

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания для студентов направлений бакалавриата всех специальностей

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова
кафедра высшей математики

Утверждено
научно-методическим советом
университета

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания для студентов направлений бакалавриата всех специальностей

УДК 517.3(07)
ББК 22.161я7
К 78

Составители: ст. преп. В.И. Дюкарева
ст. преп. Э.И. Малышева
ст. преп. Е.В. Селиванова

Рецензент

Кратные и криволинейные интегралы: методические указания к выполнению расчетно-графического задания для студентов направлений бакалавриата всех специальностей / сост.: В.И. Дюкарева, Э.И. Малышева, Е.В. Селиванова.– Белгород: Изд-во БГТУ, 2015.–с.

К 78

УДК 517.3(07)
ББК 22.161я7
К 78

© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В.Г.Шухова, 2015

Введение

В курсе математики и высшей математики в ВУЗе предусмотрены типовые расчеты. Под этим видом работ принято понимать индивидуальные домашние задания (ИДЗ).

Самостоятельное выполнение ИДЗ помогает студенту закрепить вычислительные навыки, лучше усвоить теоретический материал, подготовиться к контрольным работам по соответствующим темам, а в итоге успешно сдать экзамен.

Глубина материала соответствует уровню требований к математической подготовке выпускника российского технического университета.

Составлены типовые расчеты в тридцати вариантах. Это достаточно сложная и кропотливая работа методическая работа, но среди предложенных задач нет случайных. Мы надеемся, что данный сборник ИДЗ окажется полезным не только студентам, но и нашим коллегам, ведущим практические занятия.

Желаем всем творческих успехов! Надеемся продолжить наше сотрудничество.

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле; область интегрирования изобразить на чертеже.

$$1. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$2. \int_1^2 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx.$$

$$3. \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$4. \int_0^2 dx \int_0^{x^2+2} f(x, y) dy.$$

$$5. \int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$6. \int_0^1 dx \int_{-2x}^{2x} f(x, y) dy.$$

$$7. \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{1+y} f(x, y) dx.$$

$$8. \int_{-3}^0 dy \int_{-3-y}^{3+y} f(x, y) dy.$$

$$9. \int_{-1}^0 dx \int_{-(2+x)}^{2-y} f(x, y) dy.$$

$$10. \int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx.$$

$$11. \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx.$$

$$12. \int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x, y) dy.$$

$$13. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

$$14. \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^y f(x, y) dx.$$

$$15. \int_{-1}^0 dy \int_{-2-y}^{1+2y} f(x, y) dx.$$

$$16. \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$17. \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$18. \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{4-y} f(x, y) dx.$$

$$19. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2-1}{4}}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$20. \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$21. \int_1^4 dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

$$22. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy.$$

$$23. \int_0^4 dy \int_{\frac{3y}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$24. \int_0^{\pi} dy \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

$$25. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$26. \int_{-1}^1 dx \int_{-1\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

$$27. \int_2^3 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$28. \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

$$29. \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$30. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^y f(x, y) dx.$$

Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной указанными линиями.

$$1. \iint_D xy dx dy, D: y = x^3, y = 0, x \leq 2.$$

$$2. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: x = y^2, x = 1.$$

$$3. \iint_D x^2 y dx dy, D: x = 1, y = 2x^3, y = 0.$$

$$4. \iint_D (x + y) dx dy, D: x = y^2, x = y.$$

$$5. \iint_D xy^2 dx dy, D: x = y, x = 2 - y, x \geq 0.$$

$$6. \iint_D (x^2 + y) dx dy, D: x^2 = y, x = y^2.$$

$$7. \iint_D y^2 x dx dy, D: y = 2x, y = x^2.$$

$$8. \iint_D (x-1)y dx dy, D: y = \frac{x}{3}, y = x, x = 3.$$

$$9. \iint_D y(x-y) dx dy, D: y = 3x, y = x, x = 2.$$

$$10. \iint_D (x^2 - 2y) dx dy, D: y = x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 0.$$

$$11. \iint_D e^y dx dy, D: y = \ln x, x = 2, y = 0.$$

$$12. \iint_D x^2(1+y) dx dy, D: y = x^3, y = x.$$

13. $\iint_D y^2(1+x)dxdy, D: y^2 = 2-x, x = 0.$
14. $\iint_D xydxdy, D: x+y = 2, y = \sqrt{x}, y = 0.$
15. $\iint_D (x+2)y^2dxdy, D: y = 2x^2, y = 2.$
16. $\iint_D x(y+5)dxdy, D: y-x = 5, x+y+5 = 0, x \leq 0.$
17. $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy, D: y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2.$
18. $\iint_D x(x+2y)dxdy, D: y = 1-x^2, y \geq 0.$
19. $\iint_D (x+1)y^2dxdy, D: y = x^2, y = 1.$
20. $\iint_D xy^3dxdy, D: x = 1-y^2, x \geq 0.$
21. $\iint_D x^3ydxdy, D: y = 2x^3, x = 1, y = 0.$
22. $\iint_D (y+2)dxdy, D: x = y^2, x = 3y.$
23. $\iint_D (y-x)dxdy, D: x = y, x^2 = y.$
24. $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy, D: x = 1, x = y^2.$
25. $\iint_D (x+y^2)dxdy, D: y = x^2, y = 4.$
26. $\iint_D (y+x^3)dxdy, D: x+y = 1, x+y = 2, x \leq 1, x \geq 0.$
27. $\iint_D (3y+x^3)dxdy, D: y = x^2 - 1, y = 1-x, x \geq 0.$
28. $\iint_D y(x+2y)dxdy, D: x^2 = 1-y, y \geq 0.$
29. $\iint_D xydxdy, D: y = x^3, y = 0, x \leq 2.$
30. $\iint_D (y+x)dxdy, D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3.$

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

$$1. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$2. \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

$$4. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$$

$$5. \int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-x^2-y^2} dx.$$

$$6. \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$7. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2) dy.$$

$$8. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy.$$

$$9. \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_0^{\sqrt{3-y^2}} \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx.$$

$$10. \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$11. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dx.$$

$$12. \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \ln(1+x^2+y^2) dx.$$

$$13. \int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$14. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

$$15. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$16. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$17. \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$18. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$19. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$20. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x^2+y^2) dy.$$

$$21. \int_{-5}^0 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2) dy.$$

$$22. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$23. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

$$24. \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$25. \int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$26. \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) e^{x^2+y^2} dy.$$

$$27. \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$28. \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xdx}{x^2 + y^2}.$$

$$29. \int_{-5}^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx.$$

$$30. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{\cos(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx.$$

