис.3.2.

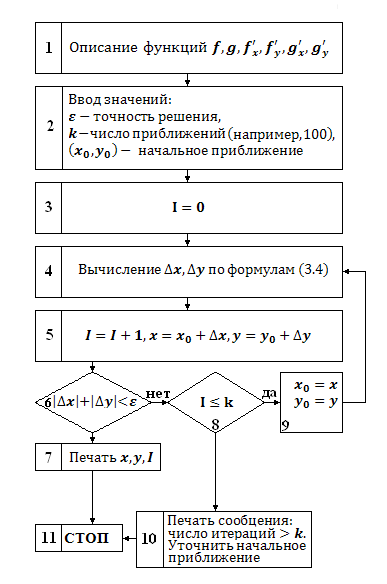


Рис. 3.2

Метод простой итерации

Запишем систему уравнений (3.1) в виде:

(3.8)

Предположим, что эта система имеет единственное решение в области и выполнены условия:

а) функции определены и непрерывно дифференцируемы в ;

б) начальное приближение и все последующие приближения принадлежат ;

в) В выполнены неравенства:

(3.9)

или неравенства

(3.10)

тогда процесс уточнения решения системы производится по формулам

(3.11)

и является сходящимся, т.е.

,

где - решение системы (3.8).

Процесс вычислений прекращается, как только выполняется условие (3.6).

Пример. Методом простой итерации найти решение системы (3.7).

Запишем систему в виде:

Графически (рис.3.1) показано, что эта система имеет единственное решение, например, в области Обозначим Условия а, б для функций выполнены, проверим выполнение условия (3.10).

В области *D* имеем:

Поэтому условия (3.10) выполнены, т.к.

Таким образом, процесс итераций сходится и последовательные приближения определяются по формулам:

В качестве начального приближения можно взять .

Блок-схема алгоритма приведена на рис.3.3

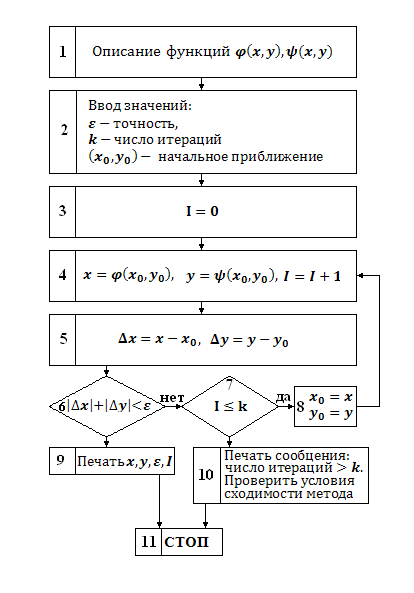


Рис. 3.3

Контрольные вопросы

1. Какие существуют методы численного решения систем нелинейных уравнений?

2. Опишите алгоритм метода простой итерации.

3. Назовите недостатки и достоинства метода Ньютона.

4. Перечислите и опишите основные методы поиска начального приближения решения системы.

Задание №3

**Аппроксимация функции методом наименьших квадратов**

Цель работы:

1. Приобретение навыков по обработке экспериментальных данных.

2. Алгоритмизация метода наименьших квадратов.

3. Программирование метода наименьших квадратов.

Формулировка задания:

1. Составить программу для определения на ЭВМ коэффициентов аппроксимирующей функции

,

где функции заданы для каждого варианта.

2. Отладить программу и решить задачу на ЭВМ.

3. Нанести в одной системе координат красным цветом точки, соответствующие экспериментальным данным , и синим цветом точки , где .

4. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Конкретная постановка задачи.

2. Распечатка программы и результаты счета на ЭВМ.

3. Графическое изображение данных экспериментальных и полученных с помощью аппроксимирующей функции.