Вычислить площадь области D , ограниченной заданными линиями.

$$1. D: y = x + 2; y^2 = x, y = -2, y = 2.$$

$$2. D: y = \frac{1}{4}(x-4)^2, x^2 + y^2 = 16.$$

$$3. D: x^2 + y^2 = 9, x + y = 3, y = \frac{3}{2}, x \geq 0, y \geq \frac{3}{2}.$$

$$4. D: y = 4 - x^2, 3x - 2y - 6 = 0.$$

$$5. D: xy = 4, x^2 = 2y, y = 4, x = 0.$$

$$6. D: x = \frac{y^2 + 9}{6}, x = \frac{y^2 + 16}{8}.$$

$$7. D: xy = 2, x + y = 4.$$

$$8. D: x^2 + y^2 = 1, x + y = 1, x = 0.$$

$$9. D: y = x^2, y = 1 - x.$$

$$10. D: y = \ln x, x = e, x = e^2, y = 0.$$

$$11. D: y = \cos x, y = \sin x, x = 0.$$

$$12. D: xy = 1, y = x, x = 2x.$$

$$13. D: y^2 = 16 - 8x, y^2 = 24x + 48.$$

14. $D: xy = 5, y = 6 - x.$
15. $D: x^2 + y^2 = 25, y = \frac{5}{3}.$
16. $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$
17. $D: y = x^2 + 2x, y = x + 2.$
18. $D: y = 2^x, y = 2, x = 0.$
19. $D: y^2 = 6x, x^2 + y^2 = 16.$
20. $D: y = 3x - x^2, y = -x.$
21. $D: y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = 3, x = 0.$
22. $D: y = x^2 + 2x, y = x + 2.$
23. $D: x + y = 5, y^2 = x - 3.$
24. $D: y = \frac{x^2}{2}, y^2 = 2x.$
25. $D: x = 4y - y^2, x + y = 6.$
26. $D: y = 2 - x, y^2 = 4x + 4.$
27. $D: y = 4x - x^2, y = 2x^2 - 5x.$
28. $D: x = 4 - y^2, x + 2y - 4 = 0.$
29. $D: 3y^2 = 25x, 5x^2 = 9y.$
30. $D: xy = 1, xy = 2, y = x, y = 3x.$

Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Данное тело и его проекцию на плоскость XOY изобразить на чертежах.

1. $z = 3x, y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, z = 0.$
2. $z = 2x + y, y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, z = 0.$
3. $z = 8 - x^2 - y^2, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
4. $z = 9x^2 + 3y^2 + 2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

5. $z = x^2 + \frac{y^2}{3}, x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$
6. $z = x^2 + 1, 4x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$
7. $z = x^2 + y^2 + 1, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
8. $z = 10 - x^2 - y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
9. $z = x^2 + y^2, y = x, y = 2x, x = 2, z = 0.$
10. $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
11. $z = y^2, y = 2x, x = 3, z = 0.$
12. $z = x^2, y = 3x, x = 4, y = 0, z = 0.$
13. $x^2 + y^2 = 25, z = y, x = 4, x = 0, z = 0, y \geq 0.$
14. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x, z = 0.$
15. $x^2 + y^2 = 4, y + z = 2, z = 0.$
16. $x = \sqrt{4 - y^2}, z = x, z = 0.$
17. $z = x^2 + y^2 + 3, x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0.$
18. $z = 1 - x^2 - y^2, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
19. $x^2 + y^2 = 9, z = 5 - x - y, z = 0.$
20. $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
21. $z = 3x, y^2 = 2 - x, z = 0.$
22. $z = 2y, y = \sqrt{9 - x^2}, z = 0.$
23. $z = x, x = \sqrt{4 - y^2}, z = 0.$
24. $x^2 + y^2 = 4, y + z = 2, z = 0.$
25. $z = y^2, x + y = 2, z = 0.$
26. $x^2 + y^2 = 16, x + z = 8, x = 0, y = 0, z = 0.$
27. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$
28. $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1, z = 0.$
29. $z = x^2 + y^2 + 2, 2x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$
30. $x = \sqrt{1 - y^2}, z = x + 2y, x = 0, z = 0.$

Вычислить массу пластинки D , заданной ограничивающими ее линиями, если $\mu(x, y)$ – поверхностная плотность пластинки.

- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 16; x \leq 0; y \geq 0;$
1. $\mu(x, y) = \frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 36; x \geq 0; y \leq 0;$

 2. $\mu(x, y) = \frac{4x + y}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 16; x \leq 0; y \leq 0;$

 3. $\mu(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 36; x \leq 0; y \leq 0;$

 4. $\mu(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \geq 0;$

 5. $\mu(x, y) = \frac{7x^2}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0;$

 6. $\mu(x, y) = \frac{5xy}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; x \leq 0; y \geq 0;$

 7. $\mu(x, y) = \frac{4xy}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \geq 0;$

 8. $\mu(x, y) = \frac{4x - 3y}{x^2 + y^2}.$

$x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0;$

 9. $\mu(x, y) = \frac{12y}{x^2 + y^2}.$

- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 36; x \leq 0; y \leq 0;$
 10. $\mu(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 25; x \geq 0; y \leq 0;$
 11. $\mu(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \geq 0;$
 12. $\mu(x, y) = \frac{3x + 2y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \leq 0;$
 13. $\mu(x, y) = \frac{2x + 5y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; x \leq 0; y \geq 0;$
 14. $\mu(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \leq 0;$
 15. $\mu(x, y) = \frac{3x - 2y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = 49; x \geq 0; y \geq 0;$
 16. $\mu(x, y) = \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 25; x^2 + y^2 = 64; x \geq 0; y \leq 0;$
 17. $\mu(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = 36; x \leq 0; y \leq 0;$
 18. $\mu(x, y) = \frac{2x + 7y}{x^2 + y^2}.$
 $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 36; x \leq 0; y \leq 0;$
 19. $\mu(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$

- $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \leq 0;$
 20. $\mu(x, y) = \frac{5x^2}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 16; x \leq 0; y \geq 0;$
 21. $\mu(x, y) = \frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 36; x^2 + y^2 = 81; x \geq 0; y \geq 0;$
 22. $\mu(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \leq 0;$
 23. $\mu(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \leq 0;$
 24. $\mu(x, y) = \frac{2x^2}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 25; x^2 + y^2 = 36; x \leq 0; y \geq 0;$
 25. $\mu(x, y) = \frac{7xy}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 49; x \geq 0; y \geq 0;$
 26. $\mu(x, y) = \frac{7x - y}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \leq 0;$
 27. $\mu(x, y) = \frac{2x - 3y}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 25; x^2 + y^2 = 81; x \geq 0; y \leq 0;$
 28. $\mu(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$
- $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; x \leq 0; y \leq 0;$
 29. $\mu(x, y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^2}.$

$$x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 36; x \geq 0; y \leq 0;$$

$$30. \mu(x, y) = \frac{x - 7y}{x^2 + y^2}.$$

№1 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint f(x; y; z) dx dy dz$. Изобразить область V интегрирования.

1. $V : y = 4x; y = 0; x = 1; z = 2x^2 + y^2; z \geq 0$.
2. $V : \frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1; x = 0; y = 0; z = 0$.
3. $V : y = 3x; y = 2; x = 0; z \geq 0; z = x^2 + 4y^2$.
4. $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x + y = 4; z = 3 - x^2 - y^2$.
5. $V : y = 4x; y = 4; z \geq 0; z = 2\sqrt{x}$.
6. $V : z = 10y; x + y = 1; x = 0; y = 0; z = 0$.
7. $V : \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1; x = 0; y = 0; z = 0$.
8. $V : z = x^2 + 3y^2; z \geq 0; y = 0; x = 3; y = x$.
9. $V : x = 3; y = \frac{x}{3}; z \geq 0; z = 3y^2$.
10. $V : y = 2x; y = -2x; y = 1; z \geq 0; z = 3x^2 + 3y^2$.
11. $V : x = 4; y \geq 0; z \geq 0; y = 3x; z = 3\sqrt{y}$.
12. $V : x = 1; y = 2x; z \geq 0; y \geq 0; z = 2x^2 + 2y^2$.
13. $V : \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-1} = 0; x = 0; y = 0; z = 0$.
14. $V : x \geq 0; y = 2x; y = 3; z = 5 - x^2 - y^2; z \geq 0$.
15. $V : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; 3x + 2y = 6; z = 3x^2 + 2y^2$.
16. $V : x \geq 0; y = 3x; y = 1; z \geq 0; x + y + z = 5$.
17. $V : x + y = 1; z = 10y; x = 0; y = 0; z = 0$.
18. $V : y = x; y = -2x; y = 2; z \geq 0; z = x^2 + 3y^2$.
19. $V : y = 2x; x = 1; y = 0; z \geq 0; z = 6 - x^2 - y^2$.

$$20. V : x = 5; y = \frac{x}{5}; y \geq 0; z \geq 0; z = 3 - x^2 - y^2.$$

$$21. V : y = 3x; y = 3; z \geq 0; z = 2\sqrt{x}.$$

$$22. V : x = 0; y = x; y = 4; z \geq 0; z = 2x^2 + y^2.$$

$$23. V : x = 3; y = \frac{x}{3}; y \geq 0; z \geq 0; z = 12 - x^2 - y^2.$$

$$24. V : x = 2; y = 4x; z \geq 0; y = 2\sqrt{z}.$$

$$25. V : x + y = 3; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; z = 3 + x^2 + y^2.$$

$$26. V : \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1; x = 0; y = 0; z = 0.$$

$$27. V : y = x; y = 0; x = 1; z = 5(x^2 + y^2); z \geq 0.$$

$$28. V : z = 10y; x + y = 1; x = 0; y = 0; z = 0.$$

$$29. V : y = 3x; y = 2; x = 0; z = 6 - x^2 - y^2; z \geq 0.$$

$$30. V : \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1; x = 0; y = 0; z = 0.$$

$$31. V : x \geq 0; y = 4x; y = 4; z \geq 0; x = 3\sqrt{z}.$$

№2 Вычислить тройной интеграл.

$$1. \iiint_V x^2 \cos(xy) dx dy dz; \quad V : x = 2; y = \frac{x}{2}; y = 0; z = 0; z = 1.$$

$$2. \iiint_V 3y^2 z e^{-xyz} dx dy dz; \quad V : x = 2; y = -1; z = 2; x = y = z = 0.$$

$$3. \iiint_V x^2 \sin(4xy) dx dy dz; \quad V : x = 1; y = \frac{x}{2}; y = 0; z = 0; z = 8\pi.$$

$$4. \iiint_V 2y^2 z \cos(2xy) dx dy dz; \quad V : x = 0; y = 2; y = 6x; z = 0; z = -3.$$

$$5. \iiint_V 3y^2 e^{xy} dx dy dz; \quad V : \begin{cases} x = 0; y = 1; y = x; \\ z = 0; z = 1. \end{cases}$$

$$6. \iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz; \quad V : \begin{cases} x = 2; y = \pi; z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$$

7. $\iiint_V 4y^2 z e^{2xyz} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = -1; y = 2; z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
8. $\iiint_V y^2 z \cos xyz dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 1; y = \pi; z = 2; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
9. $\iiint_V 2y^2 \cos(\frac{\pi}{4} xy) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = -1; y = \frac{x}{2}; \\ z = 0; z = -\pi^2. \end{cases}$
10. $\iiint_V x^2 \sin(\frac{\pi}{2} xy) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 2; y = x; y = 0; \\ z = 0; z = \pi. \end{cases}$
11. $\iiint_V y^2 \cdot z \operatorname{ch}(xyz) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 1; y = 1; z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
12. $\iiint_V x^2 \cdot z \sin \frac{xyz}{2} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 1; y = 4; z = \pi; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
13. $\iiint_V 2y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = 1; y = 2x; \\ z = 0; z = \pi^2. \end{cases}$
14. $\iiint_V y^2 \cos(\frac{\pi xy}{2}) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = -1; y = x; \\ z = 0; z = 2\pi^2. \end{cases}$
15. $\iiint_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = 2; y = 2x; \\ z = 0; z = -1. \end{cases}$
16. $\iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{4} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 1; y = 2\pi; z = 4; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
17. $\iiint_V 3y^2 e^{-xy} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = -2; y = 4x; \\ z = 0; z = 1. \end{cases}$
18. $\iiint_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = 2; y = 2x; \\ z = 0; z = -1. \end{cases}$
19. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{9} dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 9; y = 1; z = 2\pi; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
20. $\iiint_V y^2 \cos(\frac{\pi}{2} xy) dx dy dz;$ $V: \begin{cases} x = 0; y = -1; y = \frac{x}{2}; \\ z = 0; z = -\pi^2. \end{cases}$