Варианты заданий:

*Таблица 4.1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ном. вар. |  |  |  |  | Ном. вар. |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | x |  | 0  0,2  0,4  0,6  0,8 | 5,1  4,75  4,53  4,4  4,46 | 2 |  |  | 1  1,2  1,4  1,6  1,8 | 11,9  12,3  12,5  13,1  13,3 |
| 3 |  |  | 0,1  0,2  0,4  0,6  0,8 | 10,1  5,2  2,53  1,4  1,32 | 4 |  |  | 0  0,2  0,4  0,6  0,8 | 2,1  2,01  2,30  2,74  3,25 |
| 5 |  |  | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | 1,4  1,63  1,82  2,10  3,19 | 6 |  |  | 0,2  0,4  0,6  0,8  1,0 | 6,3  3,2  1,62  1,3  0,9 |
| 7 |  |  | 1  2  3  4  5 | -0,7  -4,5  -16,8  -50,1  -140,3 | 8 |  |  | 1  1,1  1,2  1,3  1,4 | 1,3  1,4  1,32  1,2  1,08 |
| 9 |  |  | 1  2  3  4  5 | 4,02  5,31  6,7  8,4  9,0 | 10 |  |  | 1  2  3  4  5 | 5,1  6,6  9,1  9,4  11,1 |

Методические указания

Пусть в результате проведения серии из опытов получена зависимость между величинами и в виде таблицы

*Таблица 4.2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Требуется выразить эту зависимость аналитически, т.е. дать эмпирическую формулу связывающую между собой значения переменных и . При этом вид функции предполагается заранее известным или из теоретических представлений, или в результате анализа расположения точек на координатной плоскости.

Пусть эмпирическая формула имеет вид

(4.1)

где функции заданы, а коэффициенты подлежат определению.

Подставив в формулу для значения переменной из таблицы 4.1, получим теоретические результаты Коэффициенты найдем из предположения, что опытные и теоретические результаты мало отличаются между собой. В методе наименьших квадратов условие близости опытных и теоретических результатов записывается в виде

(4.2)

или более подробно

(4.3)

Рассмотрим функцию

Функция как функция переменной достигает минимума при тех значениях переменных при которых обращаются в нуль все частные производные

(4.4)

Продифференцируем функцию по каждой переменной и приравняем производные к нулю. В результате получим

Это равенство удобно записать так:

где

Таким образом, нахождение коэффициентов свелось к решению системы линейных алгебраических уравнений:

(4.5)

Матрица этой системы симметрична относительно главной диагонали, поэтому определитель системы (4.5) отличен от нуля, и она имеет единственное решение.

Пример. Пусть опытные данные представлены следующей таблицей:

*Таблица 4.3*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 9,12 | 2,94 | 1,05 | 3,16 | 8,95 |

Нанесём точки из таблицы 4.2 на координатную плоскость XOY (рис. 4.1).