21. $\iiint_V 4x^2 e^{xy} dx dy dz$; $V: \begin{cases} y=0; x=1; y=x; \\ z=0; z=1. \end{cases}$
22. $\iiint_V y^2 z \cos xyz dx dy dz$; $V: \begin{cases} x=1; y=\pi; z=2; \\ x=0; y=0; z=0. \end{cases}$
23. $\iiint_V 4y^2 \cdot z e^{2xyz} dx dy dz$; $V: \begin{cases} x=-1; y=2; z=1; \\ x=0; y=0; z=0. \end{cases}$
24. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{3} dx dy dz$; $V: \begin{cases} x=3; y=1; z=2\pi; \\ x=0; y=0; z=0. \end{cases}$
25. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{9} dx dy dz$; $V: \begin{cases} x=9; y=1; z=2\pi; \\ x=0; y=0; z=0. \end{cases}$
26. $\iiint_V y^2 ch(3xy) dx dy dz$; $V: x=0; y=2; y=6x; z=0; z=-3.$
27. $\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz$; $V: x=1; y=\frac{x}{2}; y=0; z=0; z=8\pi.$
28. $\iiint_V 10y^2 \cdot z e^{xyz} dx dy dz$; $V: x=2; y=-1; z=2; x=0; y=0; z=0.$
29. $\iiint_V x^2 ch(xy) dx dy dz$; $V: x=2; y=\frac{x}{2}; y=0; z=0; z=1.$
30. $\iiint_V y^2 ch(3xy) dx dy dz$; $V: x=0; y=2; y=6x; z=0; z=-3.$
31. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{3} dx dy dz$; $V: \begin{cases} x=3; y=1; z=2\pi; \\ x=0; y=0; z=0. \end{cases}$

№3 Вычислить тройной интеграл.

1. $\iiint_V (3x-2y+z^2) dx dy dz$; $V: -2 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 1.$
2. $\iiint_V (x-5y+2z) dx dy dz$; $V: 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 3.$
3. $\iiint_V (x+3yz^3) dx dy dz$; $V: 1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; -1 \leq z \leq 3.$
4. $\iiint_V (2x-3y+z^2) dx dy dz$; $V: 0 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 4.$

5. $\iiint_V (x^2 - y^2 + 3x) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2.$
6. $\iiint_V (x - y - z^2) dx dy dz; \quad V: 2 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 3.$
7. $\iiint_V (xy - 2z^2) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; -1 \leq z \leq 3.$
8. $\iiint_V (2x^2 + 3y - z) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 2.$
9. $\iiint_V (2x - y^2 + z^2) dx dy dz; \quad V: 1 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 3; -1 \leq z \leq 4.$
10. $\iiint_V (4x^3 - 3y^2 + 5z) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 3; 1 \leq z \leq 4.$
11. $\iiint_V (3x^2 - 4y + z^2) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 3.$
12. $\iiint_V (x^2 - 4y + z^3) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 5.$
13. $\iiint_V (x - 2y + 3z) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 1.$
14. $\iiint_V (x^2 - 2y^2 + z) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3; -1 \leq z \leq 2.$
15. $\iiint_V (2x + y^2 - z^2) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 3; -1 \leq z \leq 2.$
16. $\iiint_V (xy - z^3) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 5; 0 \leq z \leq 4.$
17. $\iiint_V (x^2 + 4y^2 z) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 0; -1 \leq z \leq 2.$
18. $\iiint_V (2xy - z^3) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 3.$
19. $\iiint_V (4x - 3y^2 + 5z) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 4.$
20. $\iiint_V (x^2 - 4y + z^2) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 4.$
21. $\iiint_V (5x^2 - 10y + z^3) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 3.$
22. $\iiint_V (x - 4y + 3z) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4; 1 \leq z \leq 2.$
23. $\iiint_V (2x - y^2 + 4z) dx dy dz; \quad V: 0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 5.$

24. $\iiint_V (xy^2 + 3z) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 1 \leq z \leq 3.$
25. $\iiint_V (6x - 5y + z^2) dx dy dz; \quad V: 1 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 3.$
26. $\iiint_V (x^2 - 2y^2 + z^2) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 4.$
27. $\iiint_V (3x + 2y - 6z) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 2.$
28. $\iiint_V (5x^2 - 10y + z^2) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 5; 1 \leq z \leq 3.$
29. $\iiint_V (2x + 4y - z^2) dx dy dz; \quad V: 1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3; -1 \leq z \leq 5.$
30. $\iiint_V (x^2 - 4y + z^2) dx dy dz; \quad V: -2 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 4.$
31. $\iiint_V (2x^2 - y + 5x) dx dy dz; \quad V: -1 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 3; 1 \leq z \leq 3.$

№4 С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

1. $x^2 + y^2 = 4y; x + y + z = 4; z \geq 0.$
2. $x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 4y; x \geq 0; z \geq 0; z = 6.$
3. $z^2 = 4(x^2 + y^2); z \geq 0; z = 2; y \geq \pm x.$
4. $x^2 = 2(y^2 + z^2); x = 4; x \geq 0.$
5. $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{x^2 + y^2}; x \geq 0.$
6. $9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x \geq 0; y = \sqrt[3]{x}; z \geq 0.$
7. $x^2 + y^2 = z; z + y = 2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0.$
8. $x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = z; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0.$
9. $x^2 + y^2 = 4; z = 2 - x - y; z \geq 0.$
10. $y \geq 0; x + y = 2; z = x^2.$
11. $y^2 = x; x = 2y^2 + 1; z = 1 - y; z \geq 0.$
12. $x^2 + y^2 = 4x; z \geq 0; z = y - 2.$
13. $x - y + 2 = 0; x + y = 7; y = 0; z = x^2; z \geq 0.$
14. $z = 6 - x^2 - y^2; 3x + 4y = 12; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0.$

15. $y = 2x; y = 1; x + y + z = 3; x \geq 0; z \geq 0$.
16. $z = x^2 + y^2; 3x + 2y = 6; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$.
17. $x^2 + y^2 = 4y; x + z = 4; z \geq 0$.
18. $x^2 + y^2 = 16; z = 3 - x - y; z \geq 0$.
19. $z = 3 - x; x = 2\sqrt{y}; y = 2\sqrt{x}; z \geq 0$.
20. $x^2 + y^2 + z^2 = 36; y \geq 0; z \geq 0; y \leq -x$.
21. $x^2 + y^2 = 8y; x + y + z = 4; z \geq 0$.
22. $x^2 + y^2 + z^2 = 16; z \geq 0$.
23. $y = \sqrt{25 - x^2}; z = y; z \geq 0$.
24. $x^2 + y^2 = 4; z = 2 - x - y; z \geq 0$.
25. $z = 2 - x^2 - y^2; y = 2x; x = 1; z \geq 0; y = 0$.
26. $z = x^2; x + y = 1; y \geq 0$.
27. $x^2 + y^2 = z; x^2 + y^2 = 9; z \geq 0$.
28. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; x \geq 0; y \leq x; y \geq 0; z \geq 0$.
29. $x^2 + y^2 = 8y; x + z = 4; z \geq 0$.
30. $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{x^2 + y^2}; y \geq 0$.

№5 Тело V задано ограничивающими его поверхностями, - плотность. Найти массу тела.

1. $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 6z; x = 0; y = 0; z = 0; (x \geq 0; y \geq 0); \mu = 60y$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 1; (x^2 + y^2 \leq 1); y \geq 0; \mu = |z|$.
3. $16(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2)$.
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = z^2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 6z$.
5. $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2; x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z; x = 0; y = 0; (x \geq 0; y \geq 0); \mu = 25xz$.
6. $x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = 6z; x = 0; y = 0; z = 0; (x \geq 0; y \leq 0); \mu = 6x$.
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 1; (x^2 + y^2 \leq 1); \mu = 3|z|$.
8. $25(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 4; x \geq 0; z \geq 0; \mu = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$.

9.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 2z^2; x = 0; y = 0; (x \geq 0; y \geq 0); z \geq 0; \mu = 10z.$$

$$10. x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2; x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z; y \geq 0; \mu = 40yz.$$

$$11. x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 3z; x \leq 0; y \geq 0; z = 0; \mu = 5x.$$

$$12. x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 4; (x^2 + y^2 \leq 4); x = 0; (x \geq 0); \mu = 3|z|.$$

$$36(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 9; y = 0; z = 0; (y \geq 0; z \geq 0);$$

$$13. \mu = \frac{6(x^2 + y^2)}{3}.$$

$$14. x^2 + y^2 + z^2 = 25; x^2 + y^2 = 6z^2; x = 0; y = 0; \\ (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0); \mu = 7z.$$

$$15. x^2 + y^2 = \frac{9z^2}{16}; x^2 + y^2 = \frac{3z}{4}; y = 0; (y \geq 0); \mu = 10xz.$$

$$16. x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 6z; x \geq 0; z = 0; \mu = 10x.$$

$$17. x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 1; (x^2 + y^2 \leq 1); z = 0 (z \geq 0); \mu = 2z.$$

$$x^2 + y^2 = 2z^2; x^2 + y^2 = 4; x = 0; y = 0; z = 0; (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0);$$

$$18. \mu = \frac{3(x^2 + y^2)}{2}.$$

$$19. x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = z^2; x = 0; y = 0; (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0); \\ \mu = 16z.$$

$$20. x^2 + y^2 = z^2; x^2 + y^2 = z; y = 0; (y \geq 0); \mu = 3yz.$$

$$21. x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 9z; x = 0; y = 0; z = 0; (x \geq 0; y \geq 0); \mu = 3y.$$

$$22. x^2 + y^2 + z^2 = 25; x^2 + y^2 = 9; (x^2 + y^2 \leq 9); \mu = 3|z|.$$

$$23. 5(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \mu = 4(x^2 + y^2).$$

$$24. x^2 + y^2 + z^2 = 9; x^2 + y^2 = 3z^2; x = 0; y = 0; \\ (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0); \mu = 7z.$$

$$25. x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}; x^2 + y^2 = \frac{z}{5}; x = 0; y = 0; (x \geq 0; y \geq 0); \mu = 5xz.$$

$$26. x^2 + y^2 = \frac{z^2}{16}; x^2 + y^2 = \frac{z}{4}; y = 0; (y \geq 0); \mu = 7xz.$$

$$27. x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = z; x = 0; z = 0; \mu = 5y.$$

28. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 9$; $(x^2 + y^2 \leq 9)$; $\mu = 10|z|$.

29. $4(x^2 + y^2) = z^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $y = 0$; $z = 0$; $(z \geq 0)$; $\mu = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$.

30. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 3z^2$; $x = 0$; $y = 0$;
 $(x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0)$; $\mu = 20z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл.

1. $\int_L y dl$, L – дуга параболы $y^2 = 4x$, отсеченная параболой $x^2 = 4y$.

2. $\int_L \frac{yx}{2} dl$, L – часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая во второй четверти.

3. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, L – отрезок прямой $y = x - 2$, заключенный между точками $A(0; -2)$ и $B(4; 0)$.

4. $\int_L xy dl$, L – четверть эллипса $x^2/4 + y^2 = 1$, лежащая в первом квадранте.

5. $\int_L \frac{dl}{x+y}$, L – отрезок прямой $y = x + 2$, заключенный между точками $A(2; 4)$ и $B(1; 3)$.

6. $\int_L \frac{x}{y} dl$, L – дуга полукубической параболы $y^2 = 4x^3/9$ от точки $A(3; 2\sqrt{3})$ до точки $B(8; 32\sqrt{2}/3)$.

7. $\int_L x^2 y dl$, L – четверть круга $x^2 + y^2 = 4$, находящегося в первой четверти.

8. $\int_L \arctg(y/x) dl$, L – дуга кардиоиды $\rho = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

9. $\int_L xy dl$, L – контур прямоугольника $OABC$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(4; 2)$, $C(0; 2)$.

10. $\int_L \frac{x}{y^2} dl$, L – дуга кривой $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [\pi/4; \pi/2]$.

11. $\int_L (x+y)dl$, L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1; 0)$,

$B(0; 1)$, $O(0; 0)$.

12. $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$, L – отрезок прямой AB , заключенный между

точками $A(-1; 0)$ и $B(0; 1)$.

13. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, L – отрезок прямой OA , соединяющий точки

$O(0; 0)$ и $A(2; 2)$.

14. $\int_L y^2 dl$, L – первая арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$,

$0 \leq t \leq 2\pi$.

15. $\int_L (x-y)dl$, L – ломаная ABC , $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(6; 2)$.

16. $\int_L x^4 \cdot \sqrt[4]{y} dl$, L – дуга параболы $y = x^4$, заключенная между

точками $O(0; 0)$ и $B(1; 1)$.