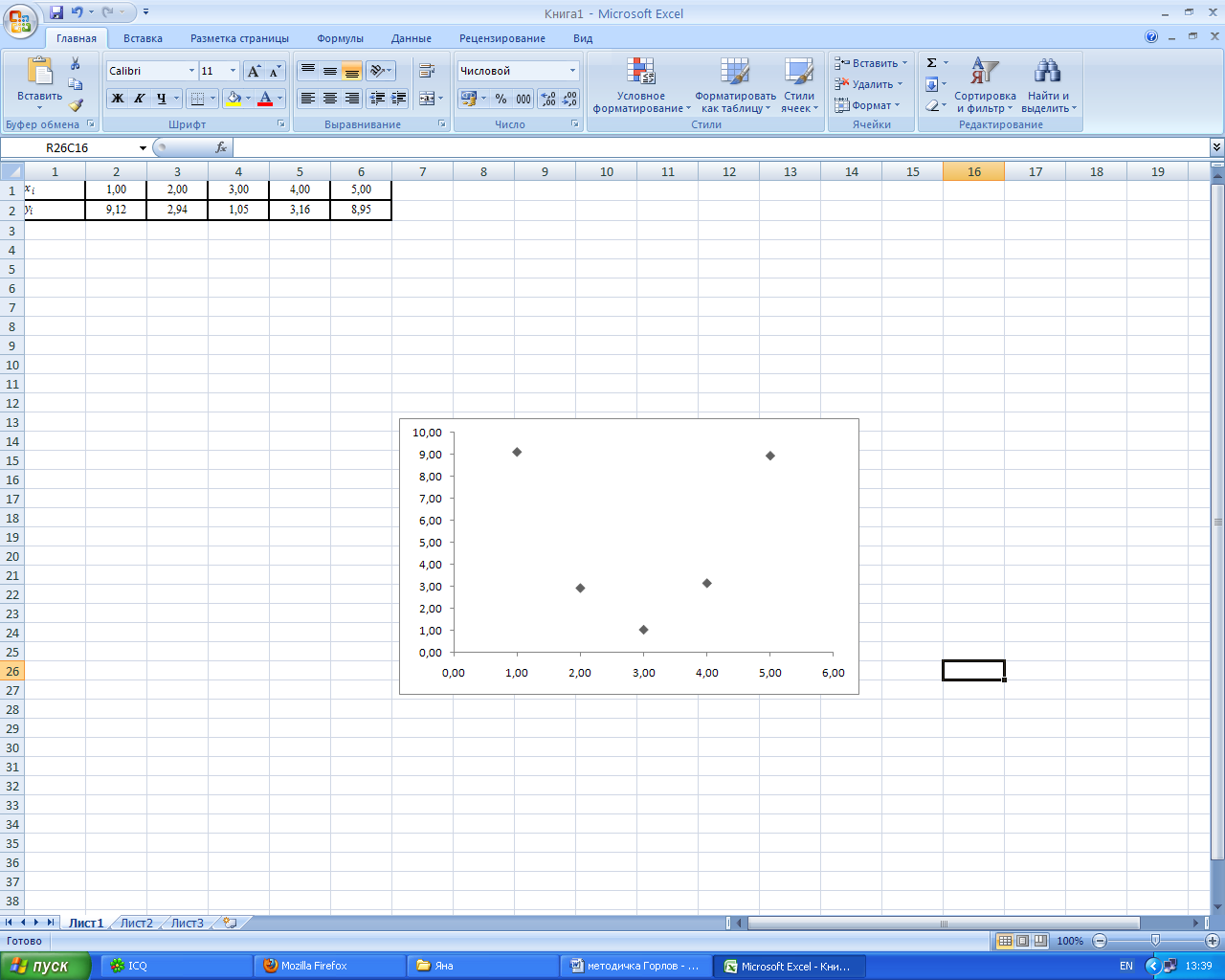


Рис. 4.1

Видно, что все эти точки располагаются вблизи некоторой параболы. Будем искать эмпирическую функцию в виде

.

В этом случае система уравнений (4.5) для определения коэффициентов примет вид

(4.6)

Подставив в полученную систему данные из таблицы 4.3, придём к следующей системе:

(4.7)

Решив эту систему, например, методом Гаусса, найдём:

Таким образом, искомая приближенная формула имеет вид

(4.8)

Для сравнения приведём в виде таблицы значения из таблицы 4.3 и значения , посчитанные по приближённой формуле (4.8):

*Таблица 4.4*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 9,12 | 2,94 | 1,05 | 3,16 | 8,95 |
| , | 9,06 | 3,06 | 1,052 | 3,036 | 9,012 |

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 4.2.

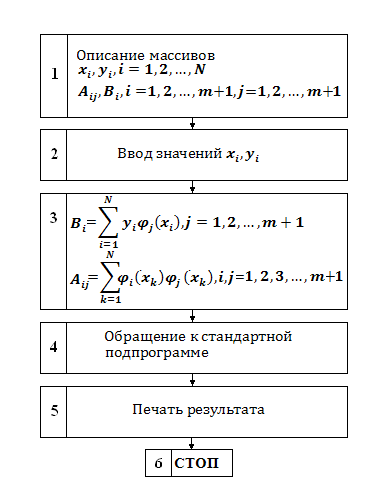


Рис. 4.2

Контрольные вопросы

1. В чём заключается задача аппроксимации функции?

2. Как осуществляется аппроксимация функции методом наименьших квадратов?