17. $\int_L (y^2 + x^2)dl$, L – часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в

четвертой четверти.

18. $\int_L xy dl$, L – контур квадрата со сторонами $x = \pm 4$, $y = \pm 4$.

19. $\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

20. $\int_L (xy - y)dl$, L – отрезок прямой AB , заключенный между точками

$A(2; 3)$ и $B(4; 7)$.

21. $\int_L (x+y)dl$, L – контур треугольника OAB с вершинами $O(0; 0)$,

$A(-1; 0)$, $B(0; 1)$.

22. $\int_L (x^2 + y^2)^3 dl$, L – часть окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$,

лежащая в третьей четверти.

23. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$, L – первая четверть окружности $\rho = 2$.
24. $\int_L \frac{y}{x} dl$, L – дуга параболы $y = x^2$, заключенная между точками (2; 4), (3; 9).
25. $\int_L xy dl$, L – контур прямоугольника ABCD со сторонами A(2; 0), B(4; 0), C(4; 3), D(2; 3).
26. $\int_L y dl$, L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $x^2 = 2y$.
27. $\int_L \frac{dl}{x - y}$, L – контур треугольника AOB с вершинами A(-1; 0), O(0; 0), B(0, -1).
28. $\int_L (x + y) dl$, L – ломаная, проходящая через точки, (0; 0), (2; 0), (2; 2).
29. $\int_L (x + y) dl$, L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$.
30. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, L – отрезок прямой OA, соединяющий точки O(0; 0) и A(1; 2).
7. Вычислить криволинейный интеграл.
1. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, L – дуга параболы $2y^2 = x$, заключенная между точками O(0; 0) и A(2; 1).
2. $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{1}{y-2} dy$, L – дуга циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $\pi/6 \leq t \leq \pi/3$.
3. $\int_L (x^2 + y) dx + (2x - y) dy$, L – дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки A(1; 1) до точки B(3; -3).

4. $\int_L xdy$, L – отрезок прямой $x/a + y/b = 1$ от точки A(a; 0) до точки

B(0; b).

5. $\int_L \frac{x-1}{y} dy$, L – дуга параболы $y = x^2$ от A(1; 1) до B(2; 4).

6. $\oint_L (3x^2y + y)dx + (x - 2y^2)dy$, L – треугольник ABC, A(0; 0), B(1; 0),

C(0; 1).

7. $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, L – четверть дуги окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$,

лежащая в третьем октанте, пробегаемая против хода часовой стрелки.

8. $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, L – дуга параболы $y = x^2$ от A(-1; 1) до

B(1; 1).

9. $\int_L ydx - xdy$, L – дуга эллипса, $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, лежащая во

второй четверти, пробегаемая против хода часовой стрелки.

10. $\int_L xy^2 dx + (x+y)dy$, L – дуга параболы $y = x^2$ от O(0; 0) до

B(2; 4).

11. $\int_L (4-y)dx + xdy$, L – дуга первой арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$,

$y = 2(1 - \cos t)$ от O(0; 0) до A(4π; 0).

12. $\int_L (xy - x)dx + \frac{x^2}{y} dy$, L – дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от A(0; 0) до

A(1; 2).

13. $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, L – верхняя половина эллипса $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$,

пробегаемая по ходу часовой стрелки.

14. $\int_L y(x-y)dx + xdy$, L – дуга параболы $y = 2x^2$ от $O(0; 0)$ до

$A(1; 2)$.

15. $\int_L ydx - xdy$, L – четверть дуги окружности $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$,

лежащая в первой четверти, пробегаемая против хода часовой стрелки.

16. $\oint_L xdy$, L – контур треугольника, образованный прямыми $y = x$,

$x = 2$, $y = 0$, при положительном направлении обхода.

17. $\int_L (yx-1)dx + x^2ydy$, L – дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$,

$0 \leq t \leq \pi/2$.

18. $\oint_L (x^2 - y)dx$, L – контур прямоугольника, образованный прямыми

$y = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, при положительном направлении обхода.

19. $\oint_L 2x(y-1)dx + x^2dy$, L – замкнутый контур, ограниченный

линиями $y = x^2$, $y = 9$.

20. $\int_L \cos^2 x dx + \frac{dy}{y^3}$, L – дуга кривой $y = \operatorname{tg} x$ от $x_1 = \pi/4$, до $x_2 = \pi/3$.

21. $\int_L yx dx + (y-x)dy$, L – дуга кривой $y = x^3$ от $O(0; 0)$ до $A(1; 1)$.

22. $\int_L (yx-x)dx + \frac{x^2}{2}ydy$, L – ломаная ABO , проходящая через точки

$A(1; 2)$, $B(1/2; 3)$, $O(0; 0)$, при положительном направлении обхода.

23. $\oint_L x^2y dx - y^2dy$, L – замкнутый контур, ограниченный линиями

$y = x + 2$, $y = 0$, $x = 0$.

24. $\int_L -x \cos y dx + y \sin x dy$, L – отрезок прямой, соединяющий точки

$(0; 0)$ и $(\pi; 2\pi)$.

25. $\int_L y^3 x dx + (x^2 - y) dy$, L – дуга кривой $y = x^4$ от $O(0; 0)$ до $A(1; 1)$.

26. $\int_L (yx - x) dx + \frac{x^2}{2} y dy$, L – дуга параболы $y = 4x^2$ от точки $O(0; 0)$

до точки $A(1; 4)$.

27. $\int_L (yx - 1) dx + x^2 y dy$, L – дуга параболы $y^2 + 4x = 4$ от точки

$A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$.

28. $\int_L y^2 dx + x y dy$, L – дуга эллипса $x = 3 \cos t$, $y = 5 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

29. $\oint_L (x + y) dx - 2x dy$, L – контур треугольника, образованный

линиями $y + x = 2$, $y = 0$, $x = 0$, пробегаемый в положительном направлении обхода.

30. $\int_L (x^2 + y^2) dx + x y dy$, L – кривая $y = e^x$ от точки $A(0; 1)$ до точки

$B(1; e)$.

8. Доказать, что функция является полным дифференциалом. Найти первообразную функцию по данному дифференциалу.

1. $dz = \frac{2x dx + 2y dy}{x^2 + y^2}$.

2. $dz = (\cos x + 3x^2 y) dx + (x^3 - y^2) dy$.