3. Как в методе наименьших квадратов описывается условие близости опытных и теоретических результатов?

4. Опишите алгоритм реализации метода наименьших квадратов на ЭВМ.

Задание № 4

**Численное интегрирование**

Цель работы:

1. Изучение методов численного интегрирования, вычисление определённого интеграла от заданной функции методами прямоугольников и Гаусса.

Формулировка задания:

1. Составить блок-схему алгоритма и программу для вычисления определённого интеграла от заданной функции методами прямоугольников и Гаусса.

2. Отладить составленную программу на ЭВМ.

3. Оформить отчет по выполнению задания.

Содержание отчета:

1. Конкретная постановка задачи.

2. Блок-схема программы и распечатка, полученная на ЭВМ.

3. График заданной подынтегральной функции.

4. Значение интеграла, полученное двумя методами.

Варианты заданий:

Для вычисления интеграла используем метод прямоугольников с числом узлов от до 100 и квадратурную формулу Гаусса с узлами. В исходные данные включаются: функция ; пределы интегрирования ; число узлов , веса и узлы квадратурной формулы Гаусса.

Вычислить интеграл вида по данным, приведённым в табл. 5.1.

*Таблица 5.1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |
| 1 |  | 0.2 | 2.5 |
| 2 |  | 0 | π |
| 3 |  | 0 | 2 |
| 4 |  | 0 | π |
| 5 |  | 1 | 4 |
| 6 |  | 1.5 | 3 |
| 7 |  | 0 | π |
| 8 |  | 0 | 2 |
| 9 |  | 0 | 2 |
| 10 |  | 0.1 | 1 |

Методические указания

Пусть на отрезке в точках задана функция . Нам необходимо вычислить определённый интеграл вида

(5.1)

Используя определение интеграла как предела интегральной суммы, имеем:

где – некая средняя точка интервала Задача интегрирования графически сводится к нахождению площади под графиком функции на заданном отрезке (рис. 5.1).

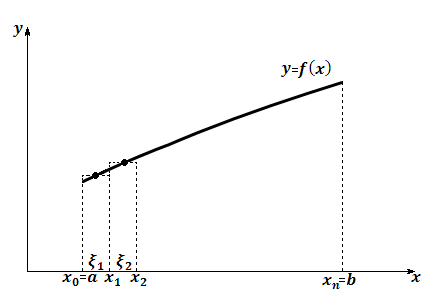


Рис. 5.1. Иллюстрация численного интегрирования.

Ось делится на отрезков длиной и на каждом отрезке по определённому критерию выбирается точка и вычисляется в этой точке значение функции . Площадь определяется суммой площадей полученных прямоугольников. Когда длина отрезков , сумма площадей прямоугольников стремится к значению интеграла.

Для численного интегрирования функцию заменяют такой аппроксимирующей функцией , интеграл от которой легко бы вычислялся. Наиболее часто в качестве аппроксимирующих выступают обобщённые интерполяционные многочлены. Поскольку такая аппроксимация линейна относительно параметров, то функцию при этом заменяют неким линейным выражением, коэффициентами которого служат значения функции в узлах:

где – остаточный член аппроксимации.

Подставляя это выражение для функции в исходный интеграл (5.1), получим

, (5.2)

где

Формула (5.2) называется квадратурной формулой с весами и узлами . Как видно из формулы, веса зависят лишь от расположения узлов, но не от вида функции . Говорят, что квадратурная формула точна для многочленов степени , если при замене функции произвольным алгебраическим многочленом степени остаточный член становится равным нулю.

Наиболее известные квадратурные формулы получаются, если выбирать узлы равноотстоящими на отрезке интегрирования. Такие формулы называются формулами Ньютона-Котеса. К формулам этого типа относятся известные формулы прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона) и некоторые другие.

В методе прямоугольников (рис. 5.2) функцию аппроксимируют полиномом нулевой степени

.

Для вычисления интеграла на отрезке разобьём его на маленькие отрезки длиной , а интеграл – на сумму интегралов на отдельных участках.

Тогда для одного участка

где – значение функции в середине отрезка. Таким образом, площадь криволинейной трапеции аппроксимируется прямоугольником, причём функция вычислена в средней точке отрезка.

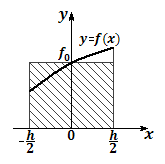


Рис. 5.2. Метод прямоугольников.

Для *i*-го отрезка

где .

Тогда, окончательно, значение интеграла на

Если узлы фиксированы (расположены равномерно на ), то в квадратурной формуле (5.2) и веса фиксированы. Тогда для построения интерполяционного полинома, аппроксимирующего функцию на остаётся лишь независимое условие, т.е. известные значения функции в узлах интерполяции . Таким образом, используя эти условия можно построить многочлен не выше *n*-й степени. Если же не фиксировать положение узлов, а следовательно, и , то в нашем распоряжении оказываются условия, с помощью которых можно построить многочлен -й степени.

Так возникла задача нахождения среди всех квадратурных формул с узлами формулы с таким расположением узлов на и с такими весами , при которых она точна для многочленов максимальной степени. Интуитивно ясно, что погрешность метода тем меньше, чем выше порядок многочлена, при численном интегрировании которого получается точный результат.

Выполним замену переменной интегрирования в исходном интеграле (6.1)

и преобразуем его к виду где

Таким образом, мы приводим интеграл на любом отрезке к фиксированному интервалу , где и будем искать оптимальное расположение узлов. Такая задача успешно решена, и в справочниках для данного интервала приведены расположение узлов и весов , где

Для вычисления интеграла воспользуемся квадратурной формулой следующего вида:

При численном интегрировании с использованием ЭВМ для хранения весов , узлов квадратурной формулы Гаусса и значений функций в центрах выбранных отрезков в методе прямоугольников, следует описать массивы соответствующей длины. Вычисления в методе Гаусса можно упростить, учитывая симметрию весов и узлов относительно середины отрезка . Значения , должны быть предварительно введены в массивы и с помощью операторов присваивания или оператора ввода начальных данных. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 5.3.

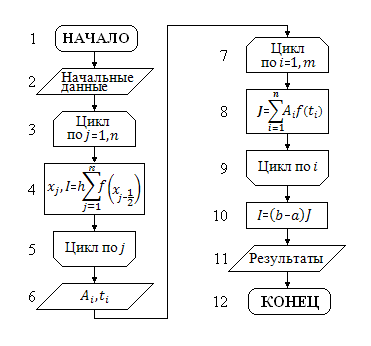


Рис. 5.3. Блок-схема программы интегрирования

Контрольные вопросы

1. В чём заключается задача численного интегрирования?

2. Какие существуют методы численного интегрирования?

3.Опишите алгоритм численного интегрирования методом прямоугольников.

4. Опишите алгоритм численного интегрирования методом Гаусса?

5. Сравните точность метода прямоугольников и метода Гаусса при одинаковом числе узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев, Е.Р. Free Pascal и Lazarus [Электронный ресурс]: учеб. по программированию/ Е.Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Т.В. Кучер. - Электрон. текстовые дан. – М.: ДМК Пресс, 2010. Режим доступа: <https://elib.bstu.ru/Reader/Book/7255>
2. Копченкова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учеб. пособие/Н.В. Копченкова, И.А. Марон.- 3-е изд., стер.- СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.-367 с.
3. Петров, И.Б. Лекции по вычислительной математике [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И. Б. Петров, А.И. Лобанов. – Электрон. текстовые дан. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. Режим доступа: <https://elib.bstu.ru/Reader/Book/9088>
4. Самарский, А.А. Введение в численные методы: учеб. пособие/ А.А. Самарский.-5-е изд., стер.- СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.- 288 с.
5. Срочко, В.А. Численные методы: курс лекций/ В.А. Срочко. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. – 203 с.
6. Фаддеев, М.А. Основные методы вычислительной математики: учеб. пособие / М.А. Фаддеев, К.А. Марков. – СПб.; Москва; Краснодар: Лань, 2014. – 151 с.