3. $dz = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. $dz = (2x + y)dx + (x + 2y)dy$.
5. $dz = (3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 2y)dy$.
6. $dz = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$.
7. $dz = (6x - 3y - 1/y)dx + (-3x + x/y^2)dy$.
8. $dz = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$.
9. $dz = 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy$.
10. $dz = e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy$.
11. $dz = 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy$.
12. $dz = (3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy$.
13. $dz = (3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy$.
14. $dz = (x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy$.
15. $dz = (3x^2y - 2x^3 + y^3)dx - (2y^3 - 3xy^2 - x^3)dy$.
16. $dz = (2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy$.
17. $dz = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$.
18. $dz = (3x^2 \operatorname{tgy} - 2y^3/x^3)dx + (x^3/\cos^2 + 4y^3 + 3y^2/x^2)dy$.
19. $dz = \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y} \right) dx - \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$.
20. $dz = (6x^2 + 1/(x + y))dx + (-1/(x + y) + 3y^2)dy$
21. $dz = (3x^2 - 2x - y)dx - (2y - x + 3y^2)dy$.
22. $dz = (\sin y + y \sin x + 1/x)dx + (x \cos x - \cos x + 1/y)dy$.
23. $dz = ((\sin 2x)/y + x)dx + (y - (\sin^2 x)/y^2)dy$.
24. $dz = 2x dx / y^3 + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy$.
25. $dz = \frac{5}{(x - y)^2} (-y dx + x dy)$.

$$26. dz = \left(\frac{1}{(y-1)} - y/(x-1)^2 - 2 \right) dx + \left(\frac{1}{(x-1)} - x/(y-1)^2 + 2y \right) dy.$$

$$27. dz = \left(3x^2 - 3y^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \right) dx + \left(-6xy + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{xy}} \right) dy.$$

$$28. dz = (5y + \cos x + 6xy^2) dx + (5x + 6x^2y) dy.$$

$$29. dz = y(e^{xy} + 5) dx + x(e^{xy} + 5) dy.$$

$$30. dz = \frac{1-y}{x^2y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy.$$

9. Вычислить работу силы \vec{F} при перемещении точки вдоль указанной кривой.

1. $\vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + (x-y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки из начала координат в точку A(1; 1) вдоль кривой $y = x^3$.

2. $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j}$ при перемещении точки приложения силы против хода часовой стрелки вдоль контура, образованного осями координат и первой четвертью эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

3. $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль дуги астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$).

4. $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + \frac{1}{y^2} \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой $xy = 1$ от точки A(1; 1) до B(4; 1/4).

5. $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

6. $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль прямой $y = x$ от точки (0; 0) до (1; 1).

7. $\vec{F} = (x-y) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по квадрату $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

8. $\vec{F} = (x + y) \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по ходу часовой стрелки по окружности $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.
9. $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = x^2$ от точки $(0; 0)$ до $(1; 1)$.
10. $\vec{F} = (x - y) \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = -3x^2$ от точки $(0; 0)$ до $(1; -3)$.
11. $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль прямой $y = x$ из начала координат в точку $A(1; 1)$.
12. $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = x^2$ из начала координат в точку $A(1; 1)$.
13. $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль прямой $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ из точки $(1; 0)$ в точку $(0; 3)$.
14. $\vec{F} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ из точки $C(2; 0)$ в точку $B(-2; 0)$.
15. $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + (3y - 8x) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по прямоугольнику с вершинами $A(9; 4)$, $B(-9; 4)$, $C(-9; -4)$, $D(9; -4)$.
16. $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + (3y - 8x) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль эллипса $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$.
17. $\vec{F} = -4y \cdot \vec{i} + (4y - 3x) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки по прямоугольнику с вершинами $A(2; -6)$, $B(2; 6)$, $C(-2; 6)$, $D(-2; -6)$.
18. $\vec{F} = -4y \cdot \vec{i} + (4y - 3x) \cdot \vec{j}$ при перемещении точки вдоль эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$.
19. $\vec{F} = (x^4 + 4xy^3) \cdot \vec{i} + (6x^2y^2 - 5y^2) \cdot \vec{j}$ при перемещении из точки $A(-2; 1)$ в точку $B(3; 0)$.

20. $\vec{F} = yx^2\sqrt{x}\cdot\vec{i} - y^3x^2\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки (1; 1) до точки (4; 2).
21. $\vec{F} = (3x^2y - y^3)\cdot\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\cdot\vec{j}$ при перемещении из точки A(0; 0) в точку B(1; 1).
22. $\vec{F} = x^2y\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой $xy = 1$ из точки (1; 1) в точку (2; 1/2).
23. $\vec{F} = x\cdot\vec{i} - xy\cdot\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой $y = x^3$ из точки (0; 0) в точку (1; 1).
24. $\vec{F} = x^3y\cdot\vec{i} - xy^3\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой $y = \sqrt[3]{x}$ из точки (0; 0) в точку (1; 1).
25. $\vec{F} = x\cdot\vec{i} + (x + y)\cdot\vec{j}$ при перемещении точки вдоль эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
26. $\vec{F} = (x + y^2)\cdot\vec{i} + (2xy - 8)\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = x^2$ от точки A(1; 1) до точки B(2; 4).
27. $\vec{F} = (xy - x)\cdot\vec{i} + xy\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = 2\sqrt{x}$ от точки O(0; 0) до точки B(1; 2).
28. $\vec{F} = x\sqrt{y}\cdot\vec{i} + 2xy^2\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по параболе $y = x^2$ от точки O(0; 0) до точки A(1; 1).
29. $\vec{F} = xy\cdot\vec{i} + y\sqrt{x}\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки (0; 2) до точки (2; 0).
30. $\vec{F} = (x + y)\cdot\vec{i} + x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении точки по отрезку прямой от точки (-1; 2) до точки (0; 1).

10. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина вдоль указанного контура L.

1. $\oint_L (x-y)dx + (x+y)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 4$.

2. $\oint_L (x+y)dx - (x-y)dy$, L : эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3. $\oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$, L : треугольник ABC с вершинами в точках A(1; 0), B(1; 1), C(0; 1).

4. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, L : треугольник ABC с вершинами в точках A(1; 1), B(3; 2), C(2; 5).

5. $\oint_L (y-x^2)dx + (x+y^2)dy$, L : первая четверть окружности $x^2 + y^2 = 4$.

6. $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$, L : треугольник ABC с вершинами в точках A(1; 1), B(2; 2), C(1; 3), пробегаемый в положительном направлении.

7. $\oint_L (2x+3y)dx + (3x-4y)dy$, L : дуга параболы $y = x^2$ и отрезок прямой, соединяющие точки O(0; 0) и A(2; 4),

8. $\oint_L (1-x^2)ydx + (1+y^2)xdy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 1$.

9. $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L : эллипс $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$, пробегаемый в положительном направлении.

10. $\oint_L (x+y)dx - 2xdy$, L : треугольник ABC, ограниченный линиями, $x=0$, $y=0$, $x+y=4$.

11. $\oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$, L : треугольник ABC с вершинами в точках

A(2; 0), B(2; 2), C(0; 2).

12. $\oint_L (2xy - y)dx + x^2 dy$, L : треугольник ABC, ограниченный

линиями, $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$.

13. $\oint_L xy^2 dx + yx^2 dy$, L : треугольник, ограниченный линиями, $y = x$,

$x + y = 2$, $y = 0$.

14. $\oint_L xy^2 dx + (3x^2 y / 2) dy$, L : треугольник OAB с вершинами в точках

O(0; 0), A(1; 0), B(1; 1).

15. $\oint_L (2y - y^2)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 7$.

16. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, L : образован пересечением линий

$y = x^2$, $y = x$.

17. $\oint_L (x + 2xy)dx + (x + x^2)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 4$.

18. $\oint_L e^x(1 - \cos y)dx + e^x(\sin y + y)dy$, L : квадрат со сторонами

$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

19. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, L : образован пересечением линий

$x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$, $y \geq 0$.

20. $\oint_L (-x^2 y + x + y)dx + (xy^2 + x + y)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

21. $\oint_L (4x^2y + 1)dx + (x^3 + 2)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 2$.
22. $\oint_L (1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = 3$.
23. $\oint_L (x^2 + y^2)dy$, L : квадрат со сторонами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
24. $\oint_L (2xy^2 - 1)ydx + (3xy^2 + 5)dy$, L : окружность $x^2 + y^2 = r^2$.
25. $\oint_L (x + y)dx - (x - y)dy$, L : образован пересечением линий $y = x^2$,
 $y = \sqrt{x}$.
26. $\oint_L (xy + x + y)dx + (yx - y + x)dy$, L : образован пересечением линий
 $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $y \geq 0$.
27. $\oint_L (2xy - y)dx + x^2dy$, L : треугольник, образован пересечением
линий $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$.
28. $\oint_L (x - y)^2dx + (x + y)dy$, L : треугольник OAB с вершинами в
точках $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$.
29. $\oint_L (x + y)dx + (-x + y)dy$, L : эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
30. $\oint_L (x + y)^2dx - (x^2 + y^2)dy$, L : образован пересечением линий
 $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $y \geq 0$.

10. Вычислить массу m при заданной плотности δ .

1. Вычислить массу m отрезка прямой АВ, $A(0; 0; -2)$, $B(4; 0; 0)$, если линейная плотность в каждой точке равна $\delta(x, y, z) = \frac{1}{x-z}$.
2. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = e^{3\varphi/4}$, $\varphi \in [0; 4\pi/3]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = \rho^{4/3}$.
3. Вычислить массу m дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{15}$, если линейная плотность $\delta(x, y) = 2x^2$.
4. Вычислить массу m контура прямоугольника ABCD с вершинами в точках $A(0; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 4; 2)$, $D(0; 0; 2)$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(x, y, z) = yz$.
5. Вычислить массу m контура $L: x^2 + y^2 = 4x$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = x - y$.
6. Вычислить массу части окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ в первой четверти, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(x, y) = xy$.
7. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, $\varphi \in [\pi/2; \pi]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = \cos(\varphi/2)$.
8. Вычислить массу m контура треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = xy$.
9. Вычислить массу m контура циклоиды $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(x, y) = 2 \sin(t/2)$.
10. Вычислить массу m дуги линии $x = t$, $y = t^2/\sqrt{2}$, $z = t^3/3$ от точки $A(1; 1/\sqrt{2}; 1/3)$ до точки $B(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}/3)$, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z) = y/3$.

11. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\varphi \in [0; \pi/3]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = \sin(\varphi/2)$.
12. Найти массу m контура правого лепестка лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y) = x + y$.
13. Вычислить массу m дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.
14. Вычислить массу m прямолинейного стержня АВ, где $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = -4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{y}$.
15. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 2\varphi$, $\varphi \in [0; 4/3]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = 3\rho/4$.
16. Вычислить массу m первого витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z) = z^2 / (x^2 + y^2)$.
17. Вычислить массу m отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенными между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а точке $(2; 0)$ равна 4.
18. Вычислить массу m прямолинейного стержня АВ, где $A(0; -2)$, $B(4; 0)$, если линейная плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.
19. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = \varphi$, $\varphi \in [0; \sqrt{3}]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = 15\rho^3$.
20. Вычислить массу m контура треугольника ОАВ, где $O(0; 0)$, $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, если линейная плотность $\delta(x, y)$ в каждой его точке равна $\delta(x, y) = x + y$.

21. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 2\sin \varphi$, $\varphi \in [0; \pi/2]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = \rho^3$.
22. Вычислить массу m контура окружности $x^2 + y^2 = 4x$, если линейная плотность $\delta(x, y)$ в каждой его точке равна расстоянию от точки до начала координат.
23. Вычислить массу m контура циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(x, y) = 2\cos(t/2)$.
24. Вычислить массу m контура окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = y$.
25. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 8\cos \varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = \rho^2$.
26. Найти массу m дуги окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = y$.
27. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 5e^{5\varphi/12}$, $\varphi \in [0; 1]$, если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(\rho, \varphi) = 12e^{7\varphi/12} / 13$.
28. Вычислить массу m дуги кривой $\rho = 3\sin \varphi$, $\varphi \in [0; \pi/4]$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\varphi = \pi/4$ равна 3.
29. Вычислить массу m дуги параболы $y^2 = 4x$, отсеченной параболой $x^2 = 4y$, если линейная плотность $\delta(x, y)$ в каждой точке равна ординате этой точки.
30. Вычислить массу дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y) = x^2 y$.

Учебное издание

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания для студентов направлений бакалавриата всех специальностей

Составители: **Дюкарева** Валерия Игоревна
Мальшева Элеонора Ивановна
Селиванова Елена Вячеславовна

Подписано в печать 1.11.13 Формат 60x84/16. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.

Тираж экз. Заказ № Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